Экономико-
математическая
библиотека

Ю. М. ЕРМОЛЬЕВ
А. И. ЯСТРЕМСКИЙ

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ В ЭКОНОМИЧЕСКОМ ПЛАНИРОВАНИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Готовится к печати

Багриновский К. А., Бусыгин В. П. Математика плановых решений.

В книге излагаются вопросы, связанные с применением математических методов на основных стадиях плановых расчетов в народном хозяйстве нашей страны, которое рассматривается как комплекс взаимосвязанных структурных элементов. Существенное место занимает обсуждение предпосылок, лежащих в основе способов, предлагаемых для решения различных проблем планирования. При этом большое значение придается постановке и методам решения задач согласованных плановых решений между отраслями и сферами народного хозяйства. В качестве возможного инструмента решения этих задач рассматриваются человеко-машинные имитационные системы, примеры которых приводятся в книге.

Для широкого круга лиц, работающих в различных сферах планирования и управления народным хозяйством.

Предварительные заказы на эту книгу принимаются без ограничения магазинами Книготорга и Академкниги.

Экономико-
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА

Ю. М. ЕРМОЛЬЕВ, А. И. ЯСТРЕМСКИЙ

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ В ЭКОНОМИЧЕСКОМ ПЛАНИРОВАНИИ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1979

22.18
Е 93
УДК 519.6

Стохастические модели и методы в экономическом планировании. Ермольев Ю. М., Ястремский А. И. Наука. Главная редакция физико-математической литературы, М., 1979.

В книге рассмотрены проблемы применения математических моделей в экономическом планировании в условиях неполной информации. Неполнота информации в экономическом планировании имеет место при случайности спроса и потребления продукции, при влиянии на некоторые отрасли материального производства погодных условий, в задачах перспективного планирования. Последовательный подход к математическому описанию явлений подобного рода необходимо приводит к использованию стохастических моделей, которые являются весьма своеобразным и специфическим объектом математического программирования. В книге развиваются методы количественного и качественного анализа стохастических моделей экономики и применяются к широкому кругу моделей.

$\text{Е}\,\dfrac{20204-175}{053(02)-79}$ 79-79. 1502000000

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

К настоящему времени хорошо изучены модели оптимального планирования, параметры которых являются детерминированными величинами. К этому классу, в частности, относятся модели линейного, нелинейного, дискретного, динамического программирования. В практическом отношении это означает, что плановые расчеты должны базироваться на строго определенных показателях затрат, выпуска, потребления и т. п. В то же время, особенно в перспективном планировании, весьма сложно, а порой невозможно указать точные значения этих показателей; их фактические значения могут существенно отличаться от тех, которые берутся за основу в практике планирования, могут иметь разброс вокруг анализируемых значений. Это обстоятельство может привести к существенным ошибкам при принятии плановых решений.

Одним из способов учета недетерминированного характера исходной информации является применение моделей и методов стохастического программирования.

Основная цель развития стохастических моделей и методов оптимального планирования (моделей и методов стохастического программирования) состоит в учете всего диапазона возможных значений параметров изучаемых процессов, в учете вероятностного характера информации, которая поступает в плановый орган. Причины вероятностного характера исходной информации для экономико-математических моделей известны: наличие случайных ошибок при прогнозе на перспективу, особенно при быстрых темпах научно-технического прогресса; случайность спроса; влияние погодных условий на некоторые отрасли материального производства и т. д. Изучение, а также практическое использование стохастических моделей позволят не только повысить научную обоснованность, точность и помехоустойчивость плановых расчетов, но также и поставить ряд интересных задач, решение которых (пусть даже грубо) в рамках детерминированных моделей принципиально невозможно.

Следует отметить, что в практике планирования часто требуются дополнительные пояснения того, как появляются вероятности. Хотя исчисление вероятностей не требует изменений, тем не менее классической, частотной интерпретации вероятностей, как правило, недостаточно. Ситуации здесь во многом напоминают те, с которыми приходится сталкиваться в теории статистических решений при определении априорных законов распределения. В перспективном планировании может оказаться необходимым характеризовать вероятностями величины, которые наблюдаются только один раз, например, затраты на уникальное изделие, возможность конфликта в заданном районе земного шара. По всей видимости, для практики технико-экономического планирования может оказаться вполне достаточным тот способ задания вероятностей, который применяется в сетевом планировании. События, происходящие только один раз, например, момент планируемого окончания строительства моста через реку, является случайной величиной, значения которой определяются путем опроса экспертов, каждый из которых дает три оценки продолжительности — оптимистическую, пессимистическую и наиболее вероятную. Получаемый в результате этого «разброс» оценок позволяет сформировать определенный закон распределения. Если событие носит сложный характер, а его продолжительность определяется продолжительностью элементарных событий, по которым могут высказываться группы экспертов различных специальностей, то строятся сети составляющих его элементарных событий, каждому из которых приписывается продолжительность путем опроса соответствующей группы экспертов. И хотя при этом аналитически найти распределение интересующей случайной величины практически невозможно, сетевая модель позволяет наблюдать (с помощью ЭВМ) отдельные реализации этой величины. Продолжительность сложного события часто можно интерпретировать как длину кратчайшего пути в некотором стохастическом графе. Наблюдая длины отдельных дуг (продолжительность элементарных событий), можно определять реализации значений кратчайшего пути. Аналогично имитационные модели сетевого типа могут быть созданы для наблюдения случайных реализаций таких показателей, как затраты на разработку уникального изделия, спрос на продукцию и т. п.

Численные методы оптимизации вероятностных систем, которые обсуждаются в данной монографии, не требуют знания законов распределения случайных параметров; для их применения достаточно иметь имитационные модели, позволяющие наблюдать значения случайных параметров.

Плодотворное использование в практических расчетах и теоретических исследованиях любого нового класса моделей (в том числе и стохастических), если они более адекватно отображают экономическую действительность по сравнению с уже существующими классами моделей, возможно лишь при наличии взаимосвязанных факторов — эффективных методов решения и широкой разветвленной системы методов качественного анализа данного класса моделей.

При практическом использовании моделей, безусловно, главным является наличие хорошо алгоритмизируемых вычислительных методов, позволяющих за приемлемое время найти оптимальное решение задачи. Кроме того, сам вычислительный процесс зачастую имеет довольно прозрачную экономическую интерпретацию и может служить моделью реальных процессов, происходящих в экономике, поэтому его теоретический анализ позволяет изучать закономерности формирования оптимального состояния в изучаемой экономической системе.

Необходимо отметить, что большинство практически интересных моделей стохастического программирования обладает рядом особенностей, которые не позволяют применять к ним традиционные численные методы нелинейного программирования. К этим особенностям прежде всего следует отнести недифференцируемость функций цели и ограничений, а также практическую невозможность точного вычисления значений этих функций, их производных или аналогов производных. В последние годы интенсивно развивались прямые численные методы стохастического программирования, с помощью которых стало возможным решение подобных задач. Общие схемы некоторых из этих методов обсуждаются во второй главе. В третьей главе они применяются к стохастическим задачам складирования и размещения производства.

При теоретическом исследовании экономических систем с помощью математических моделей центр тяжести ложится на методы качественного анализа. Разнообразные признаки оптимальности, изучение вопросов устойчивости позволяют сделать ценные выводы по ряду актуальных проблем экономической теории, не прибегая к численным расчетам. Помимо этого, знание качественных свойств экономико-математической модели является существенным подспорьем при ее практической реализации. С помощью качественного исследования модели удается глубже проанализировать структуру оптимального плана, установить нормативы эффективности ресурсов, пересмотреть требования к точности той или иной группы параметров и в последующих расчетах учесть эти требования, полностью или частично элиминировать действие неучтенных факторов и т. д. Эти вопросы обсуждаются подробно в главе IV.

В главах IV—VI дается экономическая интерпретация соотношений двойственности для стохастического программирования, обсуждаются качественно новые по сравнению с детерминированными моделями эффекты, следующие из этих соотношений, доказываются некоторые маргинальные теоремы для многоэтапных задач стохастического программирования, применяются условия оптимальности и соотношения двойственности для анализа стохастических задач динамической и межотраслевых моделей. Глава VII посвящена обоснованию стохастического диалогового метода оптимизации в случае, когда отношение предпочтения субъекта планирования задается с помощью бинарного отношения.

Следует отметить, что данная монография тесно примыкает к монографии Ю. М. Ермольева [2], в которой можно найти обоснование рассматриваемых здесь на достаточно элементарном уровне численных методов. В данной монографии авторы ставили перед собой цель более подробно очертить ситуации, в которых каждый из методов применим. Отметим также, что поскольку предметом монографии являются вопросы, носящие прикладной характер, то наряду со строгим обоснованием принципиальных моментов в ней можно обнаружить рассуждения на эвристическом уровне, редко в деталях обсуждаются вопросы существования (предполагается, что все достаточные условия для этого выполняются).

Монография может быть полезна как для научных работников и специалистов, занимающихся исследованием операций и его приложениями, так и для аспирантов, студентов старших курсов, специализирующихся по экономической кибернетике и прикладной математике.

Ю. М. Ермольев,
А. И. Ястремский

ГЛАВА I

ПОСТАНОВКИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

§ 1. Учет случайного разброса параметров моделей линейного программирования

1. В настоящее время в практике планирования на основе математических методов наибольшее распространение получили детерминированные модели линейного программирования. В общем виде они сводятся к максимизации линейной функции цели

$$\sum_{j=1}^{n} a_{0j}x_j \tag{1.1}$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i \geqslant 0 \qquad (i = \overline{1, m}), \\ x_j \geqslant 0 \qquad (j = \overline{1, n}), \end{gathered} \tag{1.2}$$

или, в векторно-матричной форме,

$$\begin{gathered} (a, x) \to \max, \\ Ax + b \geqslant 0, \quad x \geqslant 0. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Выше приняты следующие обозначения: a_{ij} $(i = \overline{0, m};\ j = \overline{1, n})$ — удельный выпуск (если $a_{ij} \geqslant 0$) или удельные затраты (если $a_{ij} < 0$) i-го ингредиента j-м технологическим способом; b_i — количество ингредиента i, которым располагает экономическая система (если $b_i \geqslant 0$) или количество i-го ингредиента, которое система должна выдать вовне (если $b_i < 0$); x_j — интенсивность j-го технологического способа; $b = (b_1, \ldots, b_m)$; $a = (a_{01}, \ldots, a_{0n})$; $A = \{a_{ij}\}_{i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}}$. Под ингредиентом понимается вид вещества или энергии, находящийся в экономическом обороте.

Важнейшим предположением, которое неявно содержится в модели линейного программирования, является предположение о детерминированном характере параметров a_{ij} $(i = \overline{0, m};\ j = \overline{1, n})$ и b_i $(i = \overline{1, m})$. Это равносильно тому, что плановый орган располагает абсолютно точной информацией о неуправляемых параметрах модели. Предположение о детерминированности неуправляемых параметров является довольно оправданным допущением при планировании на небольшие интервалы времени, в течение которых основные характеристики системы существенно не изменяются и их можно достаточно точно оценить. При долгосрочном и перспективном планировании неизбежны случайные ошибки. Ошибки прогнозирования позволяют получить только области возможных значений параметров моделей: новые технологические способы, спрос, запасы полезных ископаемых, урожайность, удельные затраты и выпуск. Игнорирование случайного характера неуправляемых параметров может повлечь за собой грубые ошибки при принятии плановых решений. Л. В. Канторович [2] отмечает, что нормативы затрат в способах, в особенности при прогнозах на будущие годы, данные о ресурсах, в частности, о природных, расчетная потребность и спрос на будущие годы представляют собой в действительности стохастические величины, известные нам лишь с той или иной вероятностью. Поэтому задача построения оптимального плана также должна рассматриваться как задача стохастического программирования. Помимо осложнения процесса решения это обстоятельство сказывается качественным образом на оценке эффективности решений и на ценообразовании.

В моделях стохастического программирования параметры a_{ij}, b_i рассматриваются как случайные величины. В общем случае они могут быть зависимыми случайными величинами, поэтому удобно говорить, что a_{ij}, b_i являются функциями случайных параметров θ или, более общо, функциями элементарного события θ вероятностного пространства $(\Theta, \mathcal{T}, \mathsf{P})$; при этом θ не обязательно является числом. Здесь Θ — множество элементарных событий; $\mathcal{T}$ — множество событий (система подмножеств Θ), на которых определена вероятность P. Считается, что класс событий $\mathcal{T}$ образует σ-алгебру событий, т. е. содержит достоверное событие (множество Θ), невозможное событие (множество $\varnothing$), замкнут относительно счетных операций объединения, пересечения и отрицания. Часто θ называют состоянием природы. Указание зависимости a_{ij}, b_i от θ позволяет учесть в моделях оптимального планирования неточность прогнозов, случайный характер параметров.

2. Наряду с зависимостью от Θ величины a_{ij} часто зависят от масштабов производства, т. е. являются функциями

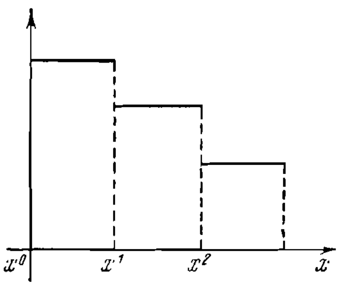

Рис. 1.

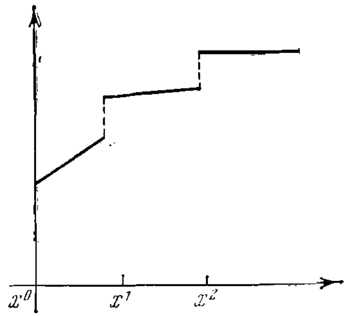

Рис. 2.

интенсивностей $x=(x_1, \ldots x_n)$, причем довольно часто можно считать, что a_{ij} зависит только от x_j, т. е. $a_{ij}=a_{ij}(x_j, \theta)$. На рис. 1 приведен типичный график изменения удельных затрат a_{ij} от x_j. Он характеризует снижение затрат на единицу выпускаемой продукции. Точки разрыва соответствуют максимальным объемам производства, на которые способна данная производственная система без ее перестройки при постоянной технической оснащенности. Если выпуск превышает значения x^0, x^1, x^2, ..., то производство требует модернизации. Общие затраты довольно точно аппроксимируются кусочно линейными, разрывными функциями вида, изображенного на рис. 2. Разрывы в точках x^0, x^1, x^2, ... связаны с дополнительными затратами на условно-постоянные расходы. Если они невелики по сравнению с общими затратами, ими можно пренебречь и тогда общие затраты являются непрерывной кусочно линейной функцией от масштаба производства.

Таким образом, линейные модели, в которых a_{ij}, b_i считаются постоянными и независимыми от x_j, имеют смысл, если интенсивности остаются в интервалах $(x^0, x^1]$, $(x^1, x^2]$, и т. д. Тот случай, когда a_{ij} зависят от x, но не зависят от θ, приводит к моделям нелинейного программирования. Основная цель стохастического программирования — учет влияния θ на неконтролируемые параметры.

3. Пусть $a_{ij} = a_{ij}(\theta)$, $b_i = b_i(\theta)$ $(i = \overline{0, m};\ j = \overline{1, n})$. В каком смысле следует тогда понимать запись, которая получается формально, если в модели (1.1) — (1.3) указать зависимость a_{ij} и b_i от θ:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{0j}(\theta) x_j \to \max, \tag{1.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta) x_j + b_j(\theta) \geqslant 0 \qquad (i = \overline{1, m}), \tag{1.5}$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad (j = \overline{1, n}), \tag{1.6}$$

где $a_{ij}(\theta)$, $b_i(\theta)$ — случайные величины? Любой фиксированный вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ при одних значениях θ может удовлетворять ограничениям (1.4) — (1.6), а при других θ — нет. В таком случае нетривиальным оказывается даже вопрос о том, какой вектор считать допустимым. Детерминированные модели не учитывают «разброс» значений $a_{ij}(\theta)$, $b_i(\theta)$; в этих моделях случайные величины заменяются детерминированными. Чаще всего вместо $a_{ij}(\theta)$, $b_i(\theta)$ рассматриваются их средние значения $\bar{a}_{ij}(\theta)$, $\bar{b}_i(\theta)$, планирование осуществляется в расчете на средние затраты, выпуск, ресурсы и т. п., т. е. рассматривается задача

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{0j}(\theta) x_j \to \max, \tag{1.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij}(\theta) x_j + \bar{b}_i(\theta) \geqslant 0 \qquad (i = \overline{1, m}), \tag{1.8}$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad (j = \overline{1, n}). \tag{1.9}$$

Можно отметить два существенных недостатка такого подхода. Во-первых, возможны грубейшие ошибки при выборе планового решения, связанные с тем, что план, выбранный в соответствии с (1.7)—(1.9), в действительности не является допустимым ни при одном θ. Чаще всего подобная ситуация имеет место в том случае, когда $a_{ij}(\theta)$, $b_i(\theta)$ имеют дискретное распределение.

Рассмотрим простой пример. Пусть требуется максимизировать $-x_1 - x_2$ при ограничениях $\theta x_1 + x_2 \geqslant 1$; $x_1 \geqslant 0$; $x_2 \geqslant 0$, где $\theta = +1$ с вероятностью 2/3 и $\theta = -1$ с вероятностью 1/3. Тогда $\bar{\theta} = 1/3$. Планы x, удовлетворяющие ограничениям данной задачи хотя бы при одном $\theta = \{\theta_1, \theta_2\}$, принадлежат пересечению неотрицательного ортанта с одним из заштрихованных полупространств (см. рис. 3). Между тем оптимальный план задачи (с усредненными параметрами) максимизации $-x_1 - x_2$ при ограничениях

$$\frac{1}{3}x_1 + x_2 \geqslant 1,$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$$

есть точка (1/3, 0), не принадлежащая данной области.

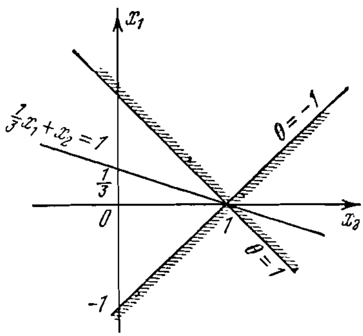

Рис. 3.

Во-вторых, подмена случайных величин детерминированными может привести к искажению сущности моделируемого процесса, поскольку с помощью детерминированных моделей нельзя описать такие важные аспекты планирования в условиях неопределенности, как возможность корректировки плана, дополнительные затраты при перепроизводстве и дефиците продукции, ценность информации.

4. Очевидно, что соотношениям (1.5), (1.6) можно придать иной, отличный от (1.8), (1.9), вероятностный смысл.

Например, в качестве допустимых планов задачи (1.4)—(1.6) можно рассматривать векторы x, удовлетворяющие (1.5), (1.6) при всех θ, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)\, x_j + b_i(\theta) \geqslant 0, \quad \theta \in \Theta \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1, n}), \tag{1.10}$$

или почти при всех θ (по вероятности $\mathbf{P}$), т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)\, x_j + b_i(\theta) \geqslant 0 \ (\operatorname{mod} \mathbf{P}) \qquad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad (j = \overline{1, n}).$$

Это — так называемые жесткие постановки задач стохастического программирования. В этом случае решение выбирается чрезвычайно «осторожно», чтобы искомый план удовлетворял балансовым ограничениям по всем ингредиентам при всех, самых маловероятных значениях θ. Зачастую система (1.10) не имеет других решений, кроме тривиальных. Например, пусть имеется неравенство

$$\theta x \leqslant 1, \quad x \geqslant 0,$$

где $\theta = 1$ с вероятностью 0,4, $\theta = 2$ с вероятностью 0,5 и $\theta = -1$ с вероятностью 0,1. Система

$$x \leqslant 1, \quad 2x \leqslant 1, \quad -x \leqslant 1, \quad x \geqslant 0$$

имеет единственное решение $x = 0$. Поскольку в данном примере $\theta \in \{1, 2\}$ с бóльшей вероятностью, то в некоторых случаях естественно допустимый план выбирать в расчете на данное множество θ. В соответствии с этим, допустимым планом задачи (1.4)—(1.6) иногда предлагают считать вектор, удовлетворяющий (1.5), (1.6) при тех θ, мера которых не ниже заданной величины, следовательно, допустимыми считаются те векторы x, которые удовлетворяют ограничениям

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)\, x_j + b_i(\theta) \geqslant 0\right\} \geqslant p_i \qquad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad (j = \overline{1, n}), \tag{1.11}$$

где p_i — заданные числа. В постановках с ограничениями типа (1.11) большие трудности возникают в связи с выбором значений p_i. Кроме того, как правило, множество допустимых планов оказывается невыпуклым. Так, на рис. 3 точки, принадлежащие хотя бы одному из заштрихованных пространств, образуют невыпуклое множество, которое описывается соотношением

$$\mathsf{P}\{\theta_1 x + x_2 \geqslant 1\} \geqslant 1/3.$$

Иногда вместо (1.11) рассматривают одно ограничение

$$\mathsf{P}\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)\, x_j + b_i(\theta) \geqslant 0 \quad (i = \overline{1, m})\right\} \geqslant p,$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad (j = \overline{1, n}).$$

Отметим, что выбор модели зависит от конкретной ситуации. Например, модель (1.7)—(1.9), по всей видимости, совершенно непригодна, если параметры имеют большие дисперсии.

5. В качестве функции цели во всех отмеченных выше постановках задач стохастического программирования не обязательно могут быть моменты нулевого ингредиента или вероятность превышения выпуска нулевого ингредиента некоторого уровня. Например, выпуск нулевого ингредиента можно максимизировать по Парето, т. е. в качестве оптимального считать допустимый план x, для которого не существует допустимого плана y такого, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{0j}(\theta)\, x_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)\, y_j, \quad \theta \in \Theta, \tag{1.12}$$

причем хотя бы для одного $\theta \in \Theta$ (1.12) выполняется как строгое неравенство. Ограничения вида (1.12) можно понимать также по mod P, т. е. почти для всех θ или с вероятностью 1.

При формировании функции цели и ограничений могут учитываться разнообразные моменты величин $\sum_j a_{0j}(\theta)\, x_j$ и $\sum_j a_{ij}(\theta)\, x_j + b_i(\theta)$. Ограничения задач стохастического программирования могут быть смешанного вида, т. е. часть ограничений может пониматься в среднем, другая — как жесткие, третья — по вероятности или в каком-либо другом смысле.

Таким образом, конкретных постановок задач стохастического программирования довольно много. Однако для развития общих методов их анализа необходимы также общие постановки. На них мы остановимся в следующем параграфе. Но перед этим рассмотрим важную (и довольно общую) модель.

6 **Двухэтапная стохастическая модель производственного планирования**. Недостатком рассмотренных постановок является то, что в них регистрируется лишь сам факт нарушения балансов ингредиентов или же нарушениям по разным ингредиентам и в разные стороны приписывается одинаковый вес. Безусловно, в большинстве реальных экономических задач имеет значение и величина нарушения баланса и вид ингредиента, по которому имеет место дисбаланс. Рассмотрим возможные постановки, лишенные этого недостатка. Пусть $r_i(v)$ обозначает штрафную функцию i-го ограничения. Тогда эффект от плана x составит

$$\sum_{j=1}^{n} a_{0j}(\theta)\, x_j + \sum_{i=1}^{m} r_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)\, x_j + b_i(\theta) \right).$$

Можно рассмотреть задачу максимизации ожидаемого (среднего) эффекта

$$F(x) = (\bar{a}(\theta), x) + \sum_{i=1}^{m} \mathsf{M} r_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)\, x_j + b_i(\theta) \right) \qquad (1.13)$$

при ограничениях

$$x_j \geqslant 0 \qquad (j = \overline{1, n}). \qquad (1.14)$$

Если вместо неравенств (1.5) рассматривать соответствующие равенства и предполагать пропорциональную зависимость штрафа от дисбаланса, то штрафная функция имеет вид

$$r_i(v) = \max\{\alpha_i v, -\beta_j v\} = \begin{cases} \alpha_i v, & \text{если } v \geqslant 0, \\ -\beta_i v, & \text{если } v < 0, \end{cases} \qquad (1.15)$$

где

$$v = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)\, x_j + b_i(\theta) \qquad (i = \overline{1, m}). \qquad (1.16)$$

α_i можно интерпретировать как удельные затраты на хранение, а β_i — как удельные затраты, связанные с дефицитом. Если $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_i > 0$ $(i = \overline{1, m})$, то задача (1.13) —

(1.16) может быть переписана в следующей эквивалентной форме. Рассмотрим систему

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)\,x_j + y_i^- - y_i^+ + b_i(\theta) = 0 \qquad (i = \overline{1,m}), \quad (1.17)$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad (j = \overline{1,n}), \quad y_i^\pm \geqslant 0 \qquad (i = \overline{1,m}).$$

При фиксированных $x = (x_1, \dots x_n)$ найдем $y_i^\pm = y_i^\pm(x, \theta)$, удовлетворяющие (1.17) и минимизирующие

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i y_i^+ + \beta_i y_i^-). \qquad (1.18)$$

Очевидно, что если $\sum\limits_j a_{ij}(\theta)\,x_j + b_i(\theta) \geqslant 0$, то

$$y_i^+(x, \theta) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)\,x_j + b_i(\theta),$$

$$y_i^-(x, \theta) = 0;$$

если $\sum\limits_j a_{ij}(\theta)\,x_j + b_i(\theta) < 0$, то

$$y_i^+(x, \theta) = 0,$$

$$y_i^-(x, \theta) = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)\,x_j - b_i(\theta).$$

Иначе говоря,

$$y_i^+(x, \theta) = \max\left\{0, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)\,x_j + b_i(\theta)\right\},$$

$$y_i^-(x, \theta) = \max\left\{0, -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)\,x_j - b_i(\theta)\right\},$$

т. е. функцию (1.13) можно записать в форме:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{0j}(\theta)\,x_j + \mathsf{M} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i y_i^+(x, \theta) + \beta_i y_i^-(x, \theta)) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{0j}(\theta) x_j + \mathsf{M} \sum_{i=1}^{m} \left(\alpha_i \max \left\{ 0, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta) x_j + b_i(\theta) \right\} + \right.$$

$$\left. + \beta_i \max \left\{ 0, - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta) x_j - b_i(\theta) \right\} \right) \to \min \qquad (1.19)$$

и задача максимизации функции (1.19) при $x \geqslant 0$ равносильна задаче (1.13)—(1.14).

В задаче (1.17)—(1.19) переменные $y_i^{\pm}$ можно рассматривать как переменные, корректирующие ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta) x_j + b_i(\theta) = 0 \qquad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad (j = \overline{1, m}). \qquad (1.20)$$

Фиксированный план $x = (x_1, \ldots, x_n)$, принимаемый по априорной информации о состояниях природы θ, не удовлетворяет этим ограничениям при каждом θ. Переменные $y_i^{\pm}$ выбираются после наблюдения θ и ликвидируют невязки. Затраты на коррекцию определяются согласно (1.18).

С экономической точки зрения дополнительные переменные $y_i^{\pm}$ можно рассматривать как интенсивности некоторых технологических способов, которые корректируют план x, принятый до наблюдения случайных величин, после того как появляется новая информация.

Корректировка планов в процессе их реализации является характерной чертой реального экономического планирования. Необходимость корректировки плана не является следствием недостатков планирования. Корректировка органически присуща выбору и планированию действий в условиях неопределенности. Недостатки планирования при неполной информации связаны с большими затратами, которые необходимы для исправления ранее принятого плана. Важно стремиться принять такие планы, которые требовали бы минимальных общих затрат на их реализацию и коррекцию или максимизировали бы ожидаемый суммарный эффект от применения и корректировки плана.

В рамках детерминированных моделей невозможно объединить два этапа — этап принятия плана и этап его коррекции. Существуют системы детерминированных моделей, описывающих каждый из этих этапов в отдельности. Переход от детерминированных величин к случайным, являющимся причинами коррекции, позволяет получить модели, объединяющие два указанных выше этапа планирования, т. е. позволяет говорить о моделях выбора планов, устойчивых к имеющей место неопределенности, минимизирующих ожидаемые затраты на реализацию и коррекцию или максимизирующих средний общий эффект от предварительного плана и его коррекции. Это — так называемые модели двухэтапного стохастического программирования. В моделях двухэтапного стохастического программирования отражаются следующие наиболее характерные особенности планирования в условиях неопределенности:

1) вероятностный характер исходной информации;

2) корректировка ранее выбранного плана по мере уточнения информации;

3) выбор предварительного плана с учетом его будущей коррекции.

Как уже отмечалось, модель (1.17)—(1.19) — простейшая двухэтапная модель стохастического программирования. В более общем случае план-коррекция вводится в систему ограничений с помощью матрицы коррекции общего вида, элементы которой могут зависеть от θ, т. е. рассматривается система неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)\,x_j + \sum_{k=1}^{r} d_{ik}(\theta)\,y_k + b_i(\theta) \geqslant 0 \qquad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1, n}), \qquad y_k \geqslant 0 \quad (k = \overline{1, r}),$$

или в векторно-матричной форме

$$\begin{gathered} A(\theta)\,x + D(\theta)\,y + b(\theta) \geqslant 0, \\ x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0. \end{gathered} \tag{1.21}$$

Заметим, что в простейшем случае

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Предварительный план x принимается до наблюдения θ. В тот момент, когда θ становится известным, выбирается план-коррекция y так, чтобы выполнялись соотношения (1.21). При этом эффект от плана-коррекции равен

$$(d(\theta), y) = \sum_{k=1}^{r} d_k(\theta) y_k. \tag{1.22}$$

Поскольку с каждым планом-коррекцией y связан определенный эффект, то при данном x и наблюдаемом θ его лучше всего выбирать из условия максимума (1.22) при ограничениях (1.21). Обозначим такой план через $y(x, \theta)$ и назовем его оптимальной коррекцией плана x при состоянии природы θ. Можно предполагать, что $y(x, \theta)$ существует при каждом x и θ, ибо в противном случае в (1.21) можно ввести искусственные переменные $y_i^-(\theta)$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta) x_j + \sum_{k=1}^{r} d_{ik}(\theta) y_k + y_i^- + b_i(\theta) \geqslant 0,$$

и одновременно ввести их в (1.22) с достаточно большим штрафом C, т. е. вместо (1.22) рассматривать

$$\sum_{k} d_k(\theta) y_k - C \sum_{i} y_i^-.$$

Ожидаемый эффект от плана-коррекции равен

$$\mathsf{M} \sum_{k=1}^{r} d_k(\theta) y_k(x, \theta)$$

Задача состоит в поиске плана x, максимизирующего математическое ожидание эффекта от плана с учетом его будущей коррекции:

$$F(x) = (\bar{a}(\theta), x) + \mathsf{M} \sum_{k=1}^{r} d_k(\theta) y_k(x, \theta) =$$

$$= (\bar{a}(\theta), x) + \mathsf{M} \max_{y \geqslant 0} (d(\theta), y) \tag{1.23}$$

при ограничениях

$$D(\theta) y + A(\theta) x + b(\theta) \geqslant 0,$$

$$y \geqslant 0, \quad x \geqslant 0. \tag{1.24}$$

В дальнейшем будем различать программные технологические способы с интенсивностями x, и коррекционные (или адаптивные) — с интенсивностями y. Иногда нелинейную задачу (1.23)—(1.24) удобно сформулировать в несколько ином виде, а именно: найти такой детерминированный вектор x и такой вектор $y(\theta)$, чтобы

$$(\bar{a}(\theta), x) + \mathsf{M}(d(\theta), y(\theta)) \to \max \tag{1.25}$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} A(\theta)x + D(\theta)y(\theta) + b(\theta) \geqslant 0, \\ x \geqslant 0, \quad y(\theta) \geqslant 0. \end{gathered} \tag{1.26}$$

В данной постановке двухэтапная задача как бы сводится к одноэтапной: одновременно отыскивается оптимальный план x и его оптимальная коррекция $y(\theta)$. Задача (1.25)—(1.26), в отличие от задачи (1.23)—(1.24),— линейная, однако, если в задаче (1.23)—(1.24) решением является n-мерный вектор x, для поиска которого можно применять численные методы, то в задаче (1.25)—(1 .26) неизвестными являются $(x, y(\theta))$ и получить практически реализуемые численные методы для решения задачи возможно только в случаях, когда Θ — конечное множество с небольшим числом элементов. Рассмотрение (1.25) и (1.26) обычно удобно при качественном исследовании модели, при выяснении условий оптимальности и их экономической интерпретации.

7. **Примеры**. Рассмотрим ряд конкретных задач, укладывающихся в одну из общих постановок двухэтапной стохастической модели.

Простейшая стохастическая задача производственного планирования. Пусть требуется спланировать производство однородного продукта, спрос на который случаен. Обозначим через x объем производства продукта, через θ — спрос на него, через c — затраты на производство единицы продукта. Поскольку спрос на продукцию случаен, то при любых x возможно либо перепроизводство продукта, либо его дефицит. Обозначим избыток продукта через $y^+(\theta, x)$, дефицит— через $y^-(\theta, x)$, удельные издержки, связанные с избытком и дефицитом,— через d^+ и d^-. Задача заключается в нахождении x, минимизирующего математическое ожидание затрат, связанных с производством, избытком и дефицитом продукции. Нетрудно сообразить, что искомый план минимизирует

$$F(x) = cx + \mathsf{M}\,(d^+y^+(\theta, x) + d^-y^-(\theta, x)),$$

где

$$y^+(\theta, x) = \max\{0, x - \theta\},$$

$$y^-(\theta, x) = \max\{0, \theta - x\}, \quad x \geqslant 0.$$

Эта задача — частный случай (1.19).

Нетрудно видеть, что если решение выбрать по среднему значению спроса $\bar{\theta}$, то при d^+ и $d^- > C$ (что, как правило, выполняется) получаем тривиальный ответ $x = \theta$.

Стохастическая модель выбора оптимального состава машинно-тракторного парка. Пусть $b_i(k)$ — объем работы i-го вида (уборочная, посевная и т. п.) в k-й календарный период, $x_{ij}(k)$ — число агрегатов j-го вида на i-м виде работ, $w_{ij}(k)$ — сменная производительность агрегата. В том случае, когда $b_i(k)$ — детерминированные величины, имеем соотношения

$$\sum_j w_{ij}(k)\, x_{ij}(k) = b_i(k), \quad x_{ij}(k) \geqslant 0.$$

Если величины $b_i(k)$ — случайные, то общая производительность агрегатов может оказаться меньше или больше необходимого объема $b_i(k, \theta)$, что приведет к ожидаемым затратам

$$\mathsf{M}\left(\sum_{i,k}\left(d_i^+(k)\max\left\{0, b_i(k,\theta) - \sum_j w_{ij}(k)\, x_{ij}(k)\right\} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + d_i^-(k)\max\left\{0, \sum_j w_{ij}(k)\, x_{ij}(k) - b_i(k,\theta)\right\}\right)\right).$$

Задача состоит в поиске таких $x_{ij}(k) \geqslant 0$, которые минимизируют функцию

$$\sum_{i,j,k} a_{ij}(k)\,x_{ij}(k)+\sum_{j}\left(\max_{k}\sum_{i} x_{ij}(k)\right)\beta_j+$$
$$+\,M\left(\sum_{i,k}\right)\left(d_i^{+}(k)\max\left\{0,\,b_i(k,\theta)-\sum_{j} w_{ij}(k)\,x_{ij}(k)\right\}+\right.$$
$$\left.+\,d_i^{-}(k)\max\left\{0,\,\sum_{j} w_{ij}(k)-b_i(k,\theta)\right\}\right)\Bigg),$$

где $a_{ij}(k)$ — сменные затраты, β_i — коэффициент годовых отчислений. Отличие этой задачи от задачи максимизации (1.19) в том, что вместо линейной функции дохода $\sum_j a_{0j}x_j$ в (1.19) в данном случае рассматривается нелинейная функция затрат.

Стохастические модели межотраслевого баланса. Весьма сложной задачей в межотраслевых исследованиях является получение более или менее точной информации о коэффициентах прямых затрат. Поэтому матрицу прямых затрат часто удобно считать случайной. Отсюда могут возникать новые постановки оптимизационных межотраслевых моделей.

Введем обозначения: n — количество видов продукции; $a_{ij}(\theta)$ — удельные затраты i-го продукта на производство j-го; t_j — удельные затраты труда на производство j-го продукта; α_i — удельный вес i-й продукции в составе конечной продукции; L — ресурс труда; x_j — производство j-го продукта. Будем считать, что $\alpha_i>0$ $(i=\overline{1,n})$.

При детерминированном плане производства валовой продукции производство конечной продукции будет случайным вектором

$$x-A(\theta)\,x=(E-A(\theta))\,x,$$

где E — единичная матрица, $A(\theta)$ — матрица коэффициентов $a_{ij}(\theta)$, а общий объем конечной продукции в заданных пропорциях составит

$$\min_i \frac{\sum_{j=1}^{n}(\delta_{ij}-a_{ij}(\theta))\,x_j}{\alpha_i},\quad \text{где}\quad \delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } i=j,\\ 0, & \text{если } i\neq j.\end{cases}$$

Задача состоит в выборе такого вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$, который максимизировал бы при заданных трудовых ресурсах математическое ожидание общего объема конечной продукции в заданных пропорциях, т. е. x является решением задачи

$$\mathsf{M}\left(\min_i \frac{\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - a_{ij}(\theta))\, x_j}{\alpha_i}\right) \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_j x_j \leqslant L, \quad x_j \geqslant 0 \qquad (j = \overline{1, n}).$$

Эта задача является частным случаем стохастических максиминных задач, обсуждаемых в следующих параграфах. Хотя эта задача не является задачей двухэтапного стохастического программирования, тем не менее она сводится к задаче вида (1.25)—(1.26). Введем переменную величину z, зависящую от θ, где $z(\theta)$ — общий объем производства конечной продукции в заданных пропорциях. Очевидно, что рассматриваемая задача эквивалентна следующей:

$$\mathsf{M} z(\theta) \to \max,$$

$$(E - A(\theta))\, x \geqslant \alpha z(\theta),$$

$$(t, x) \leqslant L, \quad x \geqslant 0,$$

где $t = (t_1, \ldots, t_n)$. В рассматриваемой задаче собственно план производства, т. е. план выпуска валовой продукции, не зависит от состояния природы. Можно рассмотреть стохастическую межотраслевую модель с коррекцией валовых выпусков.

Обозначим через $y(\theta)$ производство продукции после момента наблюдения над θ; L_1, L_2 — ресурсы труда за промежутки времени до и после наблюдения над θ. Одна из простейших моделей с коррекцией валовых выпусков может быть записана в виде

$$\mathsf{M} z(\theta) \to \max,$$

$$(E - A(\theta))(x + y(\theta)) \geqslant \alpha z(\theta),$$

$$(t, x) \leqslant L_1, \quad (t, y(\theta)) \leqslant L_2, \quad x \geqslant 0, \quad y(\theta) \geqslant 0.$$

Экономический смысл этой модели довольно прозрачен: необходимо выбрать такие планы производства валовой продукции до и после того, как станут точно известными коэффициенты прямых затрат, чтобы максимизировать математическое ожидание производимого объема конечной продукции в заданных пропорциях, при условии, что выполняется ограничение по труду в первом и втором периодах.

8. **Модели перспективного и оперативного стохастического программирования**. Прежде чем перейти к общим формулировкам задач стохастического программирования, остановимся вкратце на их классификации, предложенной в монографии Ю. М. Ермольева [2]. В рассмотренных выше моделях искомый план x принимался по априорной информации о θ, перед выбором x не было возможности сделать испытания над θ, поэтому x не зависел от θ и являлся детерминированным. Такие модели названы моделями перспективного стохастического программирования.

Встречаются, однако, ситуации, когда перед выбором решения (плана) имеется возможность произвести испытания над θ и выбрать решение с учетом результатов испытаний. Например, в медицинской практике решение о способе лечения больного принимается после предварительных исследований его состояния θ (рентгеновский анализ и т. п.), в оперативно-календарном планировании решение принимается на основе наблюдаемой ситуации.

Если решение (план) принимать по результатам испытаний над θ, то оно является некоторой функцией $x(\theta)$. Часто можно считать, что $x(\theta)$ — случайный вектор, т. е. измеримая вектор-функция. При этом важно иметь в виду, что в результате испытаний над θ состояние θ, вообще говоря, точно не определяется, поэтому в постановках задач важно указывать класс наблюдаемых событий, на основе которых выбираются значения $x(\theta)$. Заметим, что не всегда разумно стремиться к тому, чтобы $x(\theta)$ оказался измеримой функцией. Например, если требуется максимизировать

$$\sum_{j=1}^{n} a_{0j}(\theta)\, x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)x_j + b_i(\theta) \geqslant 0 \qquad (i=\overline{1,m}),$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad (j=\overline{1,n})$$

после наблюдения θ, в результате которого θ становится известным, то в качестве $x(\theta)$ лучше всего принять решение этой задачи при данном θ. Это решение неоднозначно и чтобы получить измеримую функцию $x(\theta)$, следует дополнительно оговорить определенное правило выбора равносильных решений, приводящее к измеримой функции. С вычислительной точки зрения это может привести к существенным трудностям.

Модели стохастического программирования, в которых оптимальное решение отыскивается на основе испытаний над θ, можно для краткости называть моделями оперативного стохастического программирования. Заметим, что можно было бы воспользоваться терминологией, принятой в статистике, и говорить об играх с природой без испытаний или с испытаниями, однако термины «перспективное» и «оперативное» в сочетании с терминами «программирование» нам представляются удачными, поскольку служат обозначениями обектов, имеющих многочисленные приложения в экономике. Однако подчеркнем, что термины «оперативное» и «перспективное» по смыслу не идентичны с соответствующими экономическими терминами, хотя и очень близки к ним.

Выше обсуждались возможные постановки задач стохастического программирования без проведения и с проведением испытаний (со случайными исходами) над состоянием природы θ. В общем случае процессы выбора решений и наблюдений могут развиваться по одной из двух цепочек:

решение — наблюдение — решение — ... — наблюдение — — решение

наблюдение — решение — наблюдение — ... — наблюдение — — решение.

Если цепочка решений начинается со слова «решение» и в ней это слово встречается N раз, то модель выбора решения называется N-этапной *задачей* (моделью) *перспективного стохастического программирования*, а если словами «наблюдение» — *задачей* (моделью) *оперативного стохастического программирования*. Заметим, что каждый из этапов может быть разбит на временны́е интервалы, как это было сделано, например, в задаче планирования машинно-тракторного парка. В таких случаях можно говорить о N-этапных (одноэтапных, многоэтапных) динамических задачах стохастического программирования.

Обсудим общую постановку одноэтапных задач стохастического программирования, их основные отличия от задач нелинейного программирования.

Начнем со случая, когда искомый план x — детерминированный, т. е. с моделей перспективного стохастического программирования. В моделях нелинейного программирования с каждым планом x, определяемым конечным набором чисел $(x_1, \ldots, x_n)$, называемых интенсивностями технологических способов, связываются числовые показатели $f^\nu(x)$, $\nu = \overline{0, m}$, характеризующие затраты или выпуск ингредиентов, и искомый план x выбирается из условия максимума

$$f^0(x), \tag{1.27}$$

при ограничениях, отражающих различные балансовые соотношения и ограничения по ресурсам

$$f^i(x) \geqslant 0 \qquad (i = \overline{1, m}), \tag{1.28}$$

$$x \in X. \tag{1.29}$$

Здесь X — некоторое множество n-мерного пространства $\mathbf{R}^n$, отвечающее обычно ограничениям специального вида, например, X — неотрицательный ортант:

$$X = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\}.$$

В качестве весьма общей задачи стохастического программирования можно рассматривать следующую. Имеются случайные функции

$$f^\nu(x, \theta), \quad \nu = \overline{0, m}, \quad x \in X \subseteq \mathbf{R}^n,$$

значения которых при данном x определяются элементарным событием θ некоторого вероятностного пространства $(\Theta, \mathcal{J}, \mathsf{P})$. Требуется найти план $x = (x_1, \ldots, x_n)$, максимизирующий функцию цели

$$F^0(x) = \mathsf{M}f^0(x, \theta) = \int f^0(x, \theta)\,\mathsf{P}(d\theta) \tag{1.30}$$

при ограничениях

$$F^i(x) = \mathsf{M}f^i(x, \theta) = \int f^i(x, \theta)\,\mathsf{P}(d\theta) \geqslant 0 \qquad (i = \overline{1, m}), \tag{1.31}$$

$$x \in X. \tag{1.32}$$

К этой задаче сводятся различные задачи стохастического программирования прикладного характера (в частности те, которые обсуждались в предыдущем параграфе), поскольку различные вероятностные характеристики случайной величины всегда можно представить в виде математического ожидания некоторых функций от этой случайной величины. Так, в задаче (1.7)—(1.9) с усреднениями

$$f^i(x, \theta) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)\,x_j + b_j(0);$$

в задаче с вероятностными ограничениями (1.11)

$$f^i(x, \theta) = \chi^i(x, \theta) - p_i,$$

$$\chi^i(x, \theta) = \begin{cases} 1, & \sum\limits_j a_{ij}(\theta)\,x_j + b_i(\theta) \geqslant 0, \\ 0, & \sum\limits_j a_{ij}(\theta)\,x_j + b_i(\theta) < 0. \end{cases}$$

В двухэтапной задаче (1.23) — (1.24)

$$f^0(x, \theta) = \sum_j \bar{a}_{0j}(\theta)\,x_j + \sum_{k=1}^{r} d_k(\theta)\,y_k(x, \theta).$$

В стохастической модели межотраслевого баланса без коррекции валовых выпусков

$$f^0(x, \theta) = \min_i \frac{1}{\alpha_i} \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - a_{ij}(\theta))\,x_j.$$

Можно отметить две существенные особенности задачи (1.30)—(1.32), которые не позволяют применить для ее решения традиционные методы нелинейного программирования. Первая особенность связана со сложностью вычисления значений функции цели и ограничений $F^{\nu}(x)$ $(\nu = \overline{0, m})$. Формально это сводится к вычислению интегралов по мере P, которая часто даже не задана в явном виде. Так в двухэтапной задаче для вычисления функции цели требуется найти распределение величины

$$(d(\theta), y(x, \theta)) = \max(d(\theta), y),$$

$$y \geqslant 0, \quad A(\theta)x + D(\theta)y + b(\theta) \geqslant 0,$$

как функции x и затем взять соответствующий интеграл (математическое ожидание). В стохастической модели межотраслевого баланса без коррекций для вычисления $F^0(x)$ требуется найти распределение величин

$$f^0(x, \theta) = \min_i \frac{1}{\alpha_i} \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - a_{ij}(\theta)) x_j,$$

и затем взять соответствующий интеграл.

Кроме того, как отмечалось в предисловии, вместо распределений случайных величин могут быть заданы только их имитационные модели, позволяющие наблюдать их отдельные реализации. В этом случае в принципе невозможно найти зависимость $F^{\nu}(x)$, поскольку не известно распределение θ (как правило, многомерное). Во всех перечисленных выше примерах вместо значений $F^{\nu}(x)$ $(\nu = \overline{0, m})$ имеется возможность вычислять значения случайных величин $f^{\nu}(x, \theta)$ $(\nu = \overline{0, m})$. Эта — характерная особенность задачи стохастического программирования (1.30)—(1.32), в которой требуется найти решение, оперируя только значениями величин $f^{\nu}(x, \theta)$ $(\nu = \overline{0, m})$. В таком случае даже ответ на вопрос о том, удовлетворяет ли заданный вектор x ограничениям (1.31), равносилен проверке сложной гипотезы о том, что математическое ожидание случайных величин $f^i(x, \theta)$ $(i = \overline{1, m})$, неотрицательно. (Эта задача разрешима для весьма частных законов распределения.) Для решения же задачи стохастического программирования (1.30)—(1.32) требуется осуществить перебор векторов, для которых такая гипотеза верна, и среди них найти тот, при котором математическое ожидание случайной величины $f^0(x, \theta)$ максимально.

Вторая характерная сложность задачи (1.30)—(1.32) состоит в том, что функции $F^\nu(x)$ $(\nu = \overline{0, m})$ часто оказываются негладкими (не имеющими непрерывных производных, разрывными). Переход даже от простейших линейных задач к стохастическим приводит к задачам, функции цели которых могут не иметь непрерывных производных. Например, пусть необходимо выбрать такую скалярную величину x, чтобы максимизировать вероятность выполнения линейного неравенства $\theta x \leqslant 1$, где θ — случайная величина, равная ± 1 с вероятностью 0,5. Задача состоит в максимизации функции

$$F^0(x) = \mathsf{P}(\theta x \leqslant 1).$$

Функция $F^0(x)$ разрывна, ее график изображен на рис. 4.

В двухэтапной задаче, в задаче минимаксного или максиминного типа функция цели, как правило, не имеет непрерывных частных производных, поскольку под знаком математического ожидания присутствует операция минимизации или максимизации.

В главе II будут детально обсуждаться численные методы, позволяющие решать задачи недифференцируемой оптимизации без вычисления точных значений функций цели и функций ограничений. Отметим здесь только следующую специфику решения этих задач. Если $f(x)$ — выпуклая вверх функция, имеющая непрерывные производные, то необходимым и достаточным признаком экстремума является равенство нулю градиента:

$$f_x(x) = 0.$$

Если в некоторой точке x^s градиент отличен от нуля, то, двигаясь в направлении $f_x(x^s)$, т. е. рассматривая точку

$$x^{s+1} = x^s + \rho_s f_x(x^s),$$

при подходящем шаговом множителе ρ_s получим новую точку x^{s+1}, в которой значение функции цели больше, чем $f(x^s)$, поскольку градиент $f_x(x^s)$ направлен по нормали к касательной гиперплоскости в сторону возрастания (рис. 5). На этом основаны градиентные методы оптимизации.

Если же $f(x)$ не имеет непрерывных производных, то аналогом градиента является обобщенный градиент или субградиент $f(x)$, который будем в дальнейшем обозначать $\widehat{f}_x(x)$. Такое обозначение является удобным, когда субградиент берется по части переменных. Индекс внизу показывает вектор переменных, по которым берется субградиент.

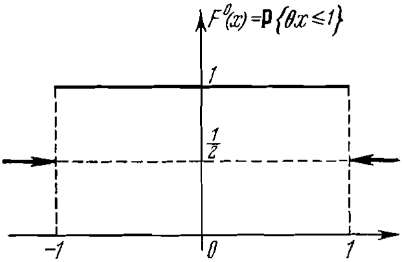

Рис. 4.

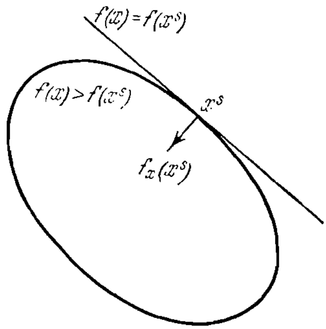

Рис. 5.

Вектор $\widehat{f}_x(x)$ удовлетворяет основному неравенству

$$f(x)-f(x^s)\leqslant(\widehat{f}_x(x^s),\ x-x^s).$$

Если $f(x)$ имеет непрерывные производные, то этому неравенству удовлетворяет единственный вектор — градиент $f_x(x^s)$. Если же $f(x)$ не имеет непрерывных частных производных, то получаем некоторое множество $\partial f(x)$ векторов, удовлетворяющих этому неравенству. Множество $\partial f(x)$ называется *субдифференциалом*, а его элементы — *субградиентами*, т. е. $\partial f(x)=\{\widehat{f}_x(x)\}$. Необходимым и достаточным условием экстремума в данном случае является

$$0\in\{\widehat{f}_x(x)\}.$$

Проверка этого включения представляет сложную задачу, поэтому в недифференцируемом случае практически невозможно использовать признаки экстремума для ответа на вопрос о том, может ли быть данная точка точкой экстремума. Кроме того, как показывает рис. 6, направление $\widehat{f}_x(x^s)$

не обязательно является направлением возрастания функции $f(x)$. Найти такой субградиент — чрезвычайно сложная задача, поэтому обоснование аналога градиентного метода — обобщенного градиентного метода, определяемого соотношениями

$$x^{s+1} = x^s + \rho_s \hat{f}_x(x^s), \qquad s = 0, 1, \ldots,$$

где $\hat{f}_x(x^s)$ — произвольный субградиент $f(x)$ в точке x^s, — требует специального исследования.

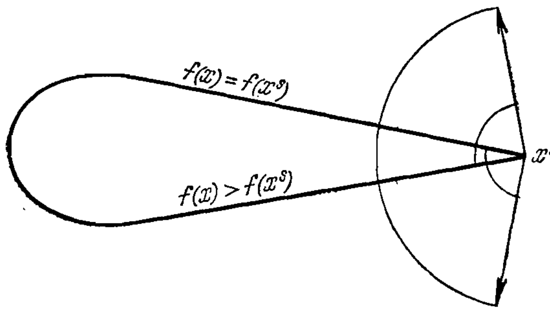

Рис. 6.

Если задача перспективного стохастического программирования по внешнему виду напоминает задачу нелинейного программирования в пространстве $\mathbf{R}^n$, то задача оперативного стохастического программирования напоминает задачу нелинейного программирования в абстрактном пространстве. В задачах оперативного стохастического программирования, как отмечалось в предыдущих параграфах, решение (план) x выбирается после того как станет известным результат эксперимента со случайным исходом по измерению состояния природы θ. Естественно при выборе решения учитывать информацию о результатах измерения θ или, другими словами, x нужно выбирать как функцию от θ. Понятно также, что характер зависимости x от θ определяется тем классом событий, которые можно наблюдать при измерении θ. Чем шире этот класс, т. е. точнее производится измерение, тем более «гибким» может быть характер зависимости x от θ. Если измерения менее точны, класс наблюдаемых событий более узок, то более «консервативной» должна быть вектор-функция $x(\theta)$.

Сформулируем это более строго. Пусть $(\Theta, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — исходное вероятностное пространство; $f^{\nu}(x, \theta)$ $(\nu=\overline{0, m})$ — случайные функции, $x \in \mathbf{R}^n$, $\theta \in \Theta$. Поскольку измерения θ происходят с ошибками, то наблюдаемый класс событий может быть более узок, чем класс $\mathcal{F}$, на котором определена вероятность P. Обозначим его через $\mathfrak{M}$. Имеем $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{F}$, причем естественно считать, что $\mathfrak{M}$ — σ-алгебра событий, т. е. $\mathfrak{M}$ σ-подалгебра σ-алгебры $\mathcal{F}$. Значения вектор-функции $x(\theta)$ зависят только от наблюдаемых событий $\mathfrak{M}$, т. е. будем считать, что $x(\theta)$ — измеримая относительно $\mathfrak{M}$. Тогда весьма общая задача оперативного стохастического программирования формулируется как задача поиска $\mathfrak{M}$-измеримой вектор-функции $x(\theta)$, максимизирующей функционал

$$F^0(x(\theta)) = \int f^0(x(\theta), \theta)\, \mathsf{P}(d\theta) = \mathsf{M} f^0(x(\theta), \theta) \tag{1.33}$$

при ограничениях

$$F^i(x(\theta)) = \int f^i(x(\theta), \theta)\, \mathsf{P}(d\theta) = \mathsf{M} f^i(x(\theta), \theta) \geqslant 0$$

$$(i=\overline{1, m}), \tag{1.34}$$

$$x(\theta) \in X(\theta). \tag{1.35}$$

Решение задачи (1.33)—(1.35) иногда будем обозначать через $x_{\mathfrak{M}}(\theta)$. Отметим простое свойство $x_{\mathfrak{M}}(\theta)$. Пусть имеются два решения $x_{\mathfrak{M}_1}(\theta)$ и $x_{\mathfrak{M}_2}(\theta)$, причем $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2$; тогда

$$F^0(x_{\mathfrak{M}_1}(\theta)) \leqslant F^0(x_{\mathfrak{M}_2}(\theta)).$$

Это непосредственно следует из того, что $I(\mathfrak{M}_1) \subseteq I(\mathfrak{M}_2)$, если $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2$, где $I(\mathfrak{M})$ — множество $\mathfrak{M}$-измеримых векторов, т. е. чем точнее производятся измерения, чем шире класс $\mathfrak{M}$, тем эффективнее решение. Множество $I(\mathfrak{M})$ будем называть *информационным* множеством.

В задаче (1.33) — (1.35) функционалы $F^{\nu}(x(\theta))$, как и функционалы $F^{\nu}(x)$ в задаче (1.30) — (1.32), как правило, точно не вычисляются и являются негладкими. Кроме того, специфика задачи состоит и в том, что случайный вектор $x(\theta)$ должен быть измерим относительно вполне определенной σ-подалгебры $\mathfrak{M}$. Отметим, что с практической точки зрения недостаточно одного указания на то, что решение x должно быть $\mathfrak{M}$-измеримой функцией $x(\theta)$. В этом случае зависимости $x(\theta)$ могут оказаться довольно сложными и практически нереализуемыми. Требование практической реализуемости $x(\theta)$ приводит к тому, что $x(\theta)$ должно принадлежать определенному классу правил, а более определенно, $x(\theta)$ должно быть некоторой функцией от θ — $r(\theta, y)$, где y — неизвестные детерминированные параметры. Основная задача при этом сводится к определению вектора y на основе априорной информации о θ. В результате такой параметризации решения задача оперативного стохастического программирования сводится к задаче перспективного стохастического программирования. Например, политика планирования запасов в зависимости от уровня запаса θ есть функция $x(\theta)$. Однако реализация $x(\theta)$ общего вида приведет к сложной системе заказов, неритмичной работе транспорта. Часто ограничиваются так называемыми (s, S)-стратегиями, когда поставка запаса до уровня S осуществляется в те моменты времени, когда уровень запаса окажется ниже s. Основная задача при этом — найти детерминированные числа s, S по априорной информации о спросе θ.

9. Многоэтапная стохастическая модель производственного планирования. В двухэтапной стохастической модели имелось два вида технологических способов — программные и коррекционные, которые применялись соответственно до и после наблюдения над состоянием природы θ. Предварительный план мог корректироваться лишь после того как полностью станут известными действительные значения θ. Как уже отмечалось, в действительности корректировка может происходить не только после получения полной информации о состоянии природы, но и после того, как информация о состоянии природы лишь уточнится, т. е. более реальной и общей является многоэтапная схема получения и использования информации.

Опишем модель, в которой реализуется возможность многократного получения плановым органом некоторых порций информации и их использование для последовательной коррекции предварительного плана. Пусть n —

количество технологических способов; $m+1$ — количество видов ингредиентов; $a_{\nu j}(\theta)$ — удельный выпуск или затраты ν-го ингредиента j-м способом; $b_i(\theta)$ — наличие i-го ингредиента или плановые задания по его выпуску; x_j — интенсивность применения j-го способа. Величины $a_{\nu j}$ и b_i могут быть положительными и отрицательными; в последнем случае они показывают удельные затраты и количество ингредиента, которое необходимо выдать вовне.

Множество технологических способов разбито на $N+1$ непересекающихся множеств U_t $(t=\overline{0, N})$, а состояние природы θ состоит из N компонент $\theta(t)$ $(t=\overline{1, N})$. Обозначим через x_t вектор $\{x_j\}_{j\in U_t}$. Процесс получения и использования информации плановым органом происходит следующим образом. На нулевом шаге информация о векторе θ может быть известна плановому органу с точностью до вероятностного распределения. В этот момент необходимо выбрать интенсивности x_0 способов из множества U_0. После этого происходит наблюдение над $\theta(1)$ и в зависимости от случайного исхода выбираются интенсивности технологических способов из множества U_1. На t-м шаге наблюдаются реализации $\theta^t=(\theta(1), \ldots, \theta(t))$ и выбираются интенсивности технологических способов из множества U_t и т. д. вплоть до шага N. Задача состоит в выборе такого детерминированного вектора x_0 и таких векторов x_t $(t=\overline{1, N})$, зависящих от θ^t и предыдущих решений, чтобы максимизировать математическое ожидание выпуска нулевого ингредиента. Для изучения условий оптимальности эту задачу удобно сформулировать в форме, аналогичной формулировке (1.25)—(1.26) двухэтапной задачи. Рассмотрим векторы x_0 и $x_t(\theta^t)$ при $t>0$. Векторы $x_t(\theta^t)$ зависят от $\theta^t=(\theta(1),\ldots$ $\ldots, \theta(t))$. Тогда многоэтапная задача равносильна следующей одноэтапной.

Найти векторы x_0, $x_t(\theta^t)$, максимизирующие

$$\mathsf{M}\left(\sum_{t=0}^{N}(a_t(\theta), x_t(\theta^t))\right),$$

при условии, что с вероятностью 1 выполняются балансы ингредиентов:

$$\sum_{t=0}^{N} A_t(\theta)\, x_t(\theta^t) + b(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}},$$

где запись mod P означает «с вероятностью 1», и с вероятностью 1 выполнялось условие неотрицательности переменных:

$$x_t(\theta^t) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}} \qquad (t = \overline{0, N}),$$

где

$$a_t(\theta) = \{a_{0j}(\theta)\}_{j \in U_t}, \quad A_t(\theta) = \{a_{ij}(\theta)\}_{i=\overline{1,m};\ j \in U_t}.$$

Здесь через $x_0(0)$ обозначается детерминированный вектор x_0. Это обозначение введено для того, чтобы все группы переменных имели единообразные обозначения.

Хотя приведенная выше постановка многоэтапной задачи имеет довольно прозрачный смысл, все же она недостаточно строга, поскольку в ней не указывается характер зависимости x_t от θ^t.

Рассмотрим более общую (и более строгую) постановку задачи. Предположим, что в каждый момент времени $t = 0, 1, \ldots, N$ решение выбирается на основе случайного эксперимента над θ, описываемого σ-подалгеброй $\mathfrak{M}_t$ σ-алгебры $\mathcal{F}$ основного вероятностного пространства $(\Theta, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Пусть $A_t(\theta) = \{a_{ij}(\theta)\}_{i=\overline{1,m};\ j \in U_t}$. Необходимо выбрать $\mathfrak{M}_t$-измеримые вектор-функции $x_t(\theta)$, максимизирующие

$$\mathsf{M} \sum_{t=0}^{N} (a_t(\theta),\ x_t(\theta)) \tag{1.36}$$

при ограничениях

$$\sum_{t=0}^{N} A_t(\theta)\, x_t(\theta) + b(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}, \tag{1.37}$$

$$x_t(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}} \qquad (t = \overline{0, N}). \tag{1.38}$$

В предыдущей задаче $\theta = (\theta(1), \ldots, \theta(N))$ и $\theta(t)$ являлись векторами пространства R^{n_t}.

Естественно предполагать, что со временем поступает все более точная информация о случайных параметрах, т. е. $\mathfrak{M}_t \subseteq \mathfrak{M}_{t+1}$. В частности, возможно, что $\mathfrak{M}_N = \mathcal{F}$, т. е.

после N-го этапа состояние θ становится известно. В предыдущей задаче $\mathfrak{M}_0 = \{\Theta, \varnothing\}$, $\mathfrak{M}_N = \mathcal{J}$.

Если $\mathfrak{M}_0 = \{\Theta, \varnothing\}$, то (1.36)—(1.38) является моделью многоэтапного перспективного стохастического программирования (планирования), в противном случае—моделью многоэтапного оперативного стохастического программирования (планирования).

В дальнейшем, при отсутствии специальных оговорок, в основном будут рассматриваться многоэтапные модели, в которых $\mathfrak{M}_0 = \{\Theta, \varnothing\}$, $\mathfrak{M}_N = \mathcal{J}$.

В заключение сформулируем нелинейный аналог задачи (1.36)—(1.38): найти $\mathfrak{M}_t$-измеримые вектор-функции $x_t(\theta)$, максимизирующие

$$\mathsf{M} f^0(x_0(\theta), \ldots, x_N(\theta))$$

при ограничениях

$$f^i(x_0(\theta), \ldots, x_N(\theta)) \geqslant 0 \,(\mathrm{mod}\, \mathsf{P}) \qquad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_t(\theta) \geqslant 0 \,(\mathrm{mod}\, \mathsf{P}) \qquad (t = \overline{0, N}).$$

Двухэтапная задача является частным случаем задачи (1.36)—(1.38) при $N = 1$, $\mathfrak{M}_0 = \{\Theta, \varnothing\}$, $\mathfrak{M}_1 = \mathcal{J}$.

§ 2. О способах введения коррекций в стохастических моделях производственного планирования

Стохастические модели производства сформулированы выше как задачи многоэтапного стохастического программирования. Представляет большой интерес изучение специальных классов стохастических моделей, получаемых в зависимости от способа введения коррекционных технологий. Обсудим некоторые возможные классы. Для простоты ограничимся только случаем двухэтапных моделей, которые представляют наибольший интерес с точки зрения практических приложений. Те выводы, которые будут сделаны относительно двухэтапных моделей, нетрудно обобщить на многоэтапные.

1. Первый тип моделей, которые мы назовем *моделями с аварийной коррекцией*, характеризуется тем, что коррекционные технологические способы моделируют некоторый «аварийный» режим функционирования экономики, кото-

рый имеет место при возникновении диспропорций вследствие случайного изменения неуправляемых параметров. Параметры коррекционных способов в этих моделях явно «хуже», чем параметры программных способов (т. е. удельные затраты выше, а удельные выпуски меньше), однако компоненты оптимального плана-коррекции с вероятностью больше нуля положительны. Это объясняется тем, что в большинстве случаев выгоднее допустить небольшую вероятность наличия невязки, предусмотрев ее компенсацию, пусть даже не лучшими технологическими способами, чем действовать слишком осторожно — выбирать план-программу таким образом, чтобы вероятность невязок была равна нулю. Последний случай известен под названием «жесткой» постановки (см. § 1) и является предельным для двухэтапной задачи, если параметры, описывающие затраты коррекционных способов, бесконечно велики. Если программные способы в моделях с аварийной коррекцией применять также после наблюдения состояния природы, то с вероятностью, близкой к 1, интенсивности коррекционных способов будут равны нулю, что может служить аналитическим признаком этого типа моделей.

2. Очень часто в практических расчетах используется тип моделей, которые можно назвать *двухэтапными стохастическими моделями со штрафами*. Он характеризуется тем, что коррекционные технологические способы этого типа моделей описывают не реальные производственные процессы, происходящие после наблюдения реализаций случайных параметров, а процесс осуществления штрафных санкций за превышение лимитов ресурсов. Столбец, описывающий затраты и выпуск ингредиентов k-го коррекционного способа, в этом случае будет иметь вид

$$(-d_k, \underbrace{0, 0, \ldots, 1}_{k}, \ldots, 0),$$

т. е. применение k-го коррекционного способа с единичной интенсивностью увеличивает количество k-го ингредиента на единицу за счет уменьшения нулевого (критериального) ингредиента на величину d_k. В экономически осмысленных моделях d_k довольно большая величина; если программные и коррекционные способы поставить в одинаковые условия с точки зрения получения информации, то коррекционные способы не входят в оптимальный план. Модели со штрафами наиболее широко представлены в литературе. Модели со штрафами можно считать частным случаем моделей с аварийной коррекцией.

К достоинствам этого типа моделей можно отнести простоту вычислительных алгоритмов при реализации этих моделей на ЭВМ. Существенным недостатком моделей со штрафами, который в равной мере присущ и моделям с аварийной коррекцией, являются значительные трудности при установлении экономически оправданных величин параметров коррекционных способов. В локальных экономических системах в ряде случаев удается установить величину взаимозаменяемости между нарушением баланса по некоторому ингредиенту и нулевым максимизируемым ингредиентом. Как правило, в подобных моделях в качестве критерия эффективности выступает математическое ожидание прибыли, а нарушению баланса ингредиентов соответствуют финансовые штрафы, величина которых устанавливается вышестоящими органами, и которые могут использоваться в качестве базы для определения величин d_k. В макроэкономических системах, где в качестве критерия можно выбирать показатель, характеризующий уровень благосостояния населения (в простейшем случае это может быть количество комплектов продукции непроизводственного потребления), взаимозаменяемость между нулевым ингредиентом и некоторыми невоспроизводимыми (в рамках данной модели) ингредиентами может отсутствовать. В этом случае целесообразно применять модели второго и третьего типа, которые мы соответственно назовем *моделями с коррекцией конечных выпусков и с коррекцией валовых выпусков*.

3. Прежде чем описывать модели с коррекцией конечных выпусков, условимся называть некоторый ингредиент детерминированным, если для него все величины b_i и a_{ij} детерминированы, где i — номер рассматриваемого ингредиента. Если хотя бы одна из этих величин случайна, то ингредиент i назовем случайным.

Модели с коррекцией конечных выпусков применимы в тех случаях, когда невоспроизводимые ингредиенты детерминированы, а критерий оптимальности изучаемой системы — функционал от количеств конечной продукции воспроизводимых ингредиентов. В моделях с коррекцией конечных выпусков план-программа является планом выпуска воспроизводимых ингредиентов, а план-коррекция показывает величину выпускаемой конечной продукции. В ряде моделей с коррекцией конечных выпусков при несильных предположениях можно доказать, что множество допустимых планов-программ довольно широко, поэтому применение и анализ моделей с коррекцией конечных выпусков позволяет получить довольно содержательные результаты. Коррекционные способы выдерживают «конкуренцию» программных способов, даже если последние применяются после наблюдения θ, т. е. коррекционные способы с вероятностью, близкой к единице, входят в оптимальный план.

Примером модели с коррекцией конечных выпусков является стохастическая межотраслевая модель с коррекцией конечных выпусков, которая описана в § 1 и изучена в главе VI.

4. Если имеются случайные невоспроизводимые ингредиенты, то применение моделей с коррекцией конечных выпусков нецелесообразно, поскольку приводит к жесткой постановке. В этом случае необходимо использовать модели с коррекцией валовых выпусков, которые конструируются следующим образом. В плановом промежутке выделяются два периода. Величина первого периода выбирается таким образом, чтобы ошибки прогноза удельных затрат невоспроизводимых ресурсов были незначительны, т. е. без существенной потери точности невоспроизводимые ресурсы можно было бы предполагать детерминированными. Отсюда план-программа в моделях с коррекцией валовых выпусков выбирается из множества, высекаемого детерминированными ограничениями. Коррекционные способы в данных моделях — это реальные производственные способы. Таким образом модель с коррекцией валовых выпусков свободна от недостатков моделей с аварийной коррекцией (необходимость определения штрафов) и от недостатков жесткой постановки, поскольку имеется возможность довольно широкого маневра после реализации состояния природы, так как план производства на втором этапе выбирается как функция от случайных параметров.

Способ построения двухэтапной модели с коррекцией валовых выпусков показывает в то же время ограниченные возможности конструирования двухэтапных моделей без аварийных технологических способов. Действительно, при выборе длины первого планового промежутка необходимо учитывать два противоречивых требования: 1) длина первого промежутка должна быть достаточно малой, чтобы ошибки при прогнозировании удельных затрат невоспроизводимых ингредиентов были минимальными; 2) в конце первого промежутка должны наблюдаться удельные нормативы выпуска и затрат воспроизводимых ингредиентов. Иными словами, если τ_1 — момент времени, до которого достаточно точно известны удельные затраты невоспроизводимых ингредиентов, τ_2 — момент наблюдения удельных затрат и выпусков невоспроизводимых ингредиентов, то для осмысленной постановки модели с коррекцией валовых выпусков требуется, чтобы выполнялось соотношение $\tau_1 \geqslant \tau_2$, что может не выполняться. В общем случае построить модель без жесткостей и без аварийных технологических способов можно, лишь используя многоэтапное стохастическое программирование.

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ I

1. Пусть имеются две двухэтапные задачи, ограничения одной из которых выполняются с вероятностью 1, а другой — для всех состояний природы $\theta \in \Theta$. Нетрудно проверить эквивалентность двух постановок в случае, если множества

$$K = \{x\text{: существует } y(\theta) \text{ такое, что для } \theta \in \Theta$$
$$A(\theta)x + D(\theta)y(\theta) + b(\theta) \geqslant 0\},$$
$$K' = \{x\text{: существует } y(\theta) \text{ такое, что}$$
$$A(\theta)x + D(\theta)y(\theta) + b(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathrm{P}}\}$$

совпадают. Эти множества называются *множествами индуцированных ограничений*. Эквивалентность постановок понимается в данном случае как совпадение множеств оптимальных планов-программ.

2. Рассмотрим простейшую стохастическую модель сельскохозяйственного производства (см. Л. В. Канторович, А. Б. Горстко).

Имеются две культуры с урожайностями a_1 ц/га и a_2 ц/га и ценами c_1 руб/ц и c_2 руб/ц. Под эти культуры можно использовать орошаемое поле площадью S га. Для нормального развития культур необходимо, чтобы за сезон в почву попадало соответственно b_1 м^3/га и b_2 м^3/га воды. Эта вода попадает в почву благодаря орошению, а также в результате осадков. Если лето влажное, а такое бывает с вероятностью p, то выпадает d_1 м^3/га осадков, если лето сухое (с вероятностью $1-p$) — d_2 м^3/га. Цена воды составляет α руб/м^3. Необходимо составить такой план посевов и такой план распределения воды, чтобы максимизировать математическое ожидание прибыли с учетом затрат на орошение при условии, что каждая культура должна получать минимально необходимое количество влаги.

Пусть x—площадь, отводимая под первую культуру, z—под вторую; y_i^1, y_i^2 — количества воды, необходимые для орошения гектара i-й культуры в случае, если лето влажное и сухое соответственно. Задача состоит в выборе таких переменных x, z, y_1^1, y_2^1, y_1^2, y_2^2, чтобы имели место соотношения:

$$c_1a_1x + c_2a_2z - p(xy_1^1\alpha + zy_2^1\alpha) -$$
$$- (1-p)(xy_1^2\alpha + zy_2^2\alpha) \to \max,$$

т. е. максимизируется математическое ожидание прибыли;

$$x + z \leqslant S$$

(ограничение по площади);

$$d_1 + y_1^1 \geqslant b_1, \quad d_2 + y_1^2 \geqslant b_1,$$
$$d_1 + y_2^1 \geqslant b_2, \quad d_2 + y_2^2 \geqslant b_2,$$

т. е. в любом случае каждая культура должна получать необходимое количество воды;

$$x,\ z,\ y_1^1,\ y_1^2,\ y_2^1,\ y_2^2 \geqslant 0,$$

т. е. переменные были бы нетрицательными.

Эта модель является двухэтапной стохастической моделью с конечным числом состояний природы. Ее можно назвать *моделью получения гарантированных урожаев* при случайных затратах на орошение. Модель нетрудно обобщить на случай произвольного вероятностного распределения осадков, а также построить модель получения гарантированных урожаев при случайных затратах на уничтожение сельскохозяйственных вредителей.

3. **Модель принятия напряженных планов в условиях неопределенности.** Л. Х. Соколовским рассматривалась следующая задача. Материальное поощрение предприятия обычно строится на сопоставлении двух векторов — плана x и его фактического выполнения $z(\theta)$. Фактическое выполнение плана зависит от θ — величин ресурсов, конъюнктуры, погодных условий, которые известны с точностью до вероятностного распределения. Известна функция поощрения $f(x, z(\theta))$. Необходимо выбрать такой план, чтобы максимизировать математическое ожидание функции поощрения

$$F(x) = \mathsf{M} f(x, z(\theta)).$$

4. Важный результат из теории принятия решений (Р. Д. Льюс и Х. Райфа) заключается в следующем. Если отношение предпочтения при принятии решения удовлетворяет некоторым довольно естественным аксиомам, то существует функция полезности (единственная с точностью до линейного преобразования), индуцируемая этим отношением предпочтения, и эта функция полезности имеет вид математического ожидания полезностей для разных состояний природы по субъективно-вероятностному распределению. Субъективно-вероятностная мера удовлетворяет аксиоматике А. Н. Колмогорова.

Этот результат является обоснованием критерия оптимальности для задач стохастического программирования вида максимума математического ожидания критериального ингредиента.

5. Основным источником случайности исходной информации в моделях сельскохозяйственного производства является случайность показателей урожайности различных культур на различных участках (как правило, неорошаемых). Рассмотрим простую модель распределения посевных площадей с учетом случайности урожайности культур.

Обозначения: n — количество культур; m — количество участков земли различного вида; S_i — площадь участков земли i-го вида; $a_{ij}(\theta)$ — урожайность на i-м участке j-й культуры (случайная величина с известным законом распределения); α_j — удельный вес j-й культуры в общем производстве рассматриваемой сельскохозяйственной продукции; x_{ij} — площадь, занимаемая под j-ю культуру на i-м участке.

Необходимо выбрать такой план распределения посевных площадей, чтобы выполнялись ограничения по площадям для земельных участков каждого вида и максимизировалось математическое ожидание количества комплектов сельскохозяйственной продукции в заданных пропорциях. Математическая запись модели такова:

$$M\left(\min_j \frac{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}(\theta)\, x_{ij}}{\alpha_j}\right) \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant S_i \qquad (i = \overline{1, m});$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad (i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}).$$

Эта модель является стохастическим аналогом детерминированной модели распределения посевных площадей, описанной Л. В. Канторовичем и А. Б. Горстко.

6. В работе Н. П. Матряшина сформулирована модель определения оптимального плана перевозок сахарной свеклы между свеклопунктами и сахарными заводами, с учетом того, что объем свеклы на свеклопункте является случайной величиной в силу случайности урожайности сахарной свеклы.

Содержательно модель состоит в определении такого плана перевозок со свеклопунктов на сахарные заводы, чтобы удовлетворялись потребности каждого завода и минимизировалось математическое ожидание затрат с учетом штрафов за невывезенную свеклу из каждого свеклопункта.

Пусть n — количество свеклопунктов; m — количество заводов; A_j — потребность j-го завода в сахарной свекле; $B_i(\theta)$ — случайный объем свеклы на i-м свеклопункте; c_{ij} — затраты на перевозку единицы объема свеклы из i-го свеклопункта на j-й завод; h_i — штраф за единицу объема невывезенной свеклы; x_{ij} — объем перевозок из i-го пункта на j-й завод; $y_i(\theta)$ — объем невывезенной свеклы из i-го свеклопункта.

Требуется максимизировать

$$\sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} + \mathsf{M}\sum_i h_i y_i(\theta)$$

при ограничениях

$$\sum_i x_{ij} \geqslant A_j \qquad (j = \overline{1, m}),$$

$$\sum_i x_{ij} + y_i(\theta) \geqslant B_i(\theta) \qquad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad y_i(\theta) \geqslant 0 \qquad (i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}).$$

7. В статье А. Н. Зейлигера, А. А. Макарова и Б. Г. Санеева приведены основные подстроечные мероприятия при развитии одной из электроэнергетических систем. В нашей терминологии подстроечные мероприятия — коррекционные технологические способы. Экстренное дополнительное производство электроэнергии после наблюдения состояния природы может быть обеспечено за счет: 1) сооружения газотурбинной станции; 2) строительства линий электропередач между узлами системы; 3) форсирования строительства конденсационных электростанций; 4) изменения мощности действующей конденсационной электростанции.

По всей видимости для многих отраслей можно найти способы дополнительного экстренного производства и сформировать множество коррекционных технологических способов.

8. В статье Ц. Е. Бочваровой сформулирована следующая двухэтапная стохастическая модель сельскохозяйственного производства, в которой учитывается случайный характер ресурсов труда по периодам:

$$(c, x) + \mathsf{M}\sum_{i=1}^{m} (q_i^+ y_i^+(\theta) - q_i^- y_i^-(\theta)) \to \max,$$

$$a_i x + y_i^+(\theta) - y_i^-(\theta) = b_i(\theta) \qquad (i = \overline{1, m}),$$

$$a_i^{(1)} x \leqslant b_i^{(1)} \qquad (i = \overline{m+1, m^1}),$$

$$x \geqslant 0, \quad y_i^+(\theta) \geqslant 0, \quad y_i^-(\theta) \geqslant 0 \qquad (i = \overline{1, m}),$$

где x — вектор интенсивностей видов деятельности сельскохозяйственных предприятий; a_i — вектор норм затрат труда на единицу интенсивности в i-м периоде; $b_i(\theta)$ — наличие трудовых ресурсов в i-м периоде (случайная величина); q_i^-— ущерб, связанный с нехваткой одного человеко-дня в i-м периоде; q_i^+— прибыль от одного человеко-дня в подсобном хозяйстве в i-м периоде; y_i^-— дефицит рабочей силы в i-м периоде; y_i^+— избыток рабочей силы в i-м периоде. Предпоследнее ограничение является ограничением по различным видам ресурсов.

ГЛАВА II

МЕТОДЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В главе I отмечалось, что на практике задачи оперативного стохастического программирования обычно сводятся к задачам перспективного стохастического программирования путем параметризации. В связи с этим, с практической точки зрения наибольший интерес представляет развитие численных методов перспективного стохастического программирования, поэтому в этой главе основное внимание будет уделено задачам перспективного стохастического программирования, хотя формально их легко обобщить на случай абстрактных пространств, а также применить их к общей задаче оперативного стохастического программирования. Детальное рассмотрение затрагиваемых здесь вопросов имеется в монографии Ю. М. Ермольева [2].

§ 1. Общие замечания

1. Прямые и непрямые методы. Рассмотрим задачу перспективного стохастического программирования: найти вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$, максимизирующий

$$F^0(x) = \mathsf{M} f^0(x, \theta) = \int f^0(x, \theta) \mathsf{P}(d\theta), \tag{2.1}$$

при ограничениях

$$F^i(x) = \mathsf{M} f^i(x, \theta) = \int f^i(x, \theta) \mathsf{P}(d\theta) \geqslant 0 \quad (i = \overline{1, m}), \tag{2.2}$$

$$x \in X. \tag{2.3}$$

Если можно найти зависимость $F^\nu(x)$ $(\nu = \overline{0, m})$, то эта задача сводится к обычной задаче нелинейного программирования. В этом случае говорят, что задача стохастического программирования имеет детерминированный эквивалент. В тех случаях, когда зависимости $F^\nu(x)$ можно построить лишь приближенно, говорят о приближенном детерминированном эквиваленте задачи стохастического программирования.

Методы, основанные на поиске точного или приближенного детерминированного эквивалента стохастической задачи с последующим применением обычных методов нелинейного программирования, называются *непрямыми методами* стохастического программирования. Методы, позволяющие решать задачу стохастического программирования на основе значений случайных функций $f^\nu(x, \theta)$, называются *прямыми методами*.

Найти зависимости $F^\nu(x)$ возможно только в редких случаях для определенных законов распределения. Обычно это связано со сложными аналитическими исследованиями, причем приемы, применяемые для одних типов распределений, оказываются неприменимыми для других распределений. Поэтому область применения непрямых методов стохастического программирования весьма узкая. При поиске приближенных зависимостей, как правило, невозможно оценить степень приближения, получаемого в результате решения приближенного детерминированного эквивалента. Например, весьма часто приближенный детерминированный эквивалент получают путем «переброски» знака математического ожидания в (2.1), (2.2) под знак зависимости $f^\nu(x, \theta)$, т. е. осуществляется приближенная аппроксимация

$$\mathsf{M} f^\nu(x, \theta) \sim f^\nu(x, \bar{\theta}), \tag{2.4}$$

где $\bar{\theta} = \mathsf{M}\theta$.

Это — весьма распространенный прием, при помощи которого в настоящее время получается большинство детерминированных моделей оптимального планирования и управления.

В технико-экономическом планировании необходимость аппроксимации (2.4) часто диктуется принятой в настоящее время детерминированной системой технико-экономических показателей, которые, по сути дела, представляют собой некоторые усредненные нормативы и отвечают планированию исходя из средних нормативов.

В некоторых случаях аппроксимация (2.4) может дать приемлемые результаты, например, если разброс случайных параметров модели незначителен и есть определенная устойчивость решения по отношению к разбросу параметров. В других случаях это может привести к противоположным результатам. Например, пусть

$$f^0(x, \theta) = -\theta^2 x + x/2,$$

где $\theta = +1$ или $\theta = -1$ с вероятностью 1/2. Очевидно, что $F^0(x) = -x/2$ и точка максимума этой функции при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ есть $x = -1$. С другой стороны, $f^0(x, \overline{\theta}) = x/2$ и точка максимума есть $x = 1$.

Прямые методы стохастического программирования оперируют только значениями $f^\nu(x, \theta)$, их принципиальные алгоритмы не меняются с изменением закона распределения θ и поэтому позволяют решать различные задачи стохастического программирования.

2. **Общая идея стохастических квазиградиентных методов**. Широкий класс прямых методов стохастического программирования можно построить на основе стохастических квазиградиентных методов. Эти методы позволяют решать детерминированные и стохастические экстремальные задачи с гладкими и негладкими функциями без вычисления точных значений функции цели, функций ограничений и производных этих функций.

Общая идея этих методов такова. Пусть требуется решить экстремальную задачу:

$$F^0(x) \to \max,$$

$$F^i(x) \geqslant 0 \quad (i = \overline{1, m}), \qquad x \in X,$$

где функции $F^\nu(x)$ могут быть такими, как в задаче стохастического программирования (2.1)—(2.3), т. е. возможно, что

$$F^\nu(x) = Mf^\nu(x, \theta).$$

В стохастических квазиградиентных методах последовательность приближений $x^0, x^1, \ldots, x^s, \ldots$ строится без использования точных значений функции $F^\nu(x)$ и их субградиентов (обобщенных градиентов, а в гладком случае — градиентов) $\hat{F}^\nu_x(x)$. Вместо значений $F^\nu(x^s)$ и $\hat{F}^\nu_x(x^s)$, $\nu = \overline{0, m}$, на s-м шаге (итерации) применяются случайные величины $\chi_\nu(s)$ и случайные векторы $\xi^\nu(s)$, являющиеся статистическими оценками, в общем случае смещенными, значений $F^\nu(x^s)$ и

$\hat{F}_x^\nu(x^s)$. Иными словами

$$M(\chi_\nu(s)/x^0, \ldots, x^s) = F^\nu(x^s) + a_\nu(s), \tag{2.5}$$

$$M(\xi^\nu(s)/x^0, \ldots, x^s) = \hat{F}_x^\nu(x^s) + b^\nu(s), \tag{2.6}$$

где $a_\nu(s)$ — случайные величины, $b^\nu(s)$ — случайные векторы, зависящие от предыстории процесса поиска $(x^0, \ldots x^s)$, т. е. измеримые относительно σ-подалгебры $\mathcal{B}_s$, индуцированной величинами $(x^0, \ldots, x^s)$.

Отметим, что в (2.6) через $\hat{F}_x^\nu(x^s)$ обозначен субградиент функции $F^\nu(x)$ в точке x^s. Если, в частности, $F^\nu(x)$ — выпуклая вверх функция, то $\hat{F}_x^\nu(x^s)$ — любой вектор, удовлетворяющий неравенству

$$F^\nu(x) - F^\nu(x^s) \leqslant (\hat{F}_x^\nu(x^s), \ x - x^s). \tag{2.7}$$

Векторы $\xi(s)$ называются *стохастическими квазиградиентами*, а если $b^\nu(s) = 0$, то *стохастическими субградиентами* (градиентами в гладком случае). Таким образом, последовательность приближений $x^0, x^1, \ldots, x^s, \ldots$ оказывается случайной, т. е. значения x^s зависят от элементарного события ω некоторого вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$.

Естественно, если $a_\nu(s)$, $b^\nu(s)$ не удовлетворяют определенным требованиям, то соотношения (2.5), (2.6) выполняются для произвольных $\chi_\nu(s)$, $\xi^\nu(s)$. В стохастических квазиградиентных методах $a_\nu(s)$, $b^\nu(s)$ или в определенном смысле ограничены, например, равномерно с вероятностью 1, или стремятся к 0 (также в определенном смысле при $s \to \infty$). Последнее обычно имеет место в тех случаях, когда метод должен сходиться к точному решению.

3. Детерминированные задачи. Пусть имеется функция $F(x)$, значения которой вычисляются точно, без помех. Покажем, каким образом в данном случае можно построить величины $\chi(s)$ и векторы $\xi(s)$, удовлетворяющие (2.5), (2.6). Очевидно, в данном случае можно принять $\chi(s) = F(x^s)$, и если имеется возможность точно вычислить значение субградиента $\hat{F}_x(x^s)$, то $\xi(s) = \hat{F}_x(x^s)$, т. е. в идеальном случае, когда вычисляются точные значения функций цели и функций ограничений, а также значения их производных, стохастические квазиградиентные методы могут совпадать с обычными, детерминированными процедурами нелинейного программирования.

Приведем ряд более интересных формул вычисления стохастических квазиградиентов, т. е. убедимся в том, что величины $\chi_\nu(s)$ и векторы $\xi^\nu(s)$ легко строятся как в задачах стохастического программирования, так и в обычных детерминированных задачах нелинейного программирования.

Если функция $F(x)$ имеет ограниченные вторые производные, то можно взять

$$\xi(s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{F(x^s + \Delta_s e^j) - F(x^s)}{\Delta_s} e^j = F_x(x^s) + b(s),$$

где $\|b(s)\| \leqslant C \cdot \Delta_s$ (C — константа), e^j — орт j-й оси. Рассмотрим обычную (детерминированную) максиминную задачу, для которой

$$F(x) = \min_{y \in Y} f(x, y).$$

Если $f(x, y)$ — выпуклая вверх по переменным x при каждом $y \in Y$ функция и имеет ограниченные по x вторые производные, то можно взять

$$\xi(s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{f(x^s + \Delta_s e^j, y^s(x^s)) - f(x^s, y(x^s))}{\Delta_s} e^j =$$

$$= \hat{F}_x(x^s) + b(s),$$

где $\|b(s)\| \leqslant C \cdot \Delta_s$ (C — константа). При этом не требуется вычисления производных.

Часто в детерминированную задачу бывает полезно искусственно внести случайность и рассматривать стохастические методы поиска решения. Одна из появляющихся при этом возможностей — построить процедуру поиска глобального экстремума. Так, если вычисляется градиент $F_x(x^s)$, то можно рассматривать градиентные методы

$$x^{s+1} = x^s + \rho_s F_x(x^s), \qquad s = 0, 1, \ldots, \tag{2.8}$$

где ρ_s — шаговый множитель.

Однако в том случае, когда $F(x)$ имеет многочисленные мелкие локальные экстремумы, например, как функция на рис. 7, то градиентные методы быстро останавливаются в одном из локальных минимумов или другой стационарной точке. Чтобы иметь возможность «проскакивать» локальные экстремумы, вместо (2.8) рассматриваются процедуры,

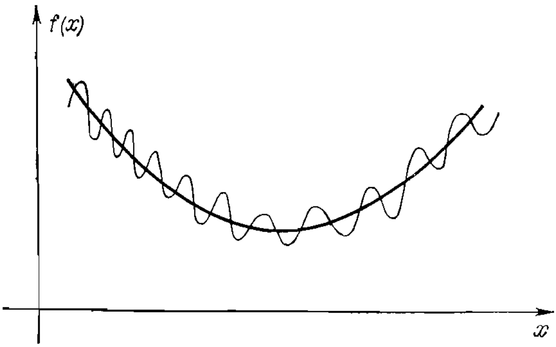

Рис. 7.

имитирующие движение тяжелого шарика по поверхности, задаваемой $F(x)$. Для этого используются вторые производные $F(x)$ и процедура поиска существенно усложняется. Наиболее простой способ придать процедуре (2.8) глобальный характер, связан с введением случайной помехи $h^s = (h_1^s, \ldots, h_n^s)$, $\mathsf{M}h^s = 0$ в направлении поиска, т. е. вместо (2.8) рассматривать процессы вида

$$x^{s+1} = x^s + \rho_s (F_x(x^s) + h^s), \qquad s = 0, 1, \ldots \tag{2.9}$$

Случайная составляющая h^s дает возможность продолжить движение в тех случаях, когда $F_x(x^s) = 0$. Вектор

$$\xi(s) = F_x(x) + h^s$$

удовлетворяет основному соотношению (2.6). В процедурах типа (2.8) величины ρ_s чаще всего выбираются из условия вида $\rho_s \to +0$, $\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty$. Заметим, что (2.9) — не едииственный способ искусственного введения стохастики в процедуру поиска. Так, можно рассматривать процедуру

$$x^{s+1} = x^s + \rho_s F_x(x^s - h^s), \qquad s = 0, 1, \ldots, \qquad (2.10)$$

где h^s — случайная помеха (вектор), стремящийся к 0 при $s \to \infty$. Как и (2.9), она имеет свойство глобальности (возможность «проскакивать» локальные экстремумы). В дальнейшем будет показано, что вектор $\xi(s) = F_x(x^s + h^s)$ является стохастическим градиентом некоторой «сглаженной» функции и что процедуры, подобные (2.10), в которых $F_x(x^s + h^s)$ заменен конечно-разностной аппроксимацией, применимы для максимизации негладких и разрывных функций.

Случайные направления часто применяются при решении сложных экстремальных задач большой размерности. Так, если $F(x)$ имеет значительное число переменных, то для реализации (2.8) требуется предварительно составить большое число подпрограмм для вычисления частных производных. Применение вместо (2.8) процедуры

$$x^{s+1} = x^s + \rho_s \sum_{j=1}^{n} \frac{F(x^s + \Delta_s e^j) - F(x^s)}{\Delta_s} e^j, \quad s = 0, 1, \ldots \qquad (2.11)$$

требует только подпрограммы вычисления функций. Однако, поскольку значение функции должно быть вычислено в $(n+1)$-й точке, то при больших затратах времени на вычисление в одной точке этот метод также может оказаться практически нереализуемым. Рассмотрим вместо (2.11) следующую стохастическую процедуру:

$$x^{s+1} = x^s + \rho_s \sum_{l=1}^{r_s} \frac{F(x^s + \Delta_s h^{sl}) - F(x^s)}{\Delta_s} h^{sl}, \quad s = 0, 1, \ldots, \qquad (2.12)$$

где $\{h^{sl}\}_{l=\overline{1,r_s}} = h(s)$ — серия независимых по s наблюдений случайного вектора $h = (h_1, \ldots, h_n)$ с независимыми и равномерно распределенными на $[-1, 1]$ компонентами, $r_s \geqslant 1$.

Для реализации (2.12) независимо от размерности требуется вычисление функции в r_s+1 точках, в частности, если $r_s = 1$, то реализация (2.12) независимо от размерности задачи требует вычисления функции только в двух точках. Если вторые производные ограничены в допустимой области, то для вектора

$$\xi(s) = \frac{3}{2r_s}\sum_{l=1}^{r_s} \frac{F(x^s + \Delta_s h^{sl}) - F(x^s)}{\Delta_s} h^{sl} \tag{2.13}$$

имеем

$$M(\xi(s)/x^s) = M(M(\xi(s)/x^s, h(s))) =$$
$$= \frac{3}{2r_s} M \sum_{l=1}^{r_s} (F_x(x^s), h^{sl}) h^{sl} + b(s),$$

где $\|b(s)\| \leqslant C\cdot\Delta_s$ (C — константа) в допустимой области. Для j-й компоненты вектора $\xi(s)$ имеем

$$M(\xi_j(s)/x^s) = \frac{3}{2r_s}\sum_{l=1}^{r_s}\left(\sum_{k=1}^{n} F_{x_k}(x^s) h_k^{sl}\right) h_j^{sl} + b_j(s) =$$
$$= F_{x_j}(x^s) + b_j(s),$$

так как $M h_k^{sl} h_j^{sl} = 0$, при $k \neq j$ и

$$M(h_k^{sl})^2 = \int h^2 dh = \frac{2}{3}.$$

Таким образом,

$$M(\xi(s)/x^s) = F_x(x^s) + b(s),$$

где $\|b(s)\| \leqslant C\cdot\Delta_s$ (C — константа).

Для обычных детерминированных максиминных задач с функционалом

$$F(x) = \min_{y\in Y} f(x, y) = f(x, y(x)),$$

имеющим равномерно (по $y \in Y$) ограниченные вторые производные по x (в допустимой области), для вектора

$$\xi(s) = \frac{3}{2r_s}\sum_{l=1}^{r_s} \frac{f(x^s + \Delta_s h^{sl}, y(x^s)) - f(x^s, y(x^s))}{\Delta_s} h^{sl}$$

получаем

$$\mathsf{M}(\xi(s)/x^s) = \hat{F}_x(x^s) + b(s),$$

где $\|b(s)\| \leqslant C \cdot \Delta_s$ (C — константа) в допустимой области.

Особенно плодотворным, если не единственно возможным, кажется применение случайных направлений в общих задачах недифференцируемой и разрывной оптимизации. Как уже отмечалось, негладкий и даже разрывной характер функции цели и ограничений — типичная ситуация для стохастического программирования.

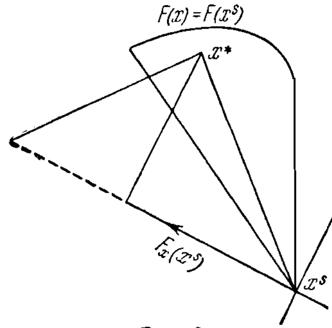

Рис. 8.

Если функция $F(x)$ не имеет непрерывных производных, но имеется возможность вычислить ее точные значения в любой точке, то самый простой способ максимизации $F(x)$ состоит в следующем. В точке x^s случайным образом выбирается некоторое направление. Если в этом направлении функция не возрастает, то выбирается новое случайное направление и т. д. до тех пор, пока не получим направление, в котором функция возрастает. Затем в данном направлении делается шаг в точку x^{s+1} и т. д.

Недостаток этого метода в том, что требуются точные значения функции цели. Кроме того, движение происходит только в направлении возрастания $F(x)$, т. е. это — релаксационный метод. Как показывает рис. 8, в недифференцируемом случае можно применять направления, не являющиеся направлением возрастания. Если $F(x)$ выпуклая вверх функция, то в направлении обобщенного градиента убывает расстояние (при подходящем шаге) до экстремума и это можно использовать при поиске экстремума. Это следует из того, что при любом x^s и x^*, являющемся точкой экстремума,

$$0 \geqslant F(x^s) - F(x^*) \geqslant (\hat{F}_x(x^s), x^s - x^*),$$

т. е.

$$(\hat{F}_x(x^s), x^s - x^*) \leqslant 0.$$

В работе А. М. Гупала для решения задач с недифференцируемыми и даже разрывными функциями применяется следующий прием. Пусть $F(x)$ — выпуклая вверх, но не имеющая непрерывных производных функция. В этом случае метод, определяемый соотношениями (2.11), не сходится к решению (точке максимума). Однако, его можно «подправить», рассмотрев процедуру вида

$$x^{s+1} = x^s + \rho_s \sum_{j=1}^{n} \frac{F(\tilde{x}^s + \Delta_s e^j) - F(\tilde{x}^s)}{\Delta_s} e^j, \qquad s = 0, 1, \ldots, \tag{2.14}$$

где $\tilde{x}^s$ — точка, случайным образом выбранная в окрестности точки x^s (размеры окрестности стремятся к 0 при $s \to \infty$ определенным образом, согласованным со стремлением к 0 ρ_s, Δ_s). Такая процедура уже позволяет отыскать решение даже разрывных задач. При этом не обязательно требуется точное значение функции $F(x)$. Более детально это обсуждается в следующем параграфе. Здесь только отметим, что вектор

$$\xi(s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{F(\tilde{x}^s + \Delta_s e^j) - F(\tilde{x}^s)}{\Delta_s} e^j$$

можно представить как

$$\xi(s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{F(x^s - h^s + \Delta_s e^j) - F(x^s + h^s)}{\Delta_s} e^j,$$

где h^s — случайная помеха, стремящаяся к 0 при $s \to \infty$, т. е. как конечно-разностную аппроксимацию направления спуска процедуры (2.10). При этом условное математическое ожидание $\mathsf{M}(\xi(s)|x^s)$ является конечно-разностной аппроксимацией градиента свертки

$$F(x, s) = \int F(x - h)\, dH_s(h) \tag{2.15}$$

в точке x^s, где $H_s(h)$ — функция распределения h_s, т. е.

$$\mathsf{M}(\xi(s)/x^s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{F^s(x + \Delta_s e^j) - F(x^s)}{\Delta_s} e^j.$$

Функцию распределения $H_s(h)$ можно выбрать так, чтобы $F^s(x)$ оказалась непрерывно дифференцируемой функцией, удовлетворяющей локальному условию Липшица, и $F^s(x) \to F(x)$ равномерно в любой ограниченной области при $s \to \infty$. Это, наряду с условиями $\rho_s \to +0$, $\sum \rho_s = \infty$, дает возможность утверждать о сходимости процедуры (2.13), т. е. последовательности $\{x^s\}$, определенной согласно (2.13), к решениям задачи $F(x) \to \max$.

4. Стохастические задачи. Рассмотрим функцию вида

$$F(x) = \mathsf{M} f(x, \theta),$$

встречающуюся в задачах стохастического программирования, и покажем, каким образом в данном случае строятся величины $\chi(s)$, $\xi(s)$, удовлетворяющие (2.5)—(2.6).

Пусть $\theta^0, \theta^1, \ldots, \theta^s, \ldots$ — результаты независимых испытаний над θ. Тогда можно взять

$$\chi(s) = f(x^s, \theta^s).$$

Имеем

$$\mathsf{M}(\chi(s)/x^s) = F(x^s).$$

Если при каждом θ значение $f(x, \theta)$ вычисляется с ошибкой, то появляется смещение $a(s)$. Если $F(x)$ в допустимой области имеет ограниченные вторые производные, то можно взять

$$\xi(s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{f(x^s + \Delta_s e^j, \theta^{sj}) - f(x^s, \theta^{s_0})}{\Delta_s} e^j,$$

где θ^{sl}, $l = \overline{0, n}$ результаты зависимых или независимых по l наблюдений, в частности, можно принять $\theta^{s0} = \theta^{s1} = \ldots = \theta^{sn}$. По $s = 0, 1, \ldots$ серии испытаний независимы. Имеем

$$\mathsf{M}(\xi^\nu(s)/x^s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{F^\nu(x^s + \Delta_s e^j) - F^\nu(x^s)}{\Delta_s} e^j =$$

$$= F_x^\nu(x^s) + b^\nu(s),$$

где $\| b^\nu(s) \| \leqslant C \cdot \Delta_s$ (C — константа). Направления поиска указанного вида используются в известных методах стохастической аппроксимации. Если $f(x, \theta)$ непрерывно дифференцируема при каждом θ и выполнены необходимые требования дифференцируемости для представления $F_x(x) = \mathsf{M} f_x(x, \theta)$, то можно взять

$$\xi^s = f_x(x^s, \theta^s).$$

В связи с процедурами (2.12) обсуждалась возможность применения случайных направлений поиска в задачах нелинейного программирования большой размерности. Аналогичное рассуждение справедливо и в стохастических задачах. Подобно (2.13) можно рассмотреть

$$\xi(s) = \frac{3}{2r_s} \sum_{l=1}^{r_s} \frac{f(x^s + \Delta_s h^{sl}, \theta^{sl}) - f(x^s, \theta^{s0})}{\Delta_s} h^{sl}, \tag{2.16}$$

где $r_s \geqslant 1$. При этом

$$\mathsf{M}(\xi(s)/x^s) = \mathsf{M}\mathsf{M}(\xi(s)/x^s, h^s) =$$
$$= \frac{3}{2r_s} \mathsf{M} \sum_{l=1}^{r_s} (F_x(x^s), h^{sl}) h^{sl} + b(s) = F_x(x^s) + b(s),$$

где $\| b(s) \| \leqslant C \cdot \Delta_s$ (C — константа), если $F(x)$ имеет ограниченные вторые производные (как правило, для стохастических квазиградиентных методов достаточно, чтобы вторые производные были ограничены на некотором множестве, содержащем допустимую область).

Рассмотрим теперь задачу, которая является обобщением рассмотренной в главе I задачи двухэтапного стохастического программирования. Пусть план $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и его коррекция $y = (y_1, \ldots, y_r)$ вместо линейных ограничений (1.12) удовлетворяют с вероятностью 1 ограничениям

$$\begin{gathered} f^i(x, y, \theta) \geqslant 0 \qquad (i = \overline{1, m}), \\ x \in X, \quad y \in Y, \end{gathered} \tag{2.17}$$

а эффект, связанный с реализацией плана x и его коррекцией y, равен

$$f^0(x, y, \theta). \tag{2.18}$$

Обозначим через $y(x, \theta)$ коррекцию, которая максимизирует (2.18) при ограничениях (2.17) для данных x и θ. Тогда ожидаемый эффект от реализации плана x и его коррекции $y(x, \theta)$ есть

$$F(x) = \mathsf{M} f^0(x, y(x, \theta), \theta). \tag{2.19}$$

Задача состоит в том, чтобы выбрать $x \in X$, максимизирующее (2.19).

Предположим, что функции $f^\nu(x, y, \theta)$ при каждом θ выпуклы вверх и непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных (x, y) и при всех $y \in Y$, $\theta \in \Theta$ существует седловая точка $(y(x, \theta), u(x, \theta))$ функции Лагранжа задачи второго этапа:

$$\varphi(y, u) = f^0(x, y, \theta) + \sum_{i=1}^{n} u_i f^i(x, y, \theta), \quad y \in Y, \quad u \geqslant 0.$$

Например, ограничения (2.17) удовлетворяют обычным условиям регулярности по y при каждом $x \in X$, $\theta \in \Theta$. Обозначим через $\hat{f}_{xy}(x, y, \theta)$ обобщенный градиент функции $f(x, y, \theta)$ по совокупности переменных (x, y) при фиксированном θ, причем пусть этот вектор представим как $\hat{f}_{xy} = (\hat{f}_x, \hat{f}_y)$, где $\hat{f}_x$, $\hat{f}_y$ — обобщенные градиенты функции $f(x, y, \theta)$ по переменным x, y. Тогда, если положить

$$\xi(s) = \hat{f}^0_x(x^s, y(x^s, \theta^s), \theta^s) + \\ + \sum_{i=1}^{m} u_i(x^s, \theta^s) \hat{f}^i_x(x^s, y(x^s, \theta^s), \theta^s),$$

где $\theta^0, \ldots, \theta^s, \ldots$ — результаты независимых испытаний над θ, то (см. Ю. М. Ермольев [2] стр. 143) имеем

$$\mathsf{M}(\xi(s)/x^s) = \hat{F}_x(x^s),$$

где $\hat{F}_x(x^s)$ — обобщенный градиент функции (2.19). В частности, если

$$f^0(x, y, \theta) = (a, x) + (d(\theta), y),$$

$$f^i(x, y, \theta) = (a^i(\theta), x) + (d^i(\theta), y) + b_i(\theta),$$

т. е. имеет место задача (1.23) — (1.24), то

$$\xi(s) = a + A'(\theta^s)\, u(x^s, \theta^s).$$

В задаче выбора оптимального состава машинно-тракторного парка $\xi(s) = \{\xi_{ij}^s(k)\}$,

$$\xi_{ij}^s(k) = -c_{ij}(k) - \varepsilon_s(k)\beta_j - d_i^*(k)\,\lambda\,(b_i(k, \theta^s) -$$

$$-\sum_j w_{ij}(k)\, x_{ij}^s(k)) - d_i^-(k)\,\lambda\left(\sum_j w_{ij}(k)\, x_{ij}^s(k) - b_i(k, \theta^s)\right),$$

где $\varepsilon_s(k) = 1$, если $\sum_j x_{ij}^s(k) = \max_k \sum_j x_{ij}^s(k)$ и $\varepsilon_s(k) = 0$ — в противном случае; $\lambda(z) = 1$, если $z > 0$ и $\lambda(z) = 0$ — в противном случае.

Первая из сформулированных в главе I стохастических моделей межотраслевого баланса является частным случаем стохастической максиминной задачи

$$F(x) = \mathsf{M} \min_{y \in Y} f(x, y, \theta), \quad x \in X \subseteq \mathbf{R}^n. \tag{2.20}$$

Одна из возможных интерпретаций этой задачи связана с планированием в конфликтных ситуациях, когда на выбор решения оказывает влияние множество различных переменных факторов, но плановому органу (первому игроку), принимающему решение, невозможно контролировать их: некоторые факторы имеют случайный характер, а другие находятся в распоряжении лиц (второго игрока), интересы которых противоположны интересам первого игрока. Поэтому функция платы $f(x, y, \theta)$ зависит от трех групп переменных: переменные $x = (x_1, \ldots, x_n)$ контролируются первым игроком (стратегия первого игрока), переменные $y = (y_1, \ldots, y_r)$ контролируются вторым игроком (стратегия второго игрока), θ — состояние природы, элемент вероятностного пространства $(\Theta, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Тогда рассматриваемая задача (модель) соответствует следующей концепции: считается, что какой бы план x ни был выбран первым игроком, второй игрок будет знать выбор x первого игрока и состояние природы θ. Предположим, что при любых y, θ функция $f(x, y, \theta)$ выпукла вверх по переменным x, а $\hat{f}_x(x, y, \theta)$ — обобщенный градиент. Пусть существует такое $y(x, \theta)$, что

$$f(x, y(x, \theta), \theta) = \min_{y \in Y} f(x, y, \theta)$$

и существуют необходимые математические ожидания. Тогда (см. Ю. М. Ермольев [2]), если

$$\xi(s) = \hat{f}_x(x^s, y, \theta^s)\big|_{y=y(x^s, \theta^s)} = \hat{f}_x(x^s, y(x^s, \theta^s), \theta^s), \quad (2.21)$$

где θ^s $(s = 0, 1, \ldots)$ — результаты независимых наблюдений над θ, имеем

$$M(\xi(s)/x^s) = \hat{F}_x(x^s),$$

где $\hat{F}_x(x^s)$ — обобщенный градиент функции (2.20).

Если функция $f(x, y, \theta)$ имеет ограниченные вторые производные в области X, то для

$$\xi(s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\Delta_s}(f(x^s + e^j\Delta_s, y, \theta^{sj}) -$$

$$- f(x^s, y, \theta^s))\, e^j\big|_{y=y(x^s, \theta^s)} \quad (2.22)$$

получим

$$M(\xi(s)/x^s) = \hat{F}_x(x^s) + b^s,$$

где $\| b^s \| \leqslant C\Delta_s$ (C — константа). Аналогичное соотношение (в этом же случае) имеет место для вектора

$$\xi(s) = \frac{3}{2r_s} \sum_{k=1}^{r_s} \frac{1}{\Delta_s}(f(x^s + \Delta_s h^{sk}, y, \theta^{sk}) -$$

$$- f(x^s, y, \theta^{sk}))\, h^{sk}\big|_{y=y(x^s, \theta^s)}, \quad (2.23)$$

где h^{sk}, θ^{sk} имеют тот же смысл, что и в (2.16).

Заметим, что из существования вторых производных по x функции $f(x, y, \theta)$ не следует непрерывная дифференцируемость функции (2.20), поскольку под знаком математического ожидания присутствует операция взятия минимума.

Для стохастической модели межотраслевого баланса, для которой

$$F(x) = \mathsf{M}\left(\min_i \frac{1}{\alpha_i} \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - a_{ij}(\theta)\, x_j)\right),$$

стохастический квазиградиент, в соответствии с (2.21), есть вектор

$$\xi_j(s) = \frac{1}{\alpha_{i_s}} (\delta_{i_s j} - a_{i_s j}(\theta^s)), \qquad j = \overline{1, n},$$

где i_s выбирается из условия

$$\frac{1}{\alpha_{i_s}} \sum_{j=1}^{n} (\delta_{i_s j} - a_{i_s j}(\theta^s))\, x_j^s = \min_i \frac{1}{\alpha_i} \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - a_{ij}(\theta^s))\, x_j^s.$$

Рассмотрим теперь классы функций, которые встречаются в динамических задачах стохастического программирования, например, в задачах управления случайными процессами (см. подробнее Ю. М. Ермольев [2], [3]).

Важный частный класс динамических задач стохастического программирования связан с выбором такого управления (последовательности векторов) $x(k)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, которое максимизирует функцию цели

$$F(x(0), \ldots, x(N-1)) = \mathsf{M}\, f(x(0), \ldots, x(N-1), z(0), \ldots, z(N), \theta), \tag{2.24}$$

где переменные $z(k)$, $x(k)$ связаны соотношениями

$$z(k+1) = A(k, \theta)\, z(k) + B(k, \theta)\, x(k) + c(k, \theta) \quad (k = \overline{0, N-1}), \tag{2.25}$$
$$z(0) = z^0.$$

Заметим, что при этом часто θ представимо в виде $\theta = (\theta(0), \ldots, \theta(N-1))$, а $A(k, \theta)$, $B(k, \theta)$, $c(k, \theta)$ зависят только от $\theta(k)$. В силу этих соотношений переменные $z(k)$ неявно зависят от $x(0), \ldots, x(k-1)$, и для вычисления точного значения функции цели $F(x)$, $x = (x(0), \ldots, x(N-1))$, требуется по крайней мере знать закон распределения $z(k)$ как функцию от $x(0), \ldots, x(k-1)$. Поэтому применение непрямых методов для максимизации функции вида (2.24), или в тех задачах, где функция вида (2.24) присутствует в ограничениях, наталкивается на непреодолимые в практическом отношении трудности.

Пусть функция $f(x, z, \theta)$ выпукла вверх по совокупности переменных (x, z) при каждом θ. Этим условиям удовлетворяет, например, функция вида

$$\max_{0 \leqslant k \leqslant N} ((\alpha(k), x(k)) + (\beta(k), z(k))),$$

частный случай которой имеется в задаче планирования машинно-тракторного парка.

Обозначим субградиент функции $f(x, z, \theta)$ по совокупности переменных $(x, z) = (x(0), \ldots, x(N-1), z(0), \ldots, z(N))$ через $\hat{f}_{(x,z)}(x, z, \theta)$ и пусть $\hat{f}_{x(k)}$, $\hat{f}_{z(k)}$ — компоненты вектора $\hat{f}_{(x,z)}(x(k), z(k), \theta)$ отвечающие переменным $x(k)$, $z(k)$. Наряду с системой (2.25) рассмотрим систему уравнений для сопряженных переменных $\lambda(k)$, $k = N-1, \ldots, 0$:

$$\lambda(k) = A'(k, \theta)\lambda(k+1) + \\ + \hat{f}_{z(k)}(x(0), \ldots, x(N-1), z(0), \ldots, z(N), \theta),$$

$$\lambda(N) = -\hat{f}_{z(N)}(x(0), \ldots, x(N-1), z(0), \ldots, z(N), \theta). \quad (2.26)$$

Пусть имеется точка $x^s = (x^s(0), \ldots, x^s(N-1))$, θ^s — исход независимого испытания над θ. Из (2.25) определяются траектории $z^s(k)$, $k = 0, \ldots, N$, из (2.26) — сопряженные переменные $\lambda^s(k)$, $k = \overline{N, 0}$. Положим

$$\xi(s) = (\xi_1(s), \ldots, \xi_k(s), \ldots, \xi_{N-1}(s)),$$

$$\xi_k(s) = \hat{f}_x(x^s(0), \ldots, x^s(N-1), z^s(0), \ldots, z^s(N), \theta^s) - \\ - B'(k, \theta^s)\lambda^s(k+1). \quad (2.27)$$

Тогда

$$M(\xi(s)/x^s) = \hat{F}_x(x^s),$$

где $\hat{F}_x(x^s)$ — субградиент функции (2.24).

Важный класс стохастических задач оптимального управления встречается в теории управления запасами и связан с оптимальным выбором начального состояния управляемого процесса, т. е. начальное состояние $z(0)$ является дополнительным управляющим параметром. Обозначим $z(0)$ через a. Тогда математическое ожидание (2.24) зависит также от a, т. е. имеем

$$F(a, x(0), \ldots, x(N-1)) = \\ = M f(x(0), \ldots, x(N-1), z(0), \ldots, z(N), \theta).$$

Стохастический квазиградиент этой функции $\xi(s)$ вычисляется по аналогичной (2.27) формуле:

$$\xi_k(s) = \\ =(-\lambda^s(0) + \hat{f}_x(x^s(0), \ldots, x^s(N-1), z^s(0), \ldots z^s(N), \theta^s) - \\ - B'(k, \theta^s))\lambda^s(k+1), \tag{2.28}$$

где $z^s(k)$, $x^s(k)$, $\lambda^s(k)$ удовлетворяют (2.25)—(2.26). В частности, если отсутствуют управления $x(k)$, т. е. неизвестными переменными является начальное состояние управляемого процесса, то

$$\xi(s) = -\lambda^s(0). \tag{2.29}$$

§ 2. Стохастические квазиградиентные методы

Как отмечалось выше, эти методы предназначены для решения экстремальных задач общего вида: максимизировать функцию цели

$$F^0(x)$$

при ограничениях

$$F^i(x) \geqslant 0 \quad (i = \overline{1, m}), \qquad x \in X,$$

где $X \subseteq \mathbf{R}^n$, без вычисления точных значений функции цели, функций ограничений (или) их градиентов $F_x^\nu(x)$ и субградиентов $\hat{F}_x^\nu(x)$, $\nu = \overline{0, m}$. В дальнейшем ограничения $x \in X$ будут рассматриваться как ограничения простого вида, например, на область X можно спроектировать точку, лежащую вне X. Остальные ограничения будут рассматриваться как сложные ограничения, например, функции $F^i(x)$ не имеют аналитических выражений и поэтому невозможно вычислить точные значения их производных, или это невозможно практически сделать в силу большой размерности $\mathbf{R}^n$, или функции $F^i(x)$ имеют вид математических ожиданий и невозможно получить даже точные значения этих функций Будет также подразумеваться, что такой же сложный характер имеет и функция цели $F^0(x)$. Через $\chi_\nu(s)$ и $\xi^\nu(s)$ обозначаются случайные величины и случайные векторы (стохастические квазиградиенты), удовлетворяющие соотношениям (2.5), (2.6).

Допустимую область условимся обозначать через D. Если x^* — некоторое решение задачи, то иногда будем писать $x^* = \arg\max\limits_{x \in D} F^0(x)$. Множество решений X^* будем обозначать еще через $\operatorname{Arg}\max\limits_{x \in D} F^0(x)$. Напомним, что множество X называют выпуклым, если вместе с любыми двумя точками $x^1, x^2 \in X$ этому множеству принадлежит и отрезок, соединяющий x^1, x^2, т. е. $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X$. Многие из тех методов, которые обсуждаются в дальнейшем, применимы для решения экстремальных задач весьма общего вида, хотя строгие теоремы об их сходимости получены только в том случае, когда X — выпуклое множество, а $F^\nu(x)$ — выпуклые вверх (вогнутые) функции, т. е. для них

$$F^\nu(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \geqslant \lambda F^\nu(x^1) + (1-\lambda)F^\nu(x^2).$$

Отметим, что $-F^\nu(x)$—выпуклая вниз (выпуклая) функция, если $F^\nu(x)$ — выпуклая вверх. Условимся также в дальнейшем постоянные величины обозначать через C.

1. Метод проекции стохастических квазиградиентов предназначен для максимизации функции цели при ограничениях $x \in X$ и определяется соотношениями

$$x^{s+1} = \pi_X(x^s + \rho_s\gamma_s\xi^0(s)), \qquad s = 0, 1, \ldots, \tag{2.30}$$

где $\pi_X(\cdot)$ — оператор проектирования точки на множество X, ρ_s — шаговый множитель, γ_s—нормирующий множитель. Проекция $\pi_X(y)$ точки y на X должна удовлетворять соотношениям

$$\pi_X(y) \in X, \quad \|x - \pi_X(y)\|^2 \leqslant \|x - y\|^2$$

для всех $x \in X$. В частности, если X — выпуклое замкнутое множество, то можно положить

$$\pi_X(y) = \arg\min_{x \in X} \| y - x \|^2. \tag{2.31}$$

Таким образом, операция проектирования на X связана с решением подзадачи минимизации квадратичной формы на X, поэтому метод (2.30), вообще говоря, применяется в тех случаях, когда множество X задано линейными уравнениями и неравенствами, т. е. X — выпуклое многогранное множество. В этом случае существуют методы, позволяющие в принципе отыскивать $\pi_X(y)$ за конечное число шагов. При этом даже при большом числе переменных затраты на реализацию операции проектирования оказываются незначительными, если в качестве начального приближения к $\pi_X(x^s - \rho_s\gamma_s\xi^0(s))$ брать точку x^s. Возможны модификации метода (2.31), в которых операция проектирования осуществляется приближенно, например, с помощью бесконечных процедур, обрывающихся через некоторое число итераций, если X задано нелинейными неравенствами. Особенно эффективно $\pi_X(\cdot)$ строится для множеств специального вида. Например, если $X = \{x: \alpha_j \leqslant x_j \leqslant \beta_j,\ j = \overline{1, n}\}$, то j-я компонента $\pi_X(y)$ есть

$$(\pi_X(y))_j = \max\ (\min(\alpha_j, x_j), \beta_j).$$

Если

$$X = \left\{x: \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b,\ \alpha_j \leqslant x_j \leqslant \beta_j, \qquad j = \overline{1, n}\right\},$$

то существуют простые конечные процедуры, реализующие операцию проектирования на X.

Пусть $F^0(x)$ — выпуклая вверх функция, X — выпуклое замкнутое множество. Обозначим через $\varkappa(\cdot)$ характеристическую функцию события $(\cdot)$, т. е. $\varkappa(\cdot) = 1$, если $(\cdot)$ имеет место, и $\varkappa(\cdot) = 0$ — в противном случае. Справедливо следующее утверждение (см. Ю. М. Ермольев [2]).

Теорема 2.1. *Пусть для любого $L > 0$ и некоторого $C_L > 0$*

$$M(\| \xi^0(s) \|^2 / x^0, \ldots, x^s) \leqslant h_s^2(x^0, \ldots, x^s) \leqslant C_L \tag{2.32}$$

при $\|x^k\| \leqslant L$, $k = \overline{0, s}$, *нормирующие множители* γ_s *для каких-либо чисел* d, l *удовлетворяют условию*

$$\gamma_s(\varkappa(\eta_s > d)h^s + \varkappa(\|b^0(s)\| > 0)\|x^s\|) \leqslant l < \infty; \qquad (2.33)$$

величины ρ_s, $b^0(s)$ *могут зависеть от* $(x^0, \ldots, x^s)$ *и таковы, что с вероятностью* 1

$$\rho_s \geqslant 0, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty; \qquad (2.34)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} M(\rho_s\|b^0(s)\| + \rho_s^2) < \infty. \qquad (2.35)$$

Тогда последовательность x^s *с вероятностью* 1 *сходится к элементам множества* $\operatorname{Arg}\max_{x \in X} F^0(x)$.

Отметим, что на практике случайные помехи имеют усеченные законы распределения, т. е. они ограничены. В этом случае в (2.32) для ограниченных множеств X обычно можно выбрать такое d, что $h_s < d$, и отсюда $\gamma_s = C$ (C — константа). Значения ρ_s могут не зависеть от $(x^0, \ldots, x^s)$, часто $\rho_s = C/s$. Если при этом $\xi^0(s)$ выбирается в соответствии с (2.13) или (2.16), (2.22), (2.23), то (2.35) соответствует тому, что

$$\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s\Delta_s < \infty, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s^2 < \infty,$$

т. е. (2.35) предъявляет определенные требования к взаимной регулировке шагового множителя метода ρ_s и множителя «пробного» шага Δ_s; в частности, можно принять $\Delta_s = C \cdot \rho_s$. Если $\xi^0(s) = \hat{F}_x^0(x^s)$, то метод (2.31) превращается в известный метод проекции обобщенных градиентов. В этом случае условия (2.32) являются требованиями ограниченности направлений поиска $\hat{F}_x(x)$ в ограниченных множествах, а условия (2.35) превращаются в требование сходимости ряда $\Sigma\rho_s^2$. Если это требование не выполнено, но множество решений $\operatorname{Arg}\max_{x \in X} F^0(x)$ ограничено, то вместо сходимости последовательности приближений x^s имеет место сходимость последовательности $F^0(x^s)$ к $\max\limits_{x\in X} F^0(x)$; если же $\operatorname{Arg}\max\limits_{x\in X} F^0(x)$ не ограничено, то можно говорить только о сходимости $\max\limits_{k\leqslant s} F^0(x^k)$ к $\max\limits_{x\in X} F^0(x)$. При этом можно выбрать $\gamma_s = C$ или $\gamma_s = 1/\|F_x(x^s)\|$. Если

$$\xi^0(s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{f^0(x^s + \Delta_s e^j, \theta^{s_j}) - f^0(x^s, \theta^{s_0})}{\Delta_s} e^j,$$

$X = R^n$, то метод (2.30) превращается в известный метод стохастической аппроксимации.

Несколько слов о практической реализации метода (2.30). Этот метод — лишь принципиальная схема решения каждой конкретной задачи. «Рабочий алгоритм» может иметь специфику в соответствии с классом решаемых задач. Это относится и к другим, рассматриваемых в дальнейшем методам. Неоднозначность реализации метода (2.30) связана с неоднозначностью выбора $\xi^0(s)$, удовлетворяющего (2.6). Большая свобода имеется в выборе величин ρ_s, δ_s. На практике чаще всего $\gamma_s \leqslant C$, поэтому можно положить $\gamma_s \equiv \equiv C$ (C — константа) или $\gamma_s = 1/\bar{h}_s$.

Процесс (2.30) нерелаксационный, т. е. после каждой итерации значение функции цели не обязательно убывает. Поэтому если даже известны значения $F^0(x^s)$, то все равно большие трудности связаны с выбором ρ_s. Часто можно полагать $\rho_s = c_s/s$, где c_s равномерно ограниченная (сверху и снизу) величина, которой можно распорядиться в процессе вычислений. Заметим, что при этом условия (2.34), (2.35) теоремы выполняются. Лучше всего c_s выбирать в зависимости от поведения каких-либо величин, характеризующих движение согласно (2.30) к решению задачи. Так, если известны значения $F^0(x^s)$, то при правильной организации процесса вычислений поведение функции цели $F^0(x)$ с течением итераций будет носить приблизительно такой же характер, как на рис. 9, т. е. хотя график и имеет колебательный характер, но наблюдается тенденция к возрастанию значения функции. Если рассматривать поведение величин

$$\bar{F}^0(s) = \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{s} F^0(x^k),$$

то оно будет более плавным. Если длина шага, с которым происходит поиск, становится соизмеримой с окрестностью решения, которой принадлежат получаемые приближенные решения, то величины $\bar{F}^0(s)$ перестают существенно меняться. В этом случае следует уменьшить c_s. Изменять

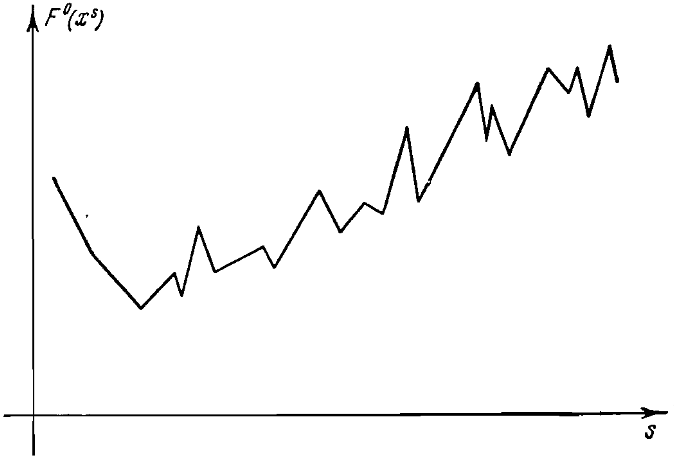

Рис. 9.

таким образом c_s можно автоматически, без вмешательства человека. Однако часто реализация подобных алгоритмов особенно успешно осуществляется в диалоговом режиме работы с ЭВМ, в ходе которого специалист наблюдает поведение величин $\bar{F}^0(s)$, например, с помощью дисплея, и изменяет в зависимости от этого c_s. В задачах стохастического программирования, в которых не имеется возможности вычислять значения $F^0(x^s)$, вместо них можно использовать значения $f^0(x^s, \theta^s)$. Так, на рис. 10 показан типичный график поведения величин $f^0(x^s, \theta^s)$ и $\bar{F}^0(s) = \frac{1}{s}\sum_{1}^{s} f(x^k, \theta^k)$ с числом переменных около 4000 в задаче п. 7 § 1 гл. I. Очевидно, что

$$\bar{F}^0(s+1) = \bar{F}^0(s) + \frac{1}{s+1}(f^0(x^s, \theta^s) - \bar{F}^0(s)),$$

т. е. для вычисления $\overline{F}^0(s)$ не требуется запоминать всю последовательность. Анализ поведения $\overline{F}^0(s)$ — не единственная возможность управления величиной ρ_s. Можно также применять признаки экстремума. Так о приближении x^s к точкам, где $F_x^0(x)=0$, можно судить по поведению величины $\left\|\frac{1}{s}\sum_{k=0}^{s} f_x^0(x^k, \theta^k)\right\|$.

Метод проекции стохастических квазиградиентов (2.30) применим для решения большинства из тех задач, которые рассматриваются в дальнейшем. Проиллюстрируем

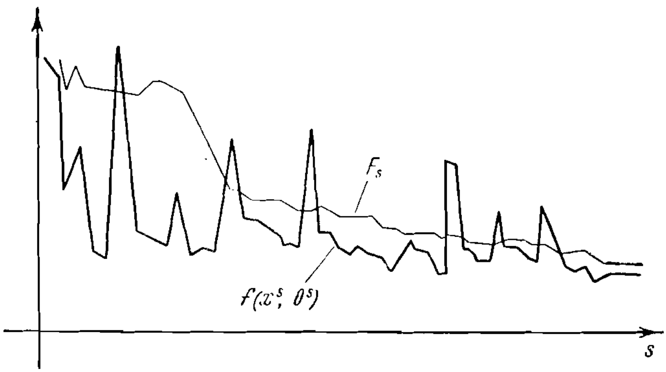

Рис. 10.

например, решение этим методом задачи двухэтапного стохастического программирования (1.23), (1.24). Для этой задачи

$$\xi^0(s) = a + A'(\theta^s)\, u(x^s, \theta^s),$$

а поскольку

$$X = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \colon x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1, n})\},$$

то

$$(\pi_x(y))_j = \max\{0, y_j\}.$$

Тогда итеративный метод состоит в следующем. Пусть x^0 — произвольное начальное приближение, x^s — приближение, полученное после s-й итерации. Делается независимое испытание над θ, в результате которого становится известным θ^s. Определяются $u(x^s, \theta^s)$; для этого достаточно решить задачу, двойственную к задаче выбора оптимальной коррекции $y(x^s, \theta^s)$:

$$(b(\theta^s) + A(\theta^s)x^s, u) \to \min;$$

$$D'(\theta^s)u + d(\theta^s) \leqslant 0, \quad u \geqslant 0.$$

Новое приближение x^{s+1} отыскивается по формуле

$$x^{s+1} = \max\{0, x^s + \rho_s\gamma_s(a + A'(\theta^s)u(x^s, \theta^s))\}, \qquad s = 0, 1, \ldots$$

Если многогранник, высекаемый ограничениями сформулированной выше двойственной задачи, ограничен равномерно по всем $\theta^s \in \Theta$, то $\|u(x^s, \theta^s)\| \leqslant C$ (C — константа). Если, кроме того, равномерно ограничены и элементы матрицы $A(\theta^s)$, то

$$\|\xi^0(s)\| = \|a + A'(\theta^s)u(x^s, \theta^s)\| \leqslant C \quad (C \text{ — константа}).$$

В этом случае можно положить $\gamma_s \equiv C$. Измеримость $u(x^s, \theta^s)$ будет обеспечена, если в случае неоднозначности решения двойственной задачи за $u(x^s, \theta^s)$ брать решение с максимальной первой компонентой. Если после этого остается неоднозначность, выбирать среди оставшихся решения с максимальной второй компонентой и т. д.

2. Стохастический метод линеаризации. Этот метод, как и предыдущий, применим при ограничениях $x \in X$. В методе проекций стохастических квазиградиентов реализация операции проектирования связана с минимизацией квадратичной функции в допустимой области. В стохастическом методе линеаризации эта подзадача заменяется подзадачей максимизации в допустимой области линейной функции. Однако при этом функция цели должна иметь непрерывные производные. В дальнейшем будет показано, что случайные направления поиска позволяют создать аналог метода линеаризации в недифференцируемом случае, однако, пока предположим, что $F^0(x)$ имеет непрерывные производные, X — выпуклое замкнутое множество. Если градиент $F^0_x(x)$ известен, то обычный метод линеаризации состоит в следующем. Пусть x^0 — произвольное начальное приближение, x^s — приближение, полученное после s-й итерации. Решается подзадача максимизации линейной функции

$$(F_x^0(x^s),\ x) \tag{2.36}$$

при ограничениях $x \in X$, и если $\bar{x}^s$ — ее решение, то новое приближение находится с помощью рекуррентной формулы

$$x^{s+1} = x^s + \rho_s(\bar{x}^s - x^s), \qquad s = 0, 1, \ldots, \tag{2.37}$$

где $0 \leqslant \rho_s \leqslant 1$. Поскольку X — выпуклое множество, а

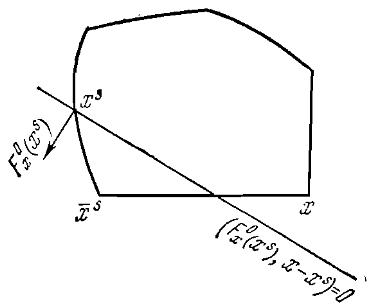

Рис. 11.

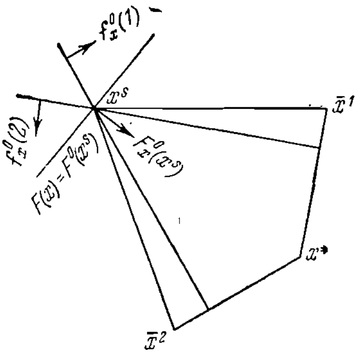

Рис. 12.

$0 \leqslant \rho_s \leqslant 1$, то $x^{s+1} \in X$. В том случае, когда известны значения функции $F^0(x)$, шаг ρ_s выбирается так, чтобы в направлении движения $\bar{x}^s - x^s$ функции возрастала, например, из условия

$$F(x^{s+1}) = \max_{0 \leqslant \rho \leqslant 1} F(x^s + \rho(\bar{x}^s - x^s)).$$

Общая идея этого метода пояснена на рис. 11. Направление градиента $F_x^{\cdot}(x^s)$ выводит из области X, направление же $\bar{x}^s - x^s$ ведет к возрастанию функции цели и при $0 \leqslant \leqslant \rho_s \leqslant 1$ не выводит из X. При замене $F^0(x^s)$ на $\xi^0(s)$ в (2.36) в тех случаях, когда нет значений $F_x(x^s)$, $F(x^s)$, процедура (2.37), вообще говоря, не сходится. Значит, если

$$F^0(x) = \mathsf{M} f^0(x, \theta),$$

и при этом можно записать, что

$$F_x^0(x) = \mathsf{M} f_x^0(x, \theta),$$

то стохастический аналог метода (2.36), (2.37), в котором вместо $F_x^0(x^s)$ применяется $f_x^0(x^s, \theta^s)$, не сходится, несмотря на различные приемы управления шаговыми множителями ρ_s. Это иллюстрируется на рис. 12. Максимизируемая функция $F^0(x)$ — линейная, ее градиент представим как

$$F_x^0(x^s) = p_1 f_x^0(1) + p_2 f_x^0(2),$$

где $f_x^0(1)$ и $f_x^0(2)$ не зависят от x. Множество $\Theta = \{1, 2\}$, $\xi^0(s) = f_x^0(\theta^s)$, где $\theta^s = 1$ или $\theta^s = 2$ с вероятностями p_1, p_2. Точкой максимума $F(x)$ является x^*. Решением подзадач

$$(f_x^0(\theta^s), x)$$

при $\theta^s \in \Theta = \{1, 2\}$ будут точки $\bar{x}^1, \bar{x}^2$, поэтому движение согласно (2.37) при любых ρ_s возможно только по направлению к этим двум точкам и никогда не приведет к x^*. Однако если в (2.36) вместо $F_x^0(x^s)$ рассмотреть вектор

$$\bar{F}_x^0(s) = \frac{1}{s+1} \sum_{k=0}^{s} f_x^0(x^k, \theta^k),$$

который определяется рекуррентно выражением

$$\bar{F}_x^0(s+1) = \bar{F}_x(s) + \frac{1}{s+1}\left(f_x^0(x^{s+1}\,\theta^{s+1}) - \bar{F}_x^0(s)\right),$$

то можно указать способы управления значением ρ_s, при котором такого типа стохастический аналог метода (2.36), (2.37) сойдется к решению.

Итак, пусть $\xi^0(s)$ — стохастический квазиградиент $F^0(x)$, $x^0 \in X$, x^s — приближение, полученное после s-й итерации. Рассмотрим последовательность точек

$$z^{s+1} = z^s + \delta_s(\xi^0(s) - z^s), \qquad s = 0, 1, \ldots, \tag{2.38}$$

где z^0 — произвольная начальная точка. Заметим, что если

$$\xi^0(s) = f_x^0(x^{s+1}, \theta^{s+1}), \quad \delta_s = \frac{1}{s+1},$$

то $z^s = \bar{F}_x(s)$.

Определим последовательность приближений x^s соотношениями

$$x^{s+1} = x^s + \rho_s (\bar{x}^s - x^s), \qquad s = 0, 1, \ldots, \tag{2.39}$$

$$(z^s, \bar{x}^s) = \max_{x \in X} (z^s, x), \tag{2.40}$$

где $x^0 \in X$. Соотношения (2.39), (2.40) аналогичны (2.36), (2.37). Метод (2.38), (2.40) получил название *стохастического метода линеаризации*. Этот метод превращается в (2.36), (2.37) при $\xi^0(s) = F_x(x^{s+1})$, $\delta_s = 1$.

Вместо (2.38) лучше рассматривать соотношения

$$z^{s+1} = \pi_z (z^s + \delta_s (\xi^0(s) - z^s)), \qquad s = 0, 1, \ldots, \tag{2.41}$$

где Z такое выпуклое множество, что

$$Z \supseteq \{F_x(x),\ x \in \operatorname{Arg} \max_{x \in X} F^0(x)\}.$$

Сформулируем один из возможных вариантов сходимости процедуры (2.39), (2.41). Без существенных (с точки зрения практики) ограничений, о чем говорилось в предыдущем пункте, можно предполагать, что множество X ограничено, а также ограничены векторы $\xi^0(s)$, $F_x(x)$, т. е. будем предполагать, что

$$\|\xi^s\| + \|F_x(x^s)\| \leqslant C.$$

Теорема 2.2. *Пусть*

$$\rho_s \geqslant 0, \quad \delta_s \geqslant 0, \quad \rho_s/\delta_s \to 0 \quad \textit{п. н.},$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \delta_s = \infty \quad \textit{п. н.},$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s \|b^s\| < \infty \quad \textit{п.н.}, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \mathsf{M} (\rho_s^2 + \delta_s^2) < \infty.$$

Тогда последовательность $F(x^s)$ сходится п. н. (почти наверное) и каждая предельная точка $\{x^s\}$ принадлежит

$$X^* = \{x^*\colon \max_{x \in X} (F_x(x^*), x - x^*) = 0\}.$$

По поводу величин ρ_s, δ_s при решении конкретных задач можно высказать соображения, аналогичные тем, которые были высказаны в связи с методом проекции стохастических квазиградиентов.

3. Применение операции усреднения. Операция вида (2.38) или вида (2.41) получила название *операции усреднения* и довольно часто применяется в прямых методах стохастического программирования. Например, вместо метода проекции стохастических квазиградиентов можно рассматривать

$$x^{s+1} = \pi_x(x^s + \rho_s z^s), \qquad s = 0, 1, \ldots,$$

$$z^{s+1} = \pi_z(z^s + \delta_s(\xi(s+1) - z^s)), \qquad s = 0, 1, \ldots$$

Применение операции усреднения стабилизирует направление движения, фильтрует «помехи», позволяет иногда получить направление движения вдоль оврага, как это изображено на рис. 13 для обычного градиентного метода. Влияние предыдущих направлений на «усредненное» направление движения в данной итерации регулируется параметрами δ_s и если в некоторые моменты δ_s полагать равным 1, то будет происходить обновление направления поиска. Управление параметрами ρ_s, δ_s лучше всего производить в диалоговом режиме, о чем говорилось в § 1 настоящей главы.

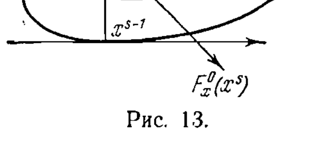

Рис. 13.

4. Стохастический метод штрафов. Рассмотрим теперь общую задачу:

$$F^0(x) \to \max,$$

$$F^i(x) \geqslant 0 \quad (i = \overline{1, m}), \qquad x \in X.$$

В методе штрафных функций ограничения вида $F^i(x) \geqslant 0$ можно исключать из рассмотрения введением в функцию цели дополнительных слагаемых (функций штрафа), принимающих малые значения при нарушении этих ограничений. Например, вместо рассматриваемой задачи изучать задачу —

$$F(x, C) = F^0(x) + C \sum_{i=1}^{m} \min\{0, F^i(x)\} \to \max,$$

или задачу

$$F(x, C) = F^0(x) - C \sum_{i=1}^{m} \min\{0, F^i(x)\} F^i(x) \to \max,$$

где C — достаточно большое число.

Если точных значений $F^i(x)$ нет, то невозможно вычислить $\max\{0, F^i(x)\}$ и непосредственно такой подход теряет смысл. Использование величин $\chi_i(s)$ (см. (2.5)) вместо $F^i(x^s)$ к успеху не приводит. Иными словами, если, например,

$$F^\nu(x) = \mathsf{M} f^\nu(x, \theta), \qquad \nu = \overline{0, m},$$

причем

$$F_x^\nu(x) = \mathsf{M} f_x^\nu(x, \theta),$$

то можно было бы пытаться рассматривать процедуры вида

$$x^{s+1} = \pi_x\left(x^s + \rho_s\left(f_x^0(x^s, \theta^s) + C \sum_{i=1}^{m} \min\{0, f^i(x^s, \theta^s)\} f_x^i(x^s, \theta^s)\right)\right),$$

$$x^{s+1} = \pi_x\left(x^s + \rho_s\left(f_x^0(x^s, \theta^s) - C \sum_{i=1}^{m} \min\{0, f^i(x^s, \theta^s)\} f^i(x^s, \theta^s) f_x^i(x^s, \theta^s)\right)\right),$$

однако, как нетрудно понять, эти процедуры не сходятся. Здесь, как и в стохастическом методе линеаризации, выходом из положения является применение операции усреднения, т. е., если рассмотреть

$$\beta_i^{s+1} = \beta_i^s + \delta_s(f^i(x^s, \theta^s) - \beta_i^s)$$

и процедуры вида

$$x^{s+1} = \pi_x\left(x^s + \rho_s\left(f_x^0(x^s, \theta^s) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + C\sum_{i=1}^{m} \min\{0, \beta_i^s\} f_x^i(x^s, \theta^s)\right)\right), \qquad s = 0, 1, \ldots,$$

$$x^{s+1} = \pi_x\left(x^s + \rho_s\left(f_x^0(x^s, \theta^s) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - C\sum_{i=1}^{m} \min\{0, \beta_i^s\} f^i(x^s, \theta^s) f_x^i(x^s, \theta^s)\right)\right),$$

$$s = 0, 1, \ldots,$$

то при определенном выборе ρ_s, δ_s, как правило, типа

$$\rho_s \geqslant 0, \quad \delta_s \geqslant 0, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty \text{ п. н.},$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \delta_s = \infty \text{ п. н.}, \quad \sum_{s=0}^{\infty} M(\rho_s^2 + \delta_s^2) < \infty,$$

сходимость подобных процедур можно установить (Ю. М. Ермольев [2]). В более общем случае стохастические методы штрафов, получаемые исходя из рассматриваемых штрафных функций, будут иметь вид

$$x^{s+1} = \pi_x\left(x^s + \rho_s\left(\xi^0(s) + C\sum_{i=1}^{n} \min\{0, \beta_i^s\} \xi^i(s)\right)\right),$$

$$s = 0, 1, \ldots$$

или

$$x^{s+1} = \pi_x\left(x^s + \rho_s\left(\xi^0(s) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - C\sum_{i=1}^{n} \min\{0, \beta_i^s\} \chi_i(s)\right) \xi^i(s)\right)\right), \qquad s = 0, 1, \ldots,$$

где

$$\beta_i^{s+1} = \beta_i^s + \delta_s (\chi_i(s) - \beta_i^s), \qquad s = 0, 1, \ldots \tag{2.42}$$

5. Предельные экстремальные задачи. Метод линеаризации в задачах недифференцируемой оптимизации. Предельные экстремальные задачи являются частным случаем так называемых нестационарных задач.

Функция цели, функции ограничений этих задач зависят от некоторых параметров (в частности, от времени), которые могут изменяться в ходе итерационного процесса, причем при $v \to \infty$ эти функции $F^\nu(v, x)$ имеют (в каком-либо смысле) пределы $F^\nu(x)$. Требуется найти решение задачи

$$F^0(x) \to \max, \tag{2.43}$$

$$F^i(x) \geqslant 0 \qquad (i = \overline{1, m}), \tag{2.44}$$

$$x \in X, \tag{2.45}$$

$$F^\nu(x) = \lim_{v \to \infty} F^\nu(x, v), \tag{2.46}$$

не переходя к пределу, т. е. оперируя только функциями $F^\nu(v, x)$. Отметим причины, по которым нецелесообразно или невозможно вначале осуществлять операцию предельного перехода (2.46), найти функции $F^\nu(x)$ $(\nu = \overline{0, m})$, а затем непосредственно решить задачу (2.43) — (2.46).

1) Параметр v отвечает дискретному времени и F (v, x) становится известной только в момент v. В этом случае переход к пределу займет все время, отведенное для решения задачи. Такие ситуации характерны для задач управления, идентификации, оценивания в реальном масштабе времени.

2) Параметр v можно изменять по своему усмотрению, например, «замораживать» на определенных итерациях, однако, операцию предельного перехода технически осуществить сложно. Такие ситуации характерны для задач оптимизации стационарных режимов управления, когда показатель качества имеет вид

$$F^0(x) = \lim_{v \to \infty} F^0(v, x) = \lim_{v \to \infty} \frac{1}{v} \sum_{l=1}^{v} Q(l, x)$$

или

$$F^0(x) = \lim_{v\to\infty} F^0(v, x) = \lim_{v\to\infty} \sum_{l=1}^{v} \alpha^l Q(l, x).$$

3) Операция предельного перехода портит некоторые хорошие свойства функций $F^v(v, x)$, что характерно для задач аппроксимации, когда плохая по каким-либо причинам функция $F^v(x)$ приближается последовательностью хороших $F^v(v, x)$ и поэтому вместо $F^v(x)$ целесообразно иметь дело с функциями $F^v(v, x)$. Это обсуждалось в § 1 настоящей главы в связи с решением негладких задач методами типа (2.14) с функциями (2. 15).

Пусть X^* — множество решений задачи (2.43)—(2.45). Можно ли указать (конструктивно) подпоследовательность индексов v_s и процедуру построения по функциям $f^v(v_s, x)$ приближений x^s такую, чтобы при $s\to\infty$ последовательность x^s сходилась (в каком-либо смысле) к элементам X^*. Пусть ограничения (2.44) отсутствуют, $F^0(v, x)$ — выпуклая вверх функция, X— замкнутое ограниченное множество, а в (2.46) имеет место равномерная сходимость. Обозначим через $\xi^0(s, v)$ стохастический квазиградиент функции $F^0(v, x)$ в точке x^s, т. е.

$$\mathsf{M}(\xi^0(s, v)/x^0, \ldots, x^s) = \hat{F}^0_x(v, x^s) + b(s, v).$$

Рассмотрим метод

$$x^{s+1} = \pi_X(x^s + \rho_s\xi^0(s, v_s)), \qquad s = 0, 1, \ldots \tag{2.47}$$

Теорема 2.3. *Пусть*

$$\|\xi^0(s, v_s)\| + \|\hat{F}^0_x(x, v_s)\| < C,$$

$$\rho_s \geqslant 0, \quad \sum_{s=0}^{\infty}\rho_s = \infty, \quad \sum_{s=0}^{\infty}\rho_s\|b(s, v_s)\| < \infty \ \text{п. н.},$$

$$\sum_{s=0}^{\infty}\mathsf{M}\,\rho_s^2 < \infty.$$

Тогда с вероятностью 1

$$\lim_{s\to\infty} F^0(v_s, x^s) = \max_{x\in X} F^0(x).$$

Заметим, что для выпуклых вверх функций равномерная сходимость легко следует из точечной сходимости при весьма слабых дополнительных предположениях. Остальные условия теоремы практически не отличаются от условий сходимости метода проекций стохастических квазиградиентов. Условия ограниченности $\|\xi^0(s, s)\|$ и $\|\hat{F}_x(x, s)\|$ легко ослабить введением нормирующего множителя.

Отметим также, что метод (2.14) подобен процедуре (2.47). В данном случае допредельные функции имеют вид (2.15). Однако сходимость (2.14) не является следствием теоремы 2.1, поскольку функции (2.15), а также их предел не является выпуклым вверх. Сходимость процедур типа (2.14) детально исследовалась в работах А. М. Гупала, Ю. М. Ермольева.

Поясним идеи доказательства сходимости на аналоге метода линеаризации в недифференцируемом случае. Пусть требуется максимизировать функцию $F^0(x)$ в области X, где $F^0(x)$ удовлетворяет локальному условию Липшица: для любой ограниченной области существует постоянная L такая, что

$$|F^0(z) - F^0(x)| < L\|z - x\|,$$

для любых точек z, x из этой области. Функция $F^0(x)$ почти всюду дифференцируема. Обозначим через $\{\widehat{F}_x(x)\}$ множество обобщенных градиентов, которое можно определить как выпуклую оболочку предельных точек всевозможных последовательностей $\{F_x^0(x^s)\}$, где $\{x^s\}$ — последовательность точек, сходящихся к точке x, в которых существует градиент $F_x^0(x)$. Рассмотрим «усредненную» функцию

$$F^0(x, v_s) = \frac{1}{\alpha_s^n} \int\limits_{x_1-\Delta_s/2}^{x_1+\Delta_s/2} \cdots \int\limits_{x_n-\Delta_s/2}^{x_n+\Delta_s/2} F^0(y)\, dy_1 \ldots dy_n =$$

$$= \mathsf{M} F^0(x + h(s)),$$

где $h(s) = (h_1(s), \ldots, h_n(s))$, а $h_j(s)$ $(j = \overline{1, n})$ — независимые равномерно распределенные на $[-\Delta_s/2, \Delta_s/2]$ случайные величины, $v_s = 1/\Delta_s$. Легко видеть, что последовательность $\{F^0(x, v_s)\}$ при $s \to \infty$ равномерно сходится к $F^0(x)$, причем $F^0(x, v_s)$ имеет непрерывные производные. Частная производная вычисляется по формуле

$$\frac{\partial F^0(x, v_s)}{\partial x_1} = \frac{1}{\alpha_s^n} \int\limits_{x_s-\Delta_s/2}^{x_s+\Delta_s/2} \cdots \int\limits_{x_n-\Delta_s/2}^{x_n+\Delta_s/2} \left(F^0\left(x_1 + \frac{\Delta_s}{2}, y_2, \ldots, y_n\right) - \right.$$

$$\left. - F^0\left(x_1 - \frac{\Delta_s}{2}, y_2, \ldots, y_n\right)\right) dy_2 \ldots dy_n. \quad (2.48)$$

Аналогично вычисляются остальные частные производные. Отсюда следует, что если рассмотреть случайный вектор

$$\xi^0(s, v_s) = \frac{1}{\Delta_s} \sum_{j=1}^{n} \left(F^0\left(\tilde{x}_1^s, \ldots, x_j^s + \frac{\Delta_s}{2}, \ldots, \tilde{x}_n^s\right) - \right.$$

$$\left. - F^0\left(\tilde{x}_1^s, \ldots, x_j^s - \frac{\Delta_s}{2}, \ldots, \tilde{x}_n^s\right)\right) e^j, \quad (2.49)$$

то согласно (2.48) получим

$$M\,(\xi(s, v_s)/x^s) = F_x(x^s, v_s).$$

Рассмотрим стохастический метод

$$x^{s+1} = x^s + \rho_s(\bar{x}^s - x^s), \quad 0 \leqslant \rho_s \leqslant 1, \quad s = 0, 1, \ldots, \quad (2.50)$$

$$(z^s, \bar{x}^s) = \max_{x \in X}(z^s, x), \quad (2.51)$$

$$z^{s+1} = z^s + \delta_s(\xi^0(s, v_s) - z^s), \qquad s = 0, 1, \ldots, \quad (2.52)$$

где $\xi^0(s, v_s)$ вычисляется согласно (2.49). Этот метод, очевидно, аналогичен (2.38)—(2.40), точнее, в нем комбинируются идеи метода (2.38)—(2.40) с идеями решения предельных экстремальных задач.

Т е о р е м а 2.4. *Пусть* ρ_s *зависит только от* s,

$$\rho_s \geqslant 0, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{\rho_s}{\Delta_s}\right)^2 < \infty,$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \delta_s^2 < \infty, \quad \frac{\Delta_s - \Delta_{s+1}}{\Delta_s \rho_s} \to 0, \quad \Delta_s \to 0.$$

Тогда $F^0(x^s) \to \max_{x \in D} F^0(x)$ *с вероятностью* 1.

Метод легко обобщается на случай, когда вместо $F^\nu(x^s)$ применяются $\chi^0(s)$. Кроме того, возможно обобщение на разрывные задачи. Например, если $F^0(x, v_s)$ полунепрерывная, почти всюду дифференцируемая, ограниченная в любой ограниченной области функция, то усреднение $F^0(x, v_s)$, вообще говоря, не имеет непрерывных производных. Однако если еще раз применить аналогичную операцию усреднения, т. е. рассмотреть функцию

$$\overline{F}^0(x, v_s) = \mathsf{M} F^0(x + h^1(s) + h^2(s)),$$

где $h^1(s) = (h_1^1(s), \ldots, h_n^1(s))$, $h^2(s) = (h_1^2(s), \ldots, h_n^2(s))$, а $h_j^1(s)$, $h_k^2(s)$ $(j, k = \overline{1, n})$ — независимые равномерно распределенные на $[-\Delta_s/2, \Delta_s/2]$ случайные величины, то функция $\overline{F}^0(x, v_s)$ окажется непрерывно дифференцируемой. Далее можно рассмотреть аналогичную (2.50) — (2.52) процедуру.

§ 3. Признаки оптимальности в стохастическом программировании

Многие рассматриваемые в дальнейшем проблемы математической экономики требуют изучения признаков оптимальности в стохастическом программировании. С формальной точки зрения задачи стохастического программирования являются задачами нелинейного программирования в n-мерном или абстрактном пространстве, однако, признаки оптимальности, полученные по аналогии с известными результатами математического программирования, требуют уточнений.

1. Пусть имеется задача перспективного стохастического программирования, т. е. пусть требуется найти вектор x, максимизирующий

$$F^0(x) = \mathsf{M} f^0(x, \theta),$$

при ограничениях

$$F^i(x) = \mathsf{M} f^i(x, \theta) \geqslant 0 \quad (i = \overline{1, m}), \qquad x \in X.$$

Формулировка необходимых признаков через функции $F^\nu(x)$, $(\nu = \overline{0, m})$ ничем не отличается от того, как это делается в нелинейном программировании и иногда этого вполне достаточно для определенных качественных выводов. Уточнения могут быть связаны со следующими обстоятельствами. Иногда важнее иметь необходимые признаки в терминах функций $f^\nu(x, \theta)$ $(\nu = \overline{0, m})$, т. е. требуется обосновать переход к дифференцированию под знаком математического ожидания. Например, если требуется максимизировать непрерывно дифференцируемую функцию $F^0(x) = \mathsf{M} f^0(x, \theta)$ без ограничений, то необходимый признак экстремума в терминах $F^0(x)$ есть

$$F_x^0(x) = 0.$$

Важнее бывает представить это условие в виде

$$F_x^0(x) = \mathsf{M} f_x^0(x, \theta) = 0. \tag{2.53}$$

Обоснование возможности такого представления требует порой значительных усилий, особенно для недифференцируемых задач оптимального управления.

Более принципиальные уточнения условий оптимальности могут быть связаны с отсутствием точных значений градиентов или их аналогов функций $F^\nu(x)$. В этом случае признаки оптимальности типа (2.53) непосредственно не позволяют дать ответ на вопрос о том, может ли данный вектор x быть решением задачи. Они могут рассматриваться только как некоторая статистическая гипотеза, которая требует проверки. Например, ответ на вопрос о том, удовлетворяет ли заданный x уравнениям (2.53), связан с проверкой статистической гипотезы о том, равно ли нулю математическое ожидание величин $f_{x_j}^\nu(x, \theta)$. Поэтому иногда разумно дополнить признаки экстремума процедурами проверки статистических гипотез и в качестве решений задач стохастического программирования принимать векторы, для которых гипотеза оказывается верной. Такой подход для некоторых частных задач стохастического программирования рассмотрен в монографии Ю. М. Ермольева [2] глава V, § 6. Он требует развития специфических численных методов.

2. Аналогичные замечания справедливы и относительно задач оперативного стохастического программирования вида: максимизировать

$$F^0(x(\theta)) = \mathsf{M} f^0(x(\theta), \theta),$$

при ограничениях

$$F^i(x(\theta)) = \mathsf{M} f^i(x(\theta), \theta) \geqslant 0 \qquad (i = \overline{1, m}),$$
$$x(\theta) \in X(\theta).$$

Кроме того, уточнения известных признаков оптимальности в данном случае связаны с тем, что функция $x(\theta)$ должна быть измеримой относительно некоторой σ-подалгебры $\mathfrak{M}$ σ-алгебры событий $\mathcal{F}$ основного вероятного пространства $(\Theta, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Легко показать (см. Ю. М. Ермольев [2]), что требование $\mathfrak{M}$-измеримости приводит к тому, что искомая функция $x(\theta)$ должна удовлетворять соотношениям вида

$$\sum_{\nu=0}^{m} \lambda_\nu \mathsf{M}\,(f_v^\nu(x(\theta), \theta)/\mathfrak{M}) \geqslant 0,$$

$$\lambda_i \mathsf{M} f^i\,(x(\theta), \theta) = 0 \qquad (i = \overline{1, m}),$$

где λ_i — множители Лагранжа, $f_v^\nu(x, \theta)$ — производная функции $f^\nu(x, \theta)$ при данном θ по произвольному направлению $v = (v_1, \ldots, v_n)$. Качественный анализ рассматриваемых в следующих главах моделей требует формулировки признаков оптимальности в несколько иной форме.

3. Условия оптимальности, формулируемые с помощью субградиентов. Рассмотрим несколько более общую задачу. Необходимо найти такие $\mathfrak{M}_t$-измеримые вектор-функции $x_t(\theta)$ $(t = \overline{0, N})$, чтобы

$$\mathsf{M} f^0\,(x(\theta), \theta) \to \max, \tag{2.54}$$

$$\mathsf{M}\,(f^i\,(x(\theta), \theta)/\mathfrak{C}_i) \geqslant 0\,(\mathrm{mod}\,\mathsf{P}) \qquad (i = \overline{1, m}), \tag{2.55}$$

$$x(\theta) \in \Sigma, \tag{2.56}$$

где $x(\theta) = (x_0(\theta), x_1(\theta), \ldots, x_N(\theta))$; Σ — класс случайных вектор-функций $x(\theta)$, для которых существуют необходимые математические ожидания; $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_m$ — σ-подалгебры $\mathcal{F}$.

Идея получения условий оптимальности для задачи (2.54) — (2.56), так же как и для задачи предыдущего пункта, состоит в представлении задачи стохастического программирования как задачи оптимизации в абстрактных пространствах, а также в использовании специфического вероятностного характера этой задачи, в частности требования $\mathfrak{M}_t$-измеримости $x_t(\theta)$. Поскольку условия оптимальности задачи (2.54)—(2.56), сформулированные с помощью субградиентов функций f^ν, систематически используются в дальнейшем, остановимся на их выводе более подробно.

Получение условий оптимальности для задачи (2.54)—(2.56) основано на ее рассмотрении как задачи в гильбертовом пространстве с операторными ограничениями (Д. Б. Юдин). Представление (2.54)—(2.56) как задачи в гильбертовом пространстве основано на том, что пространство случайных векторов $\xi(\theta) = (\xi_1(\theta), \ldots, \xi_p(\theta))$ с ограниченными вторыми моментами образует гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\langle \xi(\theta), \eta(\theta) \rangle = \mathsf{M}\,(\xi(\theta), \eta(\theta)) = \mathsf{M}\left(\sum_{i=1}^{p} \xi_i(\theta)\, \eta_i(\theta)\right).$$

Будем обозначать это пространство через $L_2^p(\Theta, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Его можно превратить в нормированное, введя норму соотношением

$$\|\xi(\theta)\| = \sqrt{\mathsf{M}\,|\xi(\theta)|^2} = \sqrt{\mathsf{M}\left(\sum_{i=1}^{p} \xi_i^2(\theta)\right)}.$$

Для формулировки (2.54)—(2.56) как задачи в гильбертовом пространстве с операторными ограничениями понадобятся следующие предположения:

1) существует оптимальное решение (2.54)—(2.56) $x^*(\theta)$, причем для произвольного $x^*(\theta)$

$$\mathsf{M}\,|x^*(\theta)|^2 < \infty;$$

2) для произвольного $x(\theta) \in L_2^n(\Theta, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ существуют все необходимые математические ожидания;

3) $\mathsf{M}\,(\mathsf{M}\,(f^i(x(\theta), \theta)/\mathfrak{C}_i))^2 < \infty \qquad (i = \overline{1, m})$

для произвольного $x(\theta) \in L_2^n(\Theta, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

Для получения достаточных условий предположим, что

4) $f^\nu(x, \theta)$ — п. н. выпуклая вверх по x.

Предположения 1)—4) выполняются для довольно широкого класса задач, в частности, когда $f^\nu(x, \theta)$ — п. н. линейные или кусочно-линейные функции, параметры которых ограничены с вероятностью 1. Предположение 2) позволяет избавиться от ограничения (2.56).

Сформулируем (2.54) — (2.56) как задачу в гильбертовом пространстве с операторными ограничениями: найти такой $x(\theta) \in L_2^n(\Theta, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, чтобы

$$
\begin{gathered}
F^0(x(\theta)) = \mathsf{M} f^0(x(\theta), \theta) \to \max, \\
F^i(x(\theta)) = \mathsf{M}(f^i(x(\theta), \theta)/\mathfrak{C}_i) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}} \qquad (i = \overline{1, m}), \qquad (2.57) \\
x_t(\theta) \in I(\mathfrak{M}_t) \qquad (t = \overline{0, N}),
\end{gathered}
$$

где $I(\mathfrak{M}_t)$ — множество $\mathfrak{M}_t$-измеримых вектор-функций. $F^0(x(\theta))$ выше понимается как функционал на $L_2^n(\Theta, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, $F^i(x(\theta))$ — как оператор $L_2^n(\Theta, \mathcal{F}, \mathsf{P}) \to L_2^1(\Theta, \mathfrak{C}_i, \mathsf{P})$.

В соответствии с результатами исследования соотношений двойственности для задач в абстрактных пространствах с операторными ограничениями (Е. Г. Гольштейн) функционал Лагранжа для (2.57) определяется следующим образом:

$$
\varphi(x(\theta), u(\theta)) = \\
= \mathsf{M} f^0(x(\theta), \theta) + \mathsf{M}\left(\sum_{i=1}^{m} u_i(\theta)\, \mathsf{M}(f^i(x(\theta), \theta)/\mathfrak{C}_i)\right), \qquad (2.58)
$$

где $u_i(\theta) \in L_2^1(\Theta, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, а двойственная задача

$$
\sup_{x(\theta) \in \prod_{t=0}^{N} I(\mathfrak{M}_t)} \varphi(x(\theta), u(\theta)) \xrightarrow[u(\theta) \in \prod_{i=1}^{m} L_2^n(\Theta, \mathfrak{C}_i, \mathsf{P})]{u(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}} \min.
$$

Если предположить, что

5) существует решение данной двойственной задачи,

то можно обосновать теорему о седловой точке к данной задаче. Прежде чем сформулировать соответствующий результат, изучим условия оптимальности задачи

$$F(x(\theta)) \to \max, \tag{2.59}$$

$$x_t(\theta) \in I(\mathfrak{M}_t) \qquad (t = \overline{0,N}), \tag{2.60}$$

где $F(x(\theta))$ — выпуклый вверх функционал на $L_2^n(\Theta, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

Введем понятия субградиента функционала и множества, сопряженного к множеству допустимых направлений (Б. Н. Пшеничный).

Субградиентом в точке $x(\theta)$ функционала $F(x(\theta))$, определенного на $L_2^n(\Theta, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, называется случайный вектор $\hat{F}_x(x(\theta)) \in L_2^n(\Theta, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ такой, что

$$F(y(\theta)) - F(x(\theta)) \leqslant \mathsf{M}(\hat{F}_x(x(\theta)), y(\theta) - x(\theta))$$

для произвольного $y(\theta) \in L_2^n(\Theta, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

Под множеством допустимых направлений $\Gamma(x(\theta))$ в точке $x(\theta)$ понимается множество направлений $e(\theta)$ такое, что $x(\theta)+\gamma e(\theta)$ при малом γ принадлежит допустимой области. Множество, сопряженное к множеству $\Gamma(x(\theta))$, определяется следующим образом:

$$\Gamma^c(x(\theta)) =$$
$$= \{e^*(\theta)\colon\ \mathsf{M}(e(\theta), e^*(\theta)) \geqslant 0 \text{ для всех } e(\theta) \in \Gamma(x(\theta))\}.$$

Поскольку множество, описываемое соотношением (2.60), выпукло (в этом нетрудно убедиться), то можно использовать известный необходимый и достаточный признак оптимальности для задач выпуклого программирования, который состоит в том, что $x^*(\theta)$ является решением задачи в том и только том случае, если

$$\Gamma^c(x^*(\theta)) \cap G(x^*(\theta)) \neq \varnothing, \tag{2.61}$$

где $G(x^*(\theta))$ — множество субградиентов в точке $x^*(\theta)$ функционала $F(x(\theta))$.

Конкретизируем множество $\Gamma^c(x^*(\theta))$ для (2.60):

$$\Gamma^c(x^*(\theta)) = \{e^*(\theta)\colon\ \mathsf{M}(e(\theta), e^*(\theta)) \geqslant 0 \text{ для всех}$$
$$e_t(\theta) \in I(\mathfrak{M}_t) \quad (t = \overline{0,N})\}.$$

Используя известные свойства условных математических ожиданий, преобразуем $\mathsf{M}(e(\theta), e^*(\theta))$:

$$\mathsf{M}(e(\theta), e^*(\theta)) = \sum_{t=0}^{N} \mathsf{M}(e_t(\theta), e_t^*(\theta)) =$$
$$= \sum_{t=0}^{N} \mathsf{M}(\mathsf{M}((e_t(\theta), e_t^*(\theta))/\mathfrak{M}_t)) =$$
$$= \sum_{t=0}^{N} \mathsf{M}(e_t(\theta), \mathsf{M}(e_t^*(\theta)/\mathfrak{M}_t)).$$

Отсюда

$$\Gamma^c(x^*(\theta)) = \{e^*(\theta)\colon \ \mathsf{M}(e_t^*(\theta)/\mathfrak{M}_t) = $$
$$= 0 \ (\mathrm{mod}\, \mathsf{P}) \quad (t = \overline{0, N})\}. \tag{2.62}$$

Таким образом, из (2.61) и (2.62) следует

Лемма 2.1. *Если $F(x(\theta))$ — выпуклый вверх функционал на $L_2^n(\Theta, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, то $x^*(\theta)$, удовлетворяющий* (2.60), *является оптимальным решением задачи* (2.59), (2.60) *тогда и только тогда, когда существует такой субградиент $\widehat{F}_x(x(\theta))$ функционала $F(x(\theta))$ в точке $x^*(\theta)$, что*

$$\mathsf{M}(\widehat{F}_{x_t}(x^*(\theta))/\mathfrak{M}_t) = 0 \ (\mathrm{mod}\, \mathsf{P}) \qquad (t = \overline{0, N}).$$

Для получения содержательных с точки зрения приложений условий оптимальности полезно выразить субградиент функционала $F(x(\theta)) = \mathsf{M} f(x(\theta), \theta)$ через субградиент функции $f(x, \theta)$. Обозначим через $G_F(x(\theta))$ множество субградиентов функционала $F(x(\theta))$, а через $G_f(x, \theta)$ — множество субградиентов функции $f(x, \theta)$ при фиксированном θ. Можно доказать, что если

$$G_f(x(\theta), \theta) \subset L_2^n(\Theta, \mathcal{F}, \mathsf{P}),$$

то

$$G_F(x(\theta)) = G_f(x(\theta), \theta) \ (\mathrm{mod}\, \mathsf{P}) \tag{2.63}$$

Запишем неравенства для седловой точки задачи (2.57):

$$\varphi(x(\theta), u^*(\theta)) \leqslant \varphi(x^*(\theta), u^*(\theta)) \leqslant \varphi(x^*(\theta), u(\theta))$$

для произвольных $x(\theta) \in I(\mathfrak{M}_t)$ и $u(\theta) \in \prod_{i=1}^{m} L_2^1(\Theta, \mathfrak{C}_i, \mathsf{P})$, $u(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}$.

Используя вид функционала $\varphi(x(\theta), u(\theta))$ (2.58) и применяя к левой части лемму 2.1 и (2.63), после несложных преобразований над правой частью, с учетом теоремы о седловой точке, получаем теорему, которая подытоживает наши рассуждения в настоящем пункте.

Теорема 2.5. *Пусть для задачи* (2.57) *выполняются предположения* 1)—5)

$$G_{f^\nu}(x(\theta), \theta) \in L_2^n(\Theta, \mathcal{F}, \mathsf{P}) \text{ для всех } x(\theta) \in L_2^n(\Theta, \mathcal{F}, \mathsf{P})$$

$$(\nu = \overline{0, m}).$$

Вектор $x^*(\theta)$ — *оптимальное решение задачи* (2.57) *в том и только том случае, если существуют такие субградиенты* $\hat{f}_x^\nu$ $(\nu = \overline{0, m})$ *функций* f^ν $(\nu = \overline{0, m})$ *в точке* $x^*(\theta)$ *и такие* $u_i^*(\theta) \in L_2^1(\Theta, \mathfrak{C}_i, \mathsf{P})$, *что*

$$\mathsf{M}\left(\hat{f}_{x_t}^0(x(\theta), \theta) + \sum_{i=1}^{m} u_i^*(\theta) \hat{f}_{x_t}^i(x^*(\theta), \theta)/\mathfrak{M}_t\right) =$$

$$= 0 \pmod{\mathsf{P}} \qquad (t = \overline{0, N});$$

$$u_i^*(\theta)\, \mathsf{M}(f^i(x^*(\theta), \theta)/\mathfrak{C}_i) = 0 \pmod{\mathsf{P}} \qquad (i = \overline{1, m}),$$

$$\mathsf{M}(f^i(x^*(\theta), \theta)/\mathfrak{C}_i) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}} \qquad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_t^*(\theta) \in I(\mathfrak{M}_t) \qquad (t = \overline{0, N}),$$

$$u^*(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}.$$

Из теоремы о седловой точке следует также, что имеет место равенство оптимальных значений функционалов прямой и двойственной задачи, и если $(x^*(\theta), u^*(\theta))$ — седловая точка, то $x^*(\theta)$ — решение прямой, а $u^*(\theta)$ — решение двойственной задачи, и наоборот.

ГЛАВА III

МОДЕЛИ ПЛАНИРОВАНИЯ ЗАПАСОВ, СИНХРОНИЗАЦИИ И РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

Теория планирования запасов составляет важный раздел исследования операций. В терминах «запас», «склад», «рынок», «заказ» формулируются различные прикладные задачи. Например, можно говорить о запасах сырья, полуфабрикатов, средств производства, трудовых ресурсов для обеспечения синхронной (ритмичной) работы связанных между собой предприятий. В этих же терминах формулируются задачи резервирования ненадежных элементов, регулирования стока воды из водохранилища для обеспечения необходимого режима работы гидростанции, о стратегии ремонта и замены оборудования, о резервах сил и средств в военных операциях и др.

Необходимость создания запасов диктуется многими причинами, в частности, непрерывностью процессов потребления и периодичностью поставок, неравномерностью потребления и ритмичностью производства, наличием случайных факторов в спросе между поставками, в объемах поставок, в длительности интервалов между поставками.

Чрезмерный запас материальных ценностей приводит к их избытку в одном месте и недостатку в другом, требует затрат на хранение, сдерживает научно-технический прогресс. С другой стороны, недостаток запаса вызывает перебои в работе производства, нарушает взаимодействие с другими предприятиями, приводит к убытку из-за дефицита.

Строгий количественный анализ взаимного влияния указанных факторов связан с решением сложных экстремальных задач.

В экономико-математической литературе (см., например, Ф. Хенесмен, Ю. И. Рыжиков) имеется большое количество моделей планирования запасов: модели с одним и несколькими складами, однопродуктовые и многопродуктовые модели, статические и динамические, детерминированные и стохастические. При изучении этих моделей наибольшее распространение пока получили аналитические методы, методы нелинейного и динамического программирования. Их применение дает эффективные результаты в детерминированных задачах планирования запасов. При решении более важных в практическом отношении стохастических задач их применение часто наталкивается на непреодолимые препятствия.

В этой главе анализируется широкий круг стохастических задач планирования запасов и производства и показывается, что описанные в предыдущей главе методы открывают большие возможности их решения.

§ 1. Стохастические модели планирования запасов и производства

Как отмечалось выше, планирование запасов необходимо в силу нерегулярности процессов производства, поставок, потребления. Планирование запасов неразрывно связано с планированием производства, его размещением. Большинство из рассматриваемых в этом параграфе статических моделей сводится к минимаксной задаче стохастического программирования следующего вида.

Пусть имеются функции $h^q(x, \theta)$ $(q = \overline{1, K})$, являющиеся при каждом θ выпуклыми вниз и непрерывно-дифференцируемыми по переменным $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Требуется минимизировать функцию цели

$$F(x) = M \max_{1 \leqslant q \leqslant K} h^q(x, \theta)$$

при ограничениях $x \in X$. При этом можно считать X ограниченным, выпуклым, замкнутым; $\| h_x^q(x, \theta) \| \leqslant C$ (C — константа). Метод проекции стохастических квазиградиентов (2.31) в данном случае состоит в следующем.

Пусть x^0 — произвольное начальное приближение, x^s — приближение, полученное после s-й итерации. Значение θ^s наблюдается или на основе априорного распределения или каким-либо другим способом, например, путем «проигрывания» на ЭВМ имитационной модели. В соответствии с общей формулой (2.21) строится стохастический квазиградиент $\xi(s)$: вычисляется номер q_s, удовлетворяющий соотношению

$$h^{q_s}(x^s, \theta^s) = \max_{1 \leqslant q \leqslant K} h^q(x^s, \theta^s).$$

Полагаем

$$\xi(s) = h_x^q(x^s, \theta^s)\,|_{q=q_s} =$$
$$= (h_x^{q_s}(x^s, \theta^s), \ldots, h_x^{q_s}(x^s, \theta^s)),$$

после чего новое приближение определяется по рекуррентному правилу

$$x^{s+1} = \pi_X(x^s - \rho_s h_x^{q_s}(x^s, \theta^s)), \qquad s = 0, 1, \ldots, \tag{3.1}$$

где шаговый множитель ρ_s выбирается, например, из условия

$$\rho_s \geqslant 0, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s^2 < \infty.$$

Покажем теперь, каким образом метод (3.1) можно применить при решении стохастических задач планирования запасов.

1. **Простейшая задача**. Простейшая модель планирования производства однородного продукта со случайным потреблением описана в главе I. Возможна также следующая содержательная постановка, укладывающаяся в ту же математическую схему.

Имеется транспортный самолет по доставке запасных деталей на отдаленную базу по ремонту самолетов. Самолет, доставляющий детали, может транспортировать груз ограниченного объема. Пусть r — допустимый максимальный объем запасных деталей (одного типа), число которых равно x. Считается, что при возникновении спроса θ на запасные детали, их отсутствие влечет за собой потери, характеризуемые величиной d^-. Транспортировка ненужных запасных деталей (для которых отсутствует спрос во время транспортировки) влечет за собой затраты d^+, связанные с транспортными расходами и хранением деталей на складе.

Задача состоит в том, чтобы определить такое число запасных деталей x, чтобы минимизировать ожидаемые затраты при ограничениях на допустимый объем.

Эту задачу можно переформулировать также с использованием общепринятых в теории запасов терминов «склад», «запас». На складе, вместимость которого равна r, требуется создать запас однородного продукта, спрос на который характеризуется случайной величиной θ. Затраты, связанные с запасом x, при условии, что спрос оказался равным θ, характеризуются функцией

$$f(x, \theta) = \begin{cases} d^{+}\alpha(x-\theta), & x \geqslant \theta, \\ d^{-}\beta(\theta-x), & x < \theta, \end{cases}$$

где d^{+} — затраты на хранение единицы запаса, d^{-} — затраты из-за его дефицита. Если ввести ожидаемые затраты, связанные с запасом x, т. е.

$$F(x) = \mathsf{M} f(x, \theta) = \mathsf{M} \max\{d^{+}\alpha(x-\theta), d^{-}\beta(\theta-x)\}, \tag{3.2}$$

то задача сводится к выбору точки x, которая минимизирует $F(x)$ при условии $0 \leqslant x \leqslant r$. Как уже отмечалось, если бы вместо ожидаемых затрат рассмотреть потери в расчете на средний спрос $\bar{\theta}$, т. е. $f(x, \bar{\theta})$, как это часто делается, то при $x = \bar{\theta}$ значение $f(x, \bar{\theta}) = 0$, т. е. $x = \bar{\theta}$ — оптимальный план, иными словами, задача оказывается тривиальной, в ней не учитываю. я основные особенности планирования запасов, связанные с возможностью избытка продукта или его дефицитом.

Обычный подход к решению полученной задачи состоит в следующем. Легко видеть, что $F(x)$ является выпуклой вниз функцией. Очевидно, что

$$F(x) = d^{+}\alpha \int_{0}^{x} (x-\theta)\, \mathsf{P}(d\theta) + d^{-}\beta \int_{x}^{\infty} (\theta - x)\, \mathsf{P}(d\theta), \tag{3.3}$$

и если распределение $\mathsf{P}(d\theta)$ абсолютно непрерывно, т. е. $\mathsf{P}(d\theta) = p(\theta)\, d\theta$, то функция $F(x)$ оказывается непрерывно-дифференцируемой. Минимум $F(x)$ удовлетворяет уравнению $F_x(x) = 0$, что равносильно соотношению

$$H(x) = \int_{0}^{x} p(\theta)\, d\theta = \frac{d^{-}\beta}{d^{+}\alpha + d^{-}\beta}.$$

Если известна плотность $p(\theta)$ и имеется алгоритм для вычисления $H(x)$, то решение этого уравнения не представляет труда.

Для применения метода (3.1) не требуется существования плотности распределения θ, т. е. функция цели $F(x)$ не обязательно должна быть непрерывно дифференцируемой.

Исходя из (3.1), (3.2), получаем

$$\xi(s) = \begin{cases} d^+\alpha, & x^s \geqslant \theta^s, \\ -d^-\beta, & x^s < \theta^s. \end{cases}$$

Так как $X = [0, r]$, то легко реализуется операция проектирования на X, т. е. имеем

$$x^{s+1} = \pi_X(x^s - \rho_s\xi(s)) = \\ = \max\{0, \min(r, x^s - \rho_s\xi(s))\}, \qquad s = 0, 1, \ldots$$

Заметим, что для реализации метода, как и общего метода, не требуется знать $\mathrm{P}(d\theta)$. Достаточно иметь реализации θ^0, θ^1, ... Значительные аналитические трудности возникают при обобщении простейшей задачи на тот случай, когда случайное потребление запаса x осуществляется не однократно, а в дискретные моменты времени $k = 0, 1, \ldots$ ..., N. Если β_k — потребление в момент времени k, $z(k)$ — запас или недостаток в k-й момент времени, то

$$\begin{gathered} z(k+1) = z(k) - \beta_k \qquad (k = \overline{0, N-1}), \\ z(0) = x. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Если в процессе хранения продукт портится, причем α_k — коэффициент, характеризующий потери, то вместо (3.4) имеем

$$\begin{gathered} z(k+1) = \alpha_k(z(k) - \beta_k) \qquad (k = \overline{0, N-1}), \\ z(0) = x. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Затраты на хранение запаса, если $z(k) \geqslant \theta_k$, или дефицит, если $x_k < \theta_k$, равны

$$\sum_{k=0}^{N} \max\{d_k^+(z(k) - \beta_k),\ d_k^-(\beta_k - z(k))\}.$$

Величины α_k, β_k случайные. Кроме того, случайными могут быть и $d_k^{\pm}$ $(k = \overline{0, N-1})$. Задача состоит в том, чтобы минимизировать функцию

$$F(x) = M \sum_{k=0}^{N} \max\{d_k^+ (z(k) - \beta_k),\ d_k^- (\beta_k - z(k))\}, \tag{3.6}$$

если $0 \leqslant x \leqslant r$.

В данном случае найти зависимость $F(x)$ чрезвычайно сложно. Очевидно, что сформулированная задача является частным случаем задачи оптимального выбора начального состояния управляемого процесса. Поведение управляемого процесса описывается стохастическими уравнениями (3.5). Величина $z(k)$ может быть положительной или отрицательной. Если $z(k) > 0$, то $z(k)$ характеризует остаток запаса в момент k, если $z(k) < 0$, то суммарный дефицит. В рассматриваемой модели предполагается, что неудовлетворенный в некоторый момент времени спрос остается и в последующие моменты. Поскольку допустимая область задана простыми соотношениями, то можно применить метод проекции стохастических квазиградиентов. Получим следующий итеративный процесс. Пусть x^0 — произвольное начальное приближение, x^s — приближение после s-й итерации. Наблюдаются реализации величин $d_s^{\pm}(k)$, $\alpha_s(k)$, $\beta_s(k)$ $(k = \overline{0, N-1})$ и в соответствии с (3.5) получаем величины $z_s(k)$ $(k = \overline{0, N-1})$. Положим

$$d_s(k) = \begin{cases} d_s^+(k), & z_s(k) \geqslant \beta_s(k), \\ -d_s^-(k), & z_s(k) < \beta_s(k), \end{cases}$$

и найдем решение $\lambda_s(k)$ уравнений (2.26):

$$\lambda(k) = \lambda(k+1)\alpha_s(k) + d_s(k) \qquad (k = \overline{N, 0});$$

$$\lambda(N) = -d_s(N).$$

Согласно (2.25)

$$\xi(s) = -\lambda_s(0),$$

поэтому новое приближение вычисляется по формуле

$$x^{s+1} = \max\{0, \min\{r, x^s + \rho_s\lambda_s(0)\}\}, \quad s = 0, 1, \ldots,$$

где ρ_s удовлетворяет стандартным требованиям.

2. Многопродуктовая задача. Аналогичные по простоте реализации численные методы имеют место и для многопродуктовых задач планирования запасов. Отметим, что рассматриваемые в дальнейшем модели легко обобщить на случай порчи запаса и потребления его во времени. Однако поскольку это не вносит принципиальных трудностей по сравнению с обсуждавшимися в предыдущем пункте, то подобные вопросы в этом параграфе рассматриваться не будут.

Пусть требуется сделать заказ $x = (x_1, \ldots, x_n)$ на поставку n неоднородных продуктов при условии, что спрос характеризуется вектором $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$ и задан коэффициент взаимозаменяемости k-го продукта спроса l-м продуктом заказа λ_{lk} (вектор заказа может состоять из продуктов, не входящих в вектор спроса). Значение x_l представим как $x_l = \sum\limits_{k=1}^{r} x_{lk}$ и рассмотрим функцию потерь $f(x, \theta)$ при условии, что заказ равен x, а спрос θ. Если функция потерь учитывает лишь затраты, связанные с недоиспользованием одних продуктов (в случае $\sum\limits_{l=1}^{n} \lambda_{lk} x_{lk} > \theta_k$) и потерь от дефицита других (в случае $\sum\limits_{l=1}^{n} \lambda_{lk} x_{lk} \leqslant \theta_k$), то естественно считать, что

$$f(x, \theta) = \sum_{k=1}^{r} \max \left\{ \alpha_k \left(\sum_{l=1}^{n} \lambda_{lk} x_{lk} - \theta_k \right),\ \beta_k \left(\theta_k - \sum_{l=1}^{n} \lambda_{lk} x_{lk} \right) \right\}.$$

Тогда математическое ожидание потерь при условии, что на складе имеется вектор x продуктов, равно

$$F(x) = \sum_{k=1}^{r} \mathrm{M} \max \left\{ \alpha_k \left(\sum_{l=1}^{n} \lambda_{lk} x_{lk} - \theta_k \right),\ \beta_k \left(\theta_k - \sum_{l=1}^{n} \lambda_{lk} x_{lk} \right) \right\}. \quad (3.7)$$

Требуется найти вектор x, минимизирующий эту функцию при условии

$$\sum_{l=1}^{n} a_l x_l \leqslant a, \quad x_l = \sum_{k=1}^{r} x_{lk}, \tag{3.8}$$

$$x_{lk} \geqslant 0, \tag{3.9}$$

где $a_l \geqslant 0$, a — вместимость склада. Положим $\chi(y) = 1$, если $y \geqslant 0$, и $\chi(y) = 0$, если $y < 0$. Применим для решения задачи метод (3.1). В данном случае

$$\xi(s) = \{\xi_{lk}(s)\}_{l=\overline{1,n};\ k=\overline{1,r}},$$

$$\xi_{lk}(s) = \alpha_k \lambda_{lk} \chi\left(\sum_{l=1}^{n} \lambda_{lk} x_{lk}^s - \theta_k^s\right) - \beta_k \lambda_{lk} \chi\left(\theta_k^s - \sum_{l=1}^{n} \lambda_{lk} x_{lk}^s\right).$$

Для проектирования на допустимую область существует простой конечный метод (см. Ю. М. Ермольев [2], стр. 64).

3. Учет возможностей производства. Предположим, что для производства продуктов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ используется вектор ресурсов $b = (b_1, \ldots, b_m)$. Стоимость производства единицы j-го продукта равна c_j. Тогда наряду с ограничениями вида (3.8), (3.9) появляются ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \qquad (i = \overline{1,m}), \tag{3.10}$$

а минимизируемая функция отличается от функции (3.7) на величину $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$. Учесть ограничения (3.10) можно также с помощью операции проектирования или путем применения других методов, например, стохастического метода линеаризации.

Заметим, что при учете (3.10) с помощью операции проектирования на каждой итерации в качестве начального приближения новой проекции следует рассматривать предыдущую проекцию. В таком случае новая проекция отыскивается за небольшое количество шагов.

4. Учет затрат на перевозки. Выше предполагалось, что каждый склад обслуживает свой «рынок». Более разумно организовать такую систему складирования, в которой дефицит запаса на некоторых складах ликвидируется путем поставки со складов, где есть избыток.

Пусть имеется однородный продукт, размещенный на m складах. Допустимое количество на складе i есть a_i $(i=\overline{1, m})$. В рассматриваемый период продукт требуется на n рынках, причем потребность рынка j не может быть заранее определена и ее следует считать случайной величиной θ_j. Обозначим через $x_j=\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$, количество продукта, перевезенного на j-й рынок. Тогда убыток (при условии, что спрос есть θ_j) равен

$$f_j(x_j, \theta_j)=\begin{cases} d_j^{+}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}-\theta_j\right), & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant \theta_j, \\ d_j^{-}\left(\theta_j-\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right), & \sum_{i=1}^{m} x_{ij}<\theta_j. \end{cases}$$

Требуется определить совокупность $x=\{x_{ij}\}_{i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}}$, минимизирующую сумму транспортных и ожидаемых убытков

$$F(x)=\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n} \mathsf{M} \max \left\{d_j^{+}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}-\theta_j\right), d_j^{-}\left(\theta_j-\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right)\right\}, \quad (3.11)$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i \quad (i=\overline{1, n}), \qquad x_{ij} \geqslant 0 \text{ для всех } i, j. \quad (3.12)$$

Обозначим через ξ совокупность чисел $\{\xi_{ij}\}_{i,j}$. Тогда в методе (3.1) вектор $\xi(s)$ и x^s будут иметь компоненты $\{\xi_{ij}(s)\}$, и $\{x_{ij}^s\}$, причем

$$\xi_{ij}(s)=\begin{cases} c_{ij}+d_i^{+}, & \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^s \geqslant \theta_j^s, \\ c_{ij}-d_i^{-}, & \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^s<\theta_j^s. \end{cases}$$

Операция проектирования на допустимую область (3.12) сводится к последовательному для $i = \overline{1, m}$ проектированию на область, описываемую ограничениями вида

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, \quad x_{ij} \geqslant 0.$$

Если на складах — неоднородные продукты, причем имеется коэффициент взаимозаменяемости λ_{ij} продукта, требуемого на i-м рынке, продуктом, имеющимся на j-м складе, то

$$x_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} x_{ij},$$

$$f_j(x_j, \theta_j) = \begin{cases} d_j^+ \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} x_{ij} - \theta_j \right), & \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} x_{ij} \geqslant \theta_j, \\ d_j^- \left(\theta_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} x_{ij} \right), & \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} x_{ij} < \theta_j, \end{cases}$$

$$F(x) = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} + \\ + \sum_{j} \mathsf{M} \max \left\{ d_j^+ \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} x_{ij} - \theta_j \right), \ d_j^- \left(\theta_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} x_{ij} \right) \right\}. \tag{3.13}$$

Метод минимизации функции (3.13) при ограничениях (3.12) аналогичен методу решения предыдущей задачи.

Представляет интерес следующая интерпретация задачи. Аэропорт имеет m типов самолетов и n маршрутов (авиалиний). При этом a_i — число самолетов i-го типа, λ_{ij} — число пассажиров, перевозимых самолетом i-го типа на j-й авиалинии. Поток пассажиров на маршруте j нельзя точно предсказать, и его следует рассматривать как случайную величину θ_j. Число d_i^+ — убыток за каждое место, на которое нет спроса, d_i^- — убыток за каждого пассажира, который не может быть перевезен из-за недостатка мест на маршрут j. Требуется распределить самолеты по маршрутам оптимальным образом.

Выше предполагалось, что склады непосредственно связаны с рынками. В общем случае они бывают связаны сетью дорог, транспортной сетью, в которой существуют пункты, не являющиеся ни складами, ни «рынками». Эти более сложные задачи рассматриваются в следующем параграфе. Их сложность часто обусловлена дополнительными ограничениями, не позволяющие, в отличие от ограничений (3.12), свести операцию проектирования к последовательному проектированию на простые области.

Объединение моделей, рассмотренных в данном пункте и пункте 3 позволяет создать стохастические многопродуктовые модели специализации и кооперации производства. Для этого на каждом из складов $i = \overline{1, n}$ требуется учесть «местные» возможности производства аналогично п. 3. Стохастические модели специализации и кооперации позволяют учесть большие неопределенности, присутствующие при рассмотрении этих важных народнохозяйственных проблем. Вопросы специализации и кооперации решаются на продолжительное время, в течение которого потребности и возможности различных предприятий поставщиков и потребителей могут резко изменяться. Стохастические модели позволяют отвечать на вопросы оптимальной специализации и кооперации в расчете на весь диапазон возможных колебаний условий. В отличие от них, детерминированные модели со строго определенными параметрами дают возможность проанализировать «типичные» случаи, которые в действительности могут встретиться довольно редко или совсем не наблюдаться.

§ 2. Потоки в стохастических сетях. Задачи размещения производства

Многие важные задачи управления запасами с учетом динамики спроса, динамики поставок и производства удобно с точки зрения численных расчетов сводить к задачам об оптимальных потоках в стохастических сетях. Кроме того, эти задачи важны и сами по себе. К ним сводятся вопросы оптимального планирования перевозок грузов, маневрирования в военных операциях, размещения производства, целераспределения, развития транспортных сетей и многие другие.

1. Пусть имеется некоторый конечный граф (I, U), т. е. множество точек (вершин) I, соединенных линиями со стрелками (дугами) $(i, j) \in U$, где стрелки направлены от i к j. *Сетью* принято считать граф, элементам которого поставлены в соответствие некоторые числа.

Рассмотрим сеть, определенную графом (I, U), сопоставив каждой вершине $i \in I$ некоторое число d_i, называемое *интенсивностью вершины*, а каждой дуге $(i, j) \in U$ — положительное число r_{ij}, называемое *пропускной способностью дуги*.

Если $d_i > 0$, то вершина i называется *источником*, если $d_i < 0$, то *стоком*, если же $d_i = 0$, то вершина называется *нейтральной*. Множество источников обозначается через I^+, множество нейтральных вершин — через I^0, множество стоков — через I^-. Обычно предполагается, что $\sum_{i=1}^{n} d_i = 0$, где n — число вершин. Если $\sum_{i=1}^{n} d_i \neq 0$, то несложно преобразовать задачу к такому виду, чтобы сумма интенсивностей была равна нулю.

Потоком в сети называется совокупность чисел $x_{ij}(i, j) \in U$, удовлетворяющая уравнению непрерывности (разность между вытекающим из вершины потоком и втекающим в нее равна интенсивности вершины)

$$\sum_{j} x_{ij} - \sum_{j} x_{ji} = d_i \qquad (i = \overline{1,n}) \tag{3.14}$$

и ограничениям (на пропускные способности дуг)

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant r_{ij}, \quad (i, j) \in U. \tag{3.15}$$

Поток, минимизирующий функцию

$$\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}, \tag{3.16}$$

называется *оптимальным*. Число c_{ij} называется *дуговой стоимостью*.

Многие динамические задачи управления запасами сводятся к следующей стохастической задаче о потоке в сети. Пусть имеется сеть, интенсивности стоков которой являются случайными величинами θ_i, $i \in I^-$, а интенсивности источников не известны. Обозначим эти интенсивности через x_i, причем

$$r_i \leqslant x_i \leqslant R_i, \quad i \in I^+; \tag{3.17}$$

в частности, не исключено, что $r_i = R_i$ для некоторых i. Так как возможно, что $\sum\limits_{i \in I^+} x_i > \sum\limits_{i \in I^-} \theta_i$, то вводится фиктивный сток $i = n+1$ с интенсивностью $\sum\limits_{i \in I^-} \theta_i - \sum\limits_{i \in I^+} x_i$, с которым дугами $(i, n+1)$ соединяются некоторые вершины $i \in I$. Чтобы учесть тот случай, когда $\sum\limits_{i \in I^+} x_i < \sum\limits_{i \in I^-} \theta_i$, вводится фиктивный источник $i = 0$ с интенсивностью $\sum\limits_{i \in I^-} \theta_i - \sum\limits_{i \in I^+} x_i$, который соединяется дугами $(0, i)$ с некоторыми вершинами $i \in I$. Дугам $(i, n+1)$ ставятся в соответствие дуговые стоимости $c_{i,n+1}$, а дугам $(0, i)$ — дуговые стоимости c_{0i}. В некоторых случаях дуги $(i, n+1)$ строятся только при $i \in I^+$, и в этом случае часто $c_{i,n+1}$ отражает затраты на хранение единицы продукта в источнике i; дуги $(0, i)$ строятся при $i \in I^-$, и c_{0i} отражают затраты из-за дефицита в стоке i. В других случаях дуговые числа либо достаточно велики, либо равны нулю. В результате построений получается некоторая расширенная сеть, в которой существует поток при любых $x = \{x_i, i \in I^+\}$, $\theta = \{\theta_i, i \in I^-\}$. При заданных $x = \{x_i, i \in I^+\}$, $\theta = \{\theta_i, i \in I^-\}$ найдем оптимальный поток в полученной расширенной сети $x_{ij}(x, \theta)$ и рассмотрим задачу поиска такого набора интенсивности $x = \{x_i, i \in I^+\}$, который минимизирует функцию цели

$$F(x) = f(x) + \sum_{i,j} \mathrm{M}\, c_{ij} x_{ij}(x, \theta), \tag{3.18}$$

при ограничениях (3.17), где $f(x)$ — некоторая функция, которую в дальнейшем будем считать выпуклой вниз. Это — задача двухэтапного стохастического программирования частного вида, и ее решение можно получить методом стохастических квазиградиентов.

Пусть $x^0 = \{x_i^0, i \in I^+\}$ — произвольное начальное приближение, x^s — приближение после s-й итерации Наблюдается θ^s, отыскивается $x^s = \{x_{ij}(x^s, \theta^s)\}$, точнее, потенциалы $u^s = \{u_i^s, i \in I^+\}$, отвечающие потоку $x^s = \{x_{ij} = (x^s, \theta^s)\}$. После этого

$$x^{s+1} = \pi_X(x^s - \rho_s(\hat{f}_x(x^s) + u^s)), \qquad s = 0, 1, \ldots \tag{3.19}$$

Легко понять, что к минимизации функции вида (3.18) сводится следующая задача о резервировании ненадежных элементов сложной системы. Пусть система с распределенными в пространстве элементами характеризуется графом, вершины которого отвечают ее элементам, а дуги—связям между элементами. Известны вероятность отказа элементов и время перевозки из одной вершины в другую. Требуется определить необходимое количество резервных элементов, вершины, в которых они должны быть расположены и в каком количестве (с учетом времени доставки в те места, где в этих элементах возникает потребность, а также с учетом затрат на хранение и потерь из-за дефицита).

2. Задача размещения предприятий, развития транспортных сетей. Проблемы размещения производства, связанные с изменениями в спросе на продукцию, зависят от возможностей транспортных сетей и расположения источников сырья. Места, в которых размещаются производственные мощности, должны быть наиболее удобными с точки зрения доставок продукции потребителям, завозки сырья, загрузки транспортных сетей. С формальной точки зрения эти задачи являются задачами математического программирования транспортного типа, задачами о потоках в сетях, часто нелинейными.

Исходными данными при их постановке являются прежде всего данные о потребностях потребителей в продукции, их расположении. В детерминированных моделях потребности потребителей характеризуются детерминированными числами. На практике часто весьма трудно охарактеризовать их однозначно, например, в силу стохастичности характера производства (например сельскохозяйственного) предприятий-потребителей, в силу сезонного характера производства, нерегулярности потребления. В стохастических моделях объемы потребления являются случайными величинами. Пункты производства подразделяются на две категории: пункты с известными объемами производства и пункты, объем производства которых следует определить. Для каждого пункта второй группы известна зависимость стоимости производства от объема производства. К ним относятся как возможные места нового строительства, намеченные с учетом природных условий, возможностей транспортной сети, административного деления, социальных и других факторов, так и предприятия, подлежащие реконструкции. Требуется найти такие объемы производства и перевозок по транспортной сети, при которых выполняются необходимые поставки и суммарные расходы на производство и транспортировку минимальны.

Сопоставим каждому пункту реальной транспортной сети вершину графа, а каждому направлению движения между соседними пунктами — дугу со стрелкой, направленной в сторону движения. Пусть I — полученное множество вершин, U — множество дуг, причем I^+ — множество вершин, отвечающих пунктам производства (источники сети), I^- — множество вершин, отвечающих пунктам потребления (стоки сети). Остальные вершины $i \in I^0$ — нейтральные. Интенсивности вершин $i \in I^-$ — случайные величины θ_i, интенсивности источников $i \in I^+$ не известны, поэтому обозначим их через x_i. Пусть $f_i(x)$, $i \in I^+$,— зависимость стоимости производства от объема производства в вершине x, c_{ij} — затраты, связанные с перевозкой единицы продукта по дуге (i, j).

Формулировка модели зависит от предпосылок относительно прикрепления поставщиков к потребителям и характера поставок. Поскольку потребление случайно, то однозначное прикрепление поставщиков к потребителям, детерминированные поставки не позволят удовлетворить потребности потребителей. В этом случае необходимо дополнительно оговорить то, каким образом учитываются или ликвидируются возможные избытки продукта или его дефицит.

1) Поставки определяются заранее, до того, как станут известными потребности, т. е. величины потоков в сети со случайными интенсивностями стоков должны быть детерминированными. Избыток продукта или его недостаток в пунк-

тах потребления учитывается дополнительными затратами на хранение или дефицит. Эту ситуацию можно интерпретировать следующим образом. Сеть наряду со стоками и источниками имеет две фиктивные вершины — источник и сток. Фиктивный сток является как бы складом, куда потребители «сбрасывают» избыток продукта, а фиктивный источник является складом, откуда они черпают недостающий продукт в случае дефицита. В каждый из стоков I^- предварительно, до наблюдения $\theta = \{\theta_i,\ i \in I^-\}$, намечаются поставки x_i (определяются детерминированные интенсивности стоков):

$$x_i = \sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji}, \quad i \in I^-.$$

После того как становятся известными потребности θ_i, в случае $x_i > \theta_i$ избыток продукта перевозится в фиктивный сток с удельными затратами на «перевозку» d_i^+ (затраты на хранение), если же $x_i < \theta_i$, то недостаток продукта перевозится из фиктивного источника в i с удельными затратами d_i^- (затраты за недостачу).

2) В более общем случае после того как становятся известными потребности θ_i, может появиться возможность перераспределения продукта между вершинами с избытком и недостатком. Наряду с фиктивными источниками и стоками, как в предыдущем случае, в сети может быть предусмотрена система реальных вершин — складов, на которых предварительно, до наблюдения θ, завозится продукт для того, чтобы затем, при наблюдении θ, в необходимые сроки и с наименьшими затратами удовлетворить потребности пунктов с недостатком. В этом случае в реальной сети, связывающей поставщиков с потребителями, предусматривается коррекционная сеть, объединяющая поставщиков и потребителей с системой складов. Эта сеть определяется частичным подграфом и предназначается для эффективной ликвидации возможных дисбалансов между случайными потребностями и спланированными поставками. Очевидно, что определение такой сети и емкостей складов должно рассматриваться совместно с исходной задачей размещения производства.

3) Возможна также крайняя ситуация, когда поставки выполняются после того как становятся известными потреб-

ности. В этом случае задача сводится к той, которая рассматривалась в предыдущем пункте.

Рассмотрим формальную модель общей ситуации, описанной в 2). Пусть имеется исходная сеть, определяемая графом (I, U) с множествами источников I^+, стоков I^- и нейтральных вершин I^0. Вершины сети $i \in I^+$ отвечают существующим пунктам производства, предполагаемым местам нового строительства; вершины $i \in I^-$ — потребителям; имеется возможность размещать склады в любой вершине. Коррекционная сеть определяется частичным подграфом (I^*, U^*), т. е. $I^* \subseteq I$, $U^* \subseteq U$. Обозначим через x_{ij}, $(i,j) \in U$, планируемый детерминированный поток в исходной сети, а через y_{ij}, $(i, j) \in U^*$, —поток в коррекционной сети (коррекция потока x_{ij}). Пусть d_i, $i \in I$, — детерминированные интенсивности вершин, θ_i, $i \in I$, —их случайные составляющие. Считается, что если $d_i > 0$, то $i \in I^+$; если $d_i = 0$, то $i \in I^0$; если $d_i < 0$, то $i \in I^-$. Для реализации потока x_{ij} сеть должна иметь интенсивности

$$x_i = \sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji}.$$

При этом остатки интенсивностей $d_i + \theta_i - x_i$ после наблюдения θ_i должны ликвидироваться коррекцией y_{ij}. Так как θ_i — случайные величины, а x_{ij} — детерминированный поток, то и после коррекции в некоторых вершинах может оказаться недостаток потока, а в некоторых—избыток, т. е. не существует потока $y_{ij} \geqslant 0$ $(i, j) \in U^*$, удовлетворяющего соотношениям

$$\sum_j y_{ij} - \sum_j y_{ji} = d_i - x_i + \theta_i.$$

Чтобы единообразно учесть затраты, связанные с этим обстоятельством, т. е. затраты на хранение и за недостачу, введем фиктивный источник и фиктивный сток так, чтобы в расширенной сети существовал поток y_{ij}, а перевозкам, связанным с фиктивными вершинами, отвечали затраты на хранение и недостачу. Положим интенсивность фиктивного источника равной достаточно большому числу d_0, а стока — равной $-d_0$. Соединим те вершины i, в которых могут наблюдаться избытки, с фиктивным стоком дугой со стоимостью d_i^+, а фиктивный источник с вершинами i, в которых возможен недостаток, — дугой с дуговой стоимостью d_i^-. Кроме того, соединим фиктивный источник с фиктивным стоком дугой с нулевой дуговой стоимостью. Будем в дальнейшем предполагать, что в исходной сети выполнены такие изменения, т. е. существует оптимальный поток $y_{ij}(x, \theta)$, минимизирующий затраты на коррекцию

$$\sum_{i,j} d_{ij} y_{ij}, \tag{3.20}$$

где d_{ij}—затраты на перевозку единицы потока-коррекции по дуге $(i, j) \in U^*$, при ограничениях

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} + \sum_j y_{ij} - \sum_j y_{ji} = d_i + \theta_i, \quad i \in I, \tag{3.21}$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant r_{ij}, \quad y_{ij} \geqslant 0, \tag{3.22}$$

$$x_{ij} + y_{ij} \leqslant r_{ij}, \quad (i, j) \in U.$$

Задача состоит в том, чтобы найти такой поток x_{ij}, при котором минимизируются ожидаемые расходы, связанные с его перемещениями, коррекцией и производством. Ожидаемые затраты на коррекцию равны

$$\mathsf{M} \sum_{i,j} d_{ij} y_{ij}(x, \theta). \tag{3.23}$$

Определим остальные функции затрат. Для вершин $i \in I^+ \cup I^0$ значение x_i может оказаться больше d_i. Это означает, что интенсивности этих вершин следует увеличить (путем реконструкции, нового строительства и т. п.). Целесообразность этого оценивается с помощью функции затрат на производство. Если же $x_i < d_i$, то величину $d_i - x_i$ следует сохранять для осуществления коррекции и целесообразность этого оценивается затратами на хранение, включая, возможно, затраты на строительство складских помещений. Иными словами, для каждого $i \in I^+ \cup I^0$ имеется функция затрат $f_i(x_i)$ в зависимости от интенсивности x_i этой вершины. Для $i \in I^-$, если $x_i < 0$, это означает необходимость хранения x_i в вершине i для осуществления коррекции, что оценивается также затратами на хранение и строительство складских помещений. Если же $x_i > 0$, то это означает необходимость размещения в вершине i источника потока интенсивности x_i, что оценивается стоимостью производства x_i единиц потока. Таким образом, и каждой вершине $i \in I^-$ можно поставить в соответствие функцию затрат $f_i(x_i)$. Основная задача при этом заключается в том, чтобы найти поток $\{x_{ij}, (i, j) \in U\}$, минимизирующий общие затраты

$$F(x) = \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i \in I} f_i(x_i) + \mathrm{M} \sum_{(i,j) \in U^*} d_{ij}y_{ij}(x, \theta), \qquad (3.24)$$

где c_{ij} — затраты, связанные с перемещением единицы потока из i в j, при ограничениях

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant r_{ij}, \quad (i, j) \in \bar{U}. \qquad (3.25)$$

В случае разрывных функций $f_i(x_i)$ для решения данной задачи целесообразно применять приемы, о которых говорилось в главе II. Заметим, что функция ожидаемых затрат на коррекцию потока (3.23) выпукла вниз по независимым переменным x_{ij} и стохастический квазиградиент этой функции имеет следующие компоненты:

$$\{V_i(x, \theta) - V_j(x, \theta), \ (i, j) \in U^*\},$$

где $V_i(x, \theta)$ — потенциал вершины $i \in I^*$, отвечающей потоку $y_{ij}(x, \theta)$.

Сформулированная задача несколько усложняется, если случайными оказываются и пропускные способности r_{ij}. Дело в том, что по реальной транспортной сети осуществляются перевозки различных грузов и r_{ij} — это не истинные пропускные способности дорог, а только часть пропускной способности, которую можно использовать для перемещения планируемых потоков. Она зависит от колебаний других потоков, не рассматриваемых в данной задаче.

Как уже отмечалось, вопросы размещения производства тесно связаны с вопросами развития транспортных сетей. Темпы развития транспортных сетей должны соответствовать темпам развития производства. При изучении вопросов развития транспортных сетей невозможно ограничиться рассмотрением однородных потоков, однопродуктовыми моделями. Необходимо исходить из наиболее характерных продуктов, определяющих основную загрузку звеньев сети, т. е. рассматривать задачу развития транспортной сети совместно с задачей размещения предприятий, выпускающих различную продукцию. Естественно, что данные по каждой из подзадач размещения в общей модели развития сети и размещения производства должны быть представлены не так детально, как в задачах размещения по каждому продукту в отдельности, например, не обязательно включать коррекционные сети. Математические модели размещения и развития сетей можно сформулировать с использованием понятия неоднородного потока в сети и неоднородных сетевых задач. Часто при этом вполне достаточно следующей модели.

Рассмотрим сеть, определенную конечным графом (I, U), каждой вершине i которого поставлен в соответствие вектор интенсивностей $d^i = (d_i^1, \ldots, d_i^N)$. *Неоднородным потоком* в рассматриваемой сети называется вектор-функция $x_{ij} = (x_{ij}^1, \ldots, x_{ij}^N)$, $x_{ij} \geqslant 0$, определенная на U и удовлетворяющая уравнениям непрерывности

$$\sum_j x_{ij}^k - \sum_j x_{ji}^k = d_i^k, \quad i \in I, \quad k = \overline{1, N}. \tag{3.26}$$

Пусть каждой дуге $(i, j) \in U$ поставлена в соответствие дуговая функция затрат

$$c_{ij}(x_{ij}^1, \ldots, x_{ij}^N) = \mathsf{M} f_{ij}(x_{ij}^1, \ldots, x_{ij}^N, \theta). \tag{3.27}$$

Задача состоит в построении оптимального неоднородного потока, минимизирующего

$$\sum_{i,j} c_{ij}(x_{ij}^1, \ldots, x_{ij}^N). \tag{3.28}$$

Функции $f_{ij}(x_{ij}^1, \ldots, x_{ij}^N, \theta)$, вообще говоря, нелинейны по $x_{ij} = (x_{ij}^1, \ldots, x_{ij}^N)$ и зависят от случайных параметров θ. Если говорить о задаче развития сетей, то дуга (i, j) — это подлежащая реконструкции существующая или предполагаемая дорога сети. В этом случае функция $c_{ij}(x_{ij})$ отражает затраты на перевозку и затраты на реконструкцию или строительство дороги (i, j), способной обеспечить потоки $x_{ij} = (x^1_{ij}, \ldots, x^N_{ij})$. Если интенсивности некоторых вершин не известны или случайны, то такие задачи формально легко сводятся к задаче с фиксированными интенсивностями вида (3.26)—(3.29) путем введения фиктивных источников и стоков (если коррекционная сеть имеет простейший вид, как в п. 1).

Если r_{ij} — пропускная способность дуги (i, j), то наряду с ограничениями (3.26) для некоторых дуг, которые не подлежат реконструкции, появятся ограничения типа

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k x^k_{ij} \leqslant r_{ij}, \quad (i, j) \in U, \tag{3.29}$$

где α_k — коэффициенты взаимозаменяемости. Для таких дуг функция цели может быть линейной. Для задач развития сетей функции могут быть разрывными. Поскольку ограничения (3.26), (3.29) могут затруднить выполнение операции проектирования, то для решения задачи (3.26)—(3.29) имеет смысл применить метод линеаризации. Иными словами, пусть $x^k_{ij}(s)$—приближение после s-й итерации. Положим

$$f^{(k)}_{ij}(s) = \frac{1}{\Delta_s}\left(f_{ij}\left(\tilde{x}^1_{ij}(s), \ldots, x^k_{ij}(s) + \frac{\Delta_s}{2}, \ldots, \tilde{x}^N_{ij}, \theta^s\right) - \right.$$
$$\left. - f_{ij}\left(\tilde{x}^1_{ij}(s), \ldots, x^{(k)}_{ij}(s) - \frac{\Delta_s}{2}, \ldots, \tilde{x}^N_{ij}(s), \theta^s\right)\right),$$

где $\tilde{x}^l_{ij}$, $l = \overline{1, N}$, —независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезках $\left[x^k_{ij}(s) - \frac{\Delta_s}{2}, x^k_{ij}(s) + \frac{\Delta_s}{2}\right]$. Рассмотрим величины $z^k_{ij}(s)$, $\bar{x}^k_{ij}(s)$, где

$$z^k_{ij}(s+1) = z^k_{ij}(s) + \delta_s\left(f^{(k)}_{ij}(s) - z^k_{ij}(s)\right), \quad s = 0, 1, \ldots,$$

а $\bar{x}^k_{ij}(s)$—решение следующей задачи об однородном потоке: минимизировать (при данном $k = \overline{1, N}$)

$$\sum_{i,j} z^k_{ij}(s)\, x^k_{ij},$$

при ограничениях

$$\sum_{j} x_{ij}^{k} - \sum_{j} x_{ji}^{k} = d_{i}^{k}, \quad i \in I,$$

$$x_{ij}^{k} \geqslant 0, \quad (i, j) \in U.$$

Новое приближение $x_{ij}^{k}(s+1)$ отыскивается по формуле

$$x_{ij}^{k}(s+1) = x_{ij}^{k}(s) + \rho_s (\bar{x}_{ij}^{k}(s) - x_{ij}^{k}(s)), \quad s = 0, 1, \ldots.$$

§ 3. Динамические задачи планирования запасов и синхронизации производства

Формально рассматриваемые в этом параграфе задачи относятся к специальному классу задач оптимального управления случайными процессами. Сложность решения их стандартными приемами теории оптимального управления связана с присутствием фазовых ограничений и большой размерностью. Убедимся в том, что специфика рассматриваемых задач оптимального управления позволяет свести их к стохастическим задачам об оптимальном потоке в сети (см. п. 1 § 2) и тем самым получить весьма единообразные алгоритмы численного решения.

1. Динамическая задача с одним складом. Пусть планируемый период состоит из N временны́х промежутков и заказ на поставку продукта делается сразу на весь планируемый период с разбивкой по каждому из промежутков времени. Общий заказ не должен превышать a. Пусть x_k — заказ продукта на k-й промежуток времени $[k, k+1]$, θ_k — спрос в момент времени k. Известно, что c_k — стоимость поставки единицы заказа, d_k^+ — стоимость хранения в интервале $[k, k+1]$, d_k^- — убыток из-за дефицита. Обозначим через z_{k+1} количество продукта, хранящегося на складе или требующегося в интервале времени $[k, k+1]$. Очевидно, что

$$z_{k+1} = z_k + x_k - \theta_k \qquad (k = \overline{0, N-1}),$$
$$z_0 = z, \tag{3.30}$$

где z — начальный запас. Переменные состояния системы

z_k и управляемые переменные x_k удовлетворяют ограничениям

$$r_k \geqslant z_k, \quad z_N = z, \quad x_k \geqslant 0, \quad \sum_{k=0}^{N-1} x_k \leqslant a, \tag{3.31}$$

где ограничение $z_N = z$ означает, что к началу следующего цикла начальный запас снова равен z, r_k—емкость склада

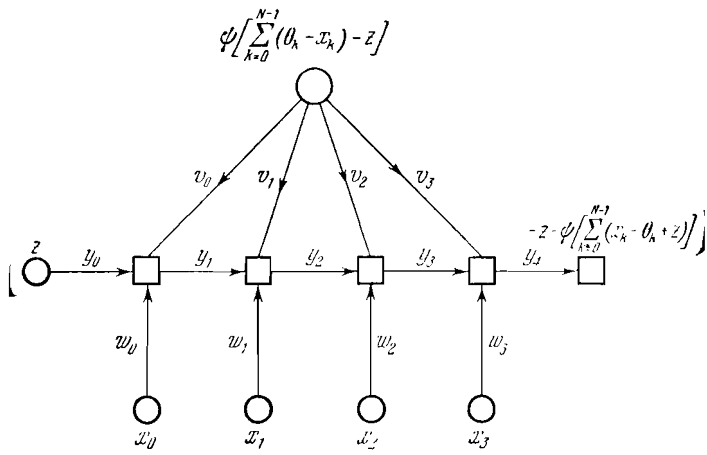

Рис. 14.

в k-й интервал времени. Требуется найти $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$, минимизирующие ожидаемые затраты

$$F(x_0, \ldots, x_{N-1}) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k x_k + \\ + \sum_{k=0}^{N-1} M \max \{d_k^+ (z_k + x_k - \theta_k),\ d_k^- (\theta_k - z_k - x_k)\}. \tag{3.32}$$

Сведем эту задачу к стохастической задаче об оптимальном потоке (п 1 § 2). Представим процесс поставки, хранения и сбыта запаса как распределение потока в некоторой сети (рис. 14), которую для краткости назовем *представляющей сетью*. Источники сети условимся обозначать кружком, стоки — квадратом, нейтральные вершины — точками.

Переменным ω_k отвечают дуговые стоимости c_k, переменным y_k отвечают дуговые стоимости d_{k-1}^{+}, переменным v_k — дуговые стоимости d_k^{-}, $d_{N-1}^{+}=0$; $\psi(b)=b$, если $b \geqslant 0$; $\psi(b)=0$, если $b<0$. При этом выполняются ограничения

$$0 \leqslant y_k \leqslant r_k, \quad \sum_{k=0}^{N-1} x_k \leqslant a,$$

где r_k — емкость склада. При фиксированных $x_0, \ldots, x_{N-1}$ в данной сети определим оптимальный поток, минимизирующий общие затраты

$$\sum_{k=0}^{N-1} c_k w_k + \sum_{k=0}^{N-1} d_k^{+} y_{k+1} + \sum_{k=0}^{N-1} d_k^{-} v_k.$$

Обозначим минимальное значение этой функции через $f(x_0, \ldots, x_{N-1}, \theta_0, \ldots, \theta_{N-1})$. Задача состоит в том, чтобы найти такие интенсивности $x_0, \ldots, x_{N-1}$, при которых минимальны ожидаемые затраты

$$F(x_0, \ldots, x_{N-1}) = \mathrm{M} f(x_0, \ldots, x_{N-1}, \theta_0, \ldots, \theta_{N-1}), \tag{3.33}$$

при условии, что

$$x_k \geqslant 0, \quad \sum_{k=0}^{N-1} x_k \leqslant a. \tag{3.34}$$

Эта задача аналогична задаче п. 1 § 1 настоящей главы и решается описанными там методами. Легко понять, что она равносильна исходной задаче оптимального управления.

Действительно, в силу уравнений непрерывности потока в сети имеем

$$y_0 = z, \quad w_k = x_k, \quad y_k + x_k + v_k - y_{k+1} = \theta_{k+1},$$
$$k = \overline{0, N-1},$$

т. е.

$$y_{k+1} = y_k + x_k + v_k - \theta_k, \qquad k = \overline{0, N-1},$$
$$z_0 = z.$$

Кроме того, в оптимальном потоке, очевидно $v_k = \theta_k - y_k - x_k$, если $\theta_k - y_k - x_k > 0$, и $v_k = 0$ — в противном случае. Отсюда имеем, что $z_{k+1}=0$, если $v_k>0$ и $v_k=0$, если $y_{k+1}\geqslant 0$, т. е. $y_{k+1}v_k=0$. Поэтому можно записать

$$y_{k+1}=\begin{cases} y_k+x_k-\theta_k, & \text{если } v_k=0,\\ 0, & \text{если } v_k>0,\end{cases}$$

$$v_k=\begin{cases} \theta_k-y_k-x_k, & \text{если } y_k=0,\\ 0, & \text{если } y_k>0.\end{cases}$$

Положим $z_{k+1}=y_{k+1}-v_k$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что величины z_k удовлетворяют соотношениям

$$z_{k+1}=z_k+x_k-\theta_k, \qquad k=\overline{0, N-1},$$

$$z_0=z.$$

Кроме того, функцию (3.34) можно представить в виде

$$F(x_0, \ldots, x_{N-1})=\sum_k c_k x_k+\sum_k M\max\{d_k^+ z_{k+1}, d_k^- z_{k+1}\},$$

что равносильно (3.32). Иными словами, задача об оптимальном потоке (3.33), (3.34) равносильна задаче оптимального управления (3.30)—(3.32). Стохастический квазиградиент функции (3.33) в соответствии с общей схемой (3.19) имеет компоненты

$$\xi(s)=(\xi_0(s), \ldots, \xi_{N-1}(s)),$$

$$\xi_k(s)=c_k+u_k^s.$$

2. Учет возможности ремонта. Иногда имеется возможность делать заказ на поставку запасных деталей или ремонтировать изношенные. Рассмотрим стохастический аналог одной известной задачи подобного типа. Допустим, что программа работы некоторого предприятия рассчитана на N этапов. В соответствии с графиком на k-м этапе $(k=\overline{0, N-1})$ требуется θ_k^1 деталей, из которых к концу этапа детали изнашиваются и требуют ремонта. Пусть к концу k-го периода можно отдать в ремонт θ_k^2 деталей, где θ_k^1, θ_k^2 — случайные величины. Деталь можно купить по c_1 руб. за штуку, или отдать в срочный q_1-дневный ремонт по цене c_2 руб. за штуку или отдать в обычный q_2-дневный ремонт по цене c_3 руб. за штуку. Стоимость хранения одной детали на k-м этапе равна d_k^+, а потери из-за дефицита на k-м этапе равны d_k^-. Как должно планировать предприятие приобретение и ремонт оборудования, чтобы при минимальных издержках иметь нужное количество деталей в продолжение всего периода, если $q_1 < q_2$ и $c_3 < c_2 < c_1$? Представляющая сеть этой задачи изображена на рис. 15. Сеть

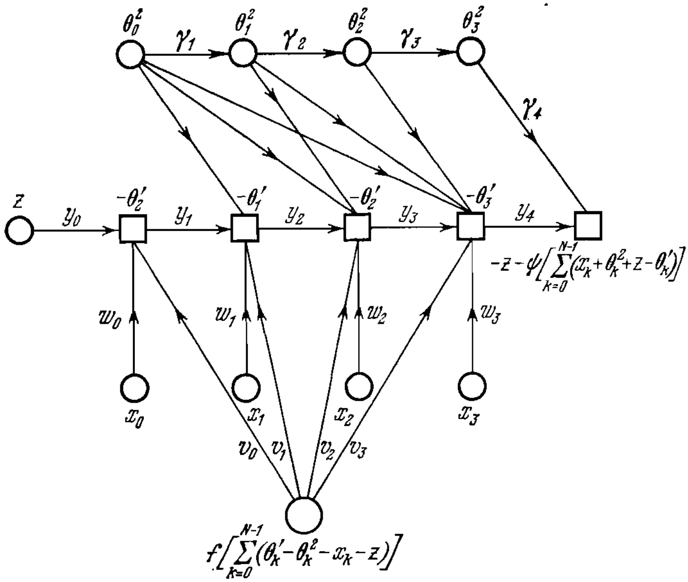

Рис. 15.

аналогична сети рис. 14, за исключением источников с интенсивностями θ_k^2 $(k=\overline{0, N-1})$. Источник с интенсивностью θ_k^2 соединен дугой со стоком с интенсивностью θ_l^1, если $l \geqslant k+q_1$, причем дуговая стоимость этой дуги равна c_2, если $l < k+q_2$, и равна c_3, если $l \geqslant k+q_2$. Дуговые стоимости, отвечающие переменным γ_k, равны 0. Переменной w_k отвечает дуговая стоимость c_1, переменной y_k — дуговая стоимость d_{k-1}^+, переменной v_k — дуговая стоимость d_k^-, $d_{N-1}^+ = 0$.

3. Синхронизация производства. В предыдущих задачах заказ $x_0, \ldots, x_{N-1}$ определялся, исходя из спроса, с учетом затрат на хранение, затрат из-за дефицита, затрат на поставку. Однако с точки зрения производства этот заказ может оказаться трудно выполнимым. Неравномерность в величинах $x_0, \ldots, x_{N-1}$ может привести к чрезмерным затратам в периоды повышенного спроса и затратам на простои оборудования в период пониженного спроса. Можно произвести излишек продукции в периоды пониженного спроса с тем, чтобы сохранить и использовать его в период повышенного спроса. Однако при этом необходимо учитывать затраты на хранение (см. работу В. М. Глушкова, Ю. М. Ермольева).

Пусть θ_k, $(k = \overline{0, N-1})$ — необходимое в k-м периоде количество единиц продукции; y_k — число не использованных после k-го момента единиц продукта, т. е. запас; x_k — число единиц продукта, произведенного в k-м периоде; d_{k-1}^{+} — стоимость хранения единицы продукции в k-м периоде; α_k — стоимость расширения производства на одну единицу в k-м периоде; β_k — затраты, связанные со снижением производства на одну единицу; d_k^{-} — затраты из-за дефицита; c_k — стоимость поставки единицы продукта. Представляющая сеть этой задачи во многом аналогична сети задачи п. 1. Отличие этой задачи от задачи п. 1 связано с учетом затрат на расширение или снижение производства. Эти затраты, очевидно, равны

$$\sum_{k=1}^{N-1} \max\{\alpha_k (x_k - x_{k-1}),\ \beta_k (x_{k-1} - x_k)\}.$$

Следовательно, вместо функции цели (3.32) в данной задаче рассматривается функция

$$F(x_0, \ldots, x_{N-1}) = \sum_{k=1}^{N-1} \max\{\alpha_k (x_k - x_{k-1}),\ \beta_k (x_{k-1} - x_k)\} + \sum_{k=0}^{N-1} c_k x_k + \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{M} \max\{d_k^{+} (z_k + x_k - \theta_k),\ d_k^{-} (\theta_k - z_k - x_k)\}.$$

В этом случае стохастический квазиградиент $\xi(s) =$

$= (\xi_0(s), \ldots, \xi_{N-1}(s))$ имеет компоненты

$$\xi_0(s) = \begin{cases} -\alpha_1 + c_0 + u_0^s, & x_1^s \geqslant x_0^s, \\ \beta_1 + c_0 + u_0^s, & x_1^s < x_0^s, \end{cases}$$

$$\xi_k(s) = \begin{cases} \alpha_k - \alpha_{k+1} + c_k + u_k^s, & x_k^s \geqslant x_{k+1}^s, \\ \beta_{k+1} - \beta_k + c_k + u_k^s, & x_k^s < x_{k+1}^s, \end{cases}$$

если $k>0$, где u_k^s—потенциалы, отвечающие оптимальному потоку.

4. Многопродуктовые задачи. Выбор пунктов производства. Предыдущие задачи и методы их решения легко обобщаются на случай, когда имеется заказ на несколько продуктов и существует ряд предприятий, на которых этот заказ можно выполнить. Требуется составить оптимальный график выполнения заказа на имеющихся предприятиях с учетом затрат на производство, включая затраты на расширение, поставку, хранение и потери из-за дефицита. Рассмотрим для простоты только случай, когда имеются один продукт и несколько предприятий $i = 1, 2, \ldots, m$. Пусть θ_k — спрос в момент времени $k = 0, 1, \ldots, N-1$; d_{ki}^+ — удельные затраты на хранение на k-м предприятии; d_k^-— затраты, связанные с дефицитом; c_{ki} — стоимость поставки; α_{ki} — удельные затраты на расширение, β_{ki} — на снижение. Обозначим через y_{ki} количество продукта, хранящегося на складе i-го предприятия; x_{ki} — заказ продукта i-го предприятия в момент k.

Представляющая сеть задачи указана на рис. 16 и не требует особых пояснений. Например, переменным w_{ki} отвечают затраты c_{ki}, переменным y_{ki}—затраты $d_{k-1,i}^+$ и т. д. Затраты на расширение производства равны

$$\sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{m} \max\{\alpha_{ki}(x_{ki} - x_{k+1,i}),\ \beta_{ki}(x_{k+1,i} - x_{ki})\}.$$

В данном случае стохастический квазиградиент $\xi(s)$ имеет компоненты $\{\xi_{ki},\ k = \overline{0, N-1},\ i = \overline{1, m}\}$, где

$$\xi_{0i}(s) = \begin{cases} -\alpha_{1i} + c_{0i} + u_{0i}^s, & x_{1i}^s \geqslant x_{0i}^s, \\ \beta_{1i} + c_{0i} + u_{0i}^s, & x_{1i}^s < x_{0i}^s, \end{cases}$$

$$\xi_{kl}(s) = \begin{cases} \alpha_{kl} - \alpha_{k+1,l} + c_{kl} + u^s_{kl}, & x^s_{kl} \geqslant x^s_{k-1,l}, \\ \beta_{k+1,l} - \beta_{kl} + c_{kl} + u^s_{kl}, & x^s_{kl} < x^s_{k-1,l}, \end{cases}$$

если $k > 0$, где u^s_{kl} — потенциалы вершин, отвечающих

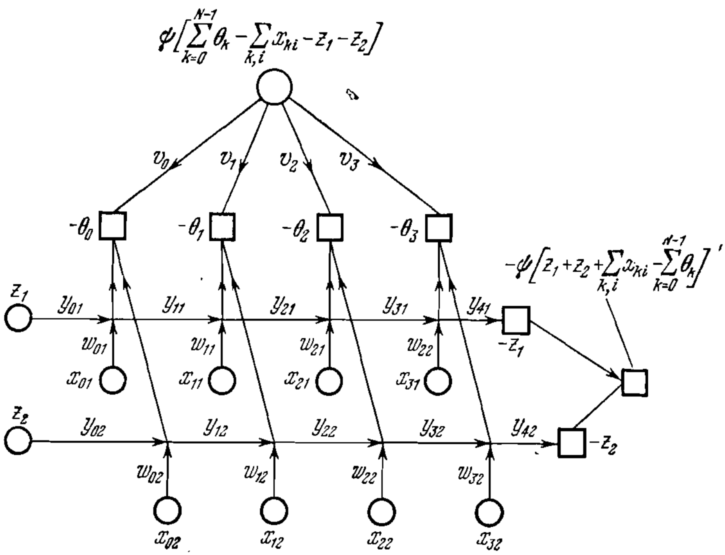

Рис. 16.

переменным x_{kl} оптимального потока, полученного при

$$\theta_k = \theta^s_k, \quad x_{kl} = x^s_{kl}, \qquad k = \overline{0, N-1}, \quad i = \overline{1, m}.$$

5. Рассмотренные выше динамические задачи планирования запасов сформулированы в терминах планирования заказов $x_0, \ldots, x_{N-1}$, которые выполняются некоторым предприятием. В этом случае неравномерность $x_0, \ldots, x_{N-1}$ интерпретировалась как расширение или свертывание производства. Эти же задачи можно переформулировать в терминах снабжения некоторого района продуктом (например, снабжение города бензином). В этом случае требование равномерности величины поставок $x_0, \ldots, x_{N-1}$ связано с равномерностью работы транспорта, с помощью которого осу-

ществляются поставки x_0, ..., x_{N-1}. Как правило, при этом требуется, чтобы $x_0=x_1=\ldots=x_{N-1}$, кроме того, величины x_k определяются только для некоторых, обычно равноотстоящих моментов времени. Для того чтобы обеспечить неравномерное потребление во всем интервале времени, предусматривается система складов, на которых хранится завозимый в район продукт.

В том случае, когда район имеет значительное количество потребителей и складов, представляющая сеть задачи имеет громоздкий вид. Однако поскольку она строится по простому принципу, то эту операцию легко алгоритмизировать и предоставить выполнять ЭВМ. Заметим, что представляющая сеть не требует никакой дополнительной информации по сравнению с исходными данными задачи, поэтому в виде представляющей сети или в каком-либо другом виде они должны храниться в ЭВМ.

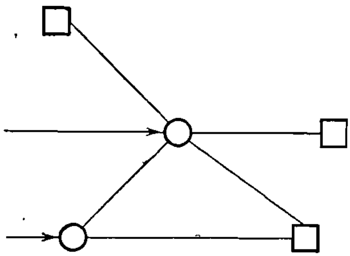

Рис. 17.

Пусть район имеет два склада (кружки) и три потребителя (квадраты) (рис. 17), связанных между собой сетью дорог. Стрелками указаны (конечные) пути, по которым происходят поставки на склады. Естественно, что они могут быть только звеньями общей сети дорог данного района. Общий принцип построения представляющей сети указан на рис. 16. Здесь x_{kl} — величина поставки l-му складу в k-й момент времени, y_{kl} — запас на l-м складе в k-й момент времени. При этом недостает фиктивных источников и стоков, которые строятся обычным образом.

ГЛАВА IV

СООТНОШЕНИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ В СТОХАСТИЧЕСКОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ И ИХ ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Важную роль в линейном и выпуклом программировании играет принцип двойственности. Изучение взаимосвязи прямой и двойственной задач позволяет выяснить качественный характер оптимального решения, наметить идеи вычислительных алгоритмов, исследовать вопросы устойчивости экстремальных задач. С двойственностью тесно связаны такие разделы выпуклого программирования, как блочное и параметрическое программирование.

В математической экономике на основании анализа двойственных соотношений можно получить полезные выводы о характере общественно необходимых затрат в плановой экономике, о способах сочетания централизованных и децентрализованных методов планирования народным хозяйством, о методах определения эффективности капиталовложений, о методике экономико-математического анализа прикладных моделей и др.

В настоящей главе с учетом результатов, полученных в главе I при исследовании условий оптимальности задач стохастического программирования, выведены соотношения двойственности для общей стохастической модели производства, а также разъяснен их экономический смысл.

§ 1. Соотношения двойственности для многоэтапной линейной задачи стохастического программирования

1. Предположения. Двойственная задача. Рассмотрим стохастическую модель производства, которая с математической точки зрения является конкретизацией общей многоэтапной задачи стохастического программирования, изученной в главе II:

$$M\left(\sum_{i=0}^{N}(a_i(\theta),\ x_i(\theta))\right) \to \max, \qquad (4.1)$$

$$\sum_{t=0}^{N} A_t(\theta)\, x_t(\theta) + b(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}, \tag{4.2}$$

$$x_t(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}} \qquad (t = \overline{0, N}), \tag{4.3}$$

$$x_t(\theta) \in I(\mathfrak{M}_t) \qquad (t = \overline{0, N}). \tag{4.4}$$

По-прежнему $I(\mathfrak{M}_t)$ — множество $\mathfrak{M}_t$ — измеримых вектор-функций от θ, размерность которых совпадает с размерностью вектора x_t; $\mathfrak{M}_t$ — σ-подалгебра основной σ-алгебры $\mathcal{F}$. В дальнейшем, с целью сделать запись более компактной, зависимость величины A_t, a_t и b от θ иногда указывать не будем.

Сделаем следующие предположения.

P1. $\qquad \mathsf{M} a_{ij}^2(\theta) < \infty \qquad (i = \overline{0, m}; \quad j = \overline{1, n});$

$\mathsf{M}\, |b(\theta)|^2 < \infty.$

P2. Для произвольного вектора $x(\theta)$, удовлетворяющего (4.3)—(4.4) и имеющего компоненты с ограниченными вторыми моментами, векторы вида $A_t x_t(\theta)$ также имеют компоненты с ограниченными вторыми моментами.

P3. Для задачи (4.1)—(4.4) существует оптимальное решение, причем для произвольного оптимального решения $x^*(\theta)$

$$\mathsf{M}\, |x^*(\theta)|^2 < \infty.$$

Сделанные предположения позволяют задачу (4.1)—(4.4) рассматривать как задачу в гильбертовом пространстве с операторными ограничениями. Функционал Лагранжа для задачи (4.1)—(4.4) имеет вид

$$\varphi(x(\theta), u(\theta)) = \mathsf{M}\,(a, x(\theta)) + \mathsf{M}\left(u(\theta), \sum_{t=0}^{N} A_t x_t(\theta) + b\right),$$

а двойственная задача — вид

$$\sup_{\substack{x(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}} \\ x_t(\theta) \in I(\mathfrak{M}_t) \quad (t=\overline{0,N})}} \varphi(x(\theta), u(\theta)) \xrightarrow[\substack{u(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}} \\ u(\theta) \in L_2(\Theta, \mathcal{F}, \mathsf{P})}]{} \inf, \tag{4.5}$$

И, наконец, четвертое предположение:

P4. Существует оптимальное решение задачи (4.5).

Важную роль в дальнейшем играет

2. Аналог второй теоремы двойственности в многоэтапных линейных задачах стохастического программирования.

Теорема 4.1. *Пусть выполняются условия* P1 — P4. *Для того чтобы вектор*

$$x^*(\theta) = (x_0^*(\theta), \ldots, x_N^*(\theta)) \geqslant 0 \ (\mathrm{mod}\, \mathsf{P}),$$

где $x_t^*(\theta)$ — $\mathfrak{M}_t$*-измеримая вектор-функция, был решением задачи* (4.1) — (4.4), *необходимо и достаточно существования* $\mathcal{F}$*-измеримого вектора*

$$u^*(\theta) = (u_1^*(\theta), \ldots u_m^*(\theta)) \geqslant 0 \ (\mathrm{mod}\, \mathsf{P}),$$

каждая компонента которого имеет ограниченный второй момент, такого, что

$$\mathsf{M}\,(A_t' u^*(\theta) + a_t/\mathfrak{M}_t) \leqslant 0 \ (\mathrm{mod}\, \mathsf{P}) \qquad (t = \overline{0, N}), \tag{4.6}$$

$$(x_t^*(\theta), \mathsf{M}\,(A_t' \, u^*(\theta) + a_t/\mathfrak{M}_t)) = 0 \ (\mathrm{mod}\, \mathsf{P}) \qquad (t = \overline{0, N}), \tag{4.7}$$

$$\sum_{t=0}^{N} A_t x_t^*(\theta) + b \geqslant 0 \ (\mathrm{mod}\, \mathsf{P}), \tag{4.8}$$

$$\left(u^*(\theta), \ \sum_{t=0}^{N} A_t x_t^*(\theta) + b\right) = 0 \ (\mathrm{mod}\, \mathsf{P}). \tag{4.9}$$

Нетрудно заметить, что утверждение теоремы 4.1 можно получить как частный случай аналога теоремы Куна — Таккера в дифференциальной форме для нелинейных многоэтапных задач, полученного в главе II. Однако предположения теоремы 4.1 более экономны по сравнению с предположениями указанной теоремы. В линейном случае требуется ограниченность вторых моментов для компонент векторов $A_t x_t(\theta)$ для всех $\mathfrak{M}_t$-измеримых векторов $x_t(\theta) \in L_2(\Theta, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, а не просто для всех $x_t(\theta) \in L_2(\Theta, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Это первая причина, которая побудила нас привести доказательство теоремы для линейного случая. Вторая — бо́льшая наглядность рассуждений в линейном случае.

Доказательство теоремы базируется на использовании теоремы Куна — Таккера в конечной форме и некоторых свойств условных математических ожиданий.

Из теоремы о седловой точке следует, что необходимым и достаточным условием оптимальности вектора $x^*(\theta) = (x_0^*(\theta), \ldots x_N^*(\theta))$, где $x_t^*(\theta)$ — $\mathfrak{M}_t$-измеримы и $x^*(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}$, является существование $\mathcal{I}$-измеримого вектора $u^*(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}$ такого, что

$$\varphi(x(\theta), u^*(\theta)) \leqslant \varphi(x^*(\theta), u^*(\theta)) \leqslant \varphi(x^*(\theta), u(\theta)), \qquad (4.10)$$

для всех $\mathfrak{M}_t$-измеримых функций $x_t(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}$ и для всех $\mathcal{I}$-измеримых функций $u(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}$.

Левая часть неравенства (4.10) эквивалентна соотношению

$$\sum_{t=0}^{N} \mathsf{M}\,(A_t' u^*(\theta) + a_t,\ x_t(\theta)) \leqslant \leqslant \sum_{t=0}^{N} \mathsf{M}\,(A_t' u^*(\theta) + a_t,\ x_t^*(\theta)) \qquad (4.11)$$

для произвольных $\mathfrak{M}_t$-измеримых $x_t(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}$. Предположим, что не выполняется (4.6), т. е. существует $j \in U_t$ и событие

$$B = \{\theta\colon\ \mathsf{M}\,((\bar{a}^j, u^*(\theta)) + a_{0j}/\mathfrak{M}_t) > 0\},$$

где $\bar{a}^j = (a_{1j}, \ldots a_{nj})$, такое, что $\mathsf{P}(B) > 0$. Заметим, что $B \in \mathfrak{M}_t$. В противном случае это противоречило бы $\mathfrak{M}_t$-измеримости $\mathsf{M}(\cdot/\mathfrak{M}_t)$. Определим $\mathfrak{M}_t$-измеримую функцию

$$x_j(\theta) = \begin{cases} C, & \theta \in B, \\ 0, & \theta \in \bar{B}. \end{cases}$$

Очевидно, что при достаточно большом C и при $x_j(\theta)$, выбранным в соответствии с предыдущей формулой, неравенство (4.11) выполняться не будет. Следовательно, (4.6) имеет место.

Из (4.6) следует, что

$$(x_t^*(\theta),\ \mathsf{M}\,(A_t' u^*(\theta) + a_t/\mathfrak{M}_t)) \leqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}.$$

Докажем, что из последнего соотношения следует (4.7).

Предположив противное, имеем

$$\mathsf{M}\,(x_t^*(\theta),\ \mathsf{M}\,(A_t'u^*(\theta)+a_t/\mathfrak{M}_t))<0.$$

Поскольку $\xi\mathsf{M}\,(\eta/\mathfrak{M})=\mathsf{M}\,(\xi\eta/\mathfrak{M})$ и $\mathsf{M}\,\mathsf{M}\,(\eta/\mathfrak{M})=\mathsf{M}\eta$, где ξ—$\mathfrak{M}$-измеримая случайная величина, то из последнего соотношения следует, что

$$\mathsf{M}\,(A_t'u^*(\theta)+a_t,\ x_t^*(\theta))<0.$$

Последнее неравенство противоречит (4.11), а поэтому предположение о том, что (4.11) ложно, несправедливо.

Таким образом, мы доказали, что из (4.11) следует (4.6) и (4.7). Доказательство обратного утверждения достаточно просто, и мы приводить его не будем.

Нетрудно видеть, что правая часть неравенства (4.11), эквивалентная неравенству

$$\mathsf{M}\left(u^*(\theta),\ \sum_{t=0}^{N}A_tx_t^*(\theta)+b\right)\leqslant\mathsf{M}\left(u(\theta),\ \sum_{t=0}^{N}A_tx_t^*(\theta)+b\right),$$

будет справедлива в том и только том случае для всех $\mathcal{F}$-измеримых $u(\theta)\geqslant0$ (mod P), $u(\theta)\in L_2$, если выполняются соотношения (4.8), (4.9). Теорема доказана.

Анализ доказательства теоремы показывает, что допустимым вектором может быть лишь решение двойственной задачи к задаче (4.1)—(4.4). Используя рассуждения, которые во многом сходны с приведенными в теореме 4.1, можно доказать, что задача (4.8), двойственная к линейной многоэтапной стохастической задаче, имеет следующий вид: найти такой $\mathcal{F}$-измеримый вектор $u^*(\theta)$, чтобы

$$\mathsf{M}\,(b,\ u(\theta))\to\inf,$$

$$\mathsf{M}\,(A_t'u(\theta)+a_t/\mathfrak{M}_t)\leqslant0\ (\mathrm{mod}\,\mathsf{P})\qquad(t=\overline{0,\ N}),\tag{4.12}$$

$$u(\theta)\geqslant0\ (\mathrm{mod}\,\mathsf{P}),\qquad\mathsf{M}\,|u(\theta)|^2<\infty.$$

Отсюда основное соотношение двойственности для многоэтапной линейной стохастической задачи примет вид:

Теорема 4.2. *Пусть выполняются предположения теоремы 4.1. Тогда*

$$\mathsf{M}\,(a,\ x^*(\theta))=\mathsf{M}\,(b,\ u^*(\theta)),\tag{4.13}$$

где $a=(a_0,\ a_1,\ \ldots\ a_N)$.

3. Соотношения двойственности для двухэтапной задачи стохастического программирования. Важным случаем многоэтапной стохастической задачи является двухэтапная задача стохастического программирования

$$\begin{aligned} &\mathsf{M}\ ((a, x) + (d, y(\theta))) \to \max, \\ &Ax + Dy(\theta) + b \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}, \\ &x \geqslant 0, \quad y(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Конкретизируем некоторые результаты предыдущего пункта применительно к двухэтапной задаче.

Двойственная к двухэтапной задача имеет вид

$$\begin{gathered} \mathsf{M}\ (b, u(\theta)) \to \min, \\ \mathsf{M}\ (A'u(\theta) + a) \leqslant 0, \\ D'u(\theta) + d \leqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}, \quad u(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}, \end{gathered} \tag{4.15}$$

где $u(\theta)$ — $\mathcal{J}$-измерима и $\mathsf{M}\,|u(\theta)|^2 < \infty$.

Теорема 4.1 применительно к двухэтапной задаче формулируется следующим образом.

Теорема 4.3. *Пусть матрица A, векторы a, b, d имеют компоненты с ограниченными вторыми моментами, матрица D ограничена с вероятностью* 1 *и существуют решения задач* (4.14), (4.15), *компоненты которых имеют ограниченные вторые моменты. Тогда детерминированный вектор $x^* \geqslant 0$ и $\mathcal{J}$-измеримый вектор $y^*(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}$ являются решением задачи* (4.14) *тогда и только тогда, когда существует $\mathcal{J}$-измеримый вектор $u^*(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}$, $\mathsf{M}\,|u^*(\theta)|^2 < \infty$ такой, что*

$$\begin{gathered} \mathsf{M}\ (A'u^*(\theta) + a) \leqslant 0, \qquad (x^*, \mathsf{M}(A'u^*(\theta) + a)) = 0, \\ D'u^*(\theta) + d \leqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}, \qquad (y^*(\theta), D'u^*(\theta) + d) = 0 \pmod{\mathsf{P}}, \\ Ax^* + Dy^*(\theta) + b \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}, \\ (u^*(\theta), Ax^* + Dy^*(\theta) + b) = 0 \pmod{\mathsf{P}} \end{gathered}$$

Вектор $u^*(\theta)$ является решением двойственной задачи.

4. Общие замечания. Предположения, которые были сделаны при выводе соотношений двойственности для задач стохастического программирования, являются довольно естественными с экономической точки зрения и для экономически осмысленных моделей, как правило, выполняются.

Выполнение предположения P1 для экономико-математических моделей с вероятностными параметрами очевидно. Выполнение предположения P2 гарантируется ограниченностью с вероятностью 1 коэффициентов матриц $A_t(\theta)$. Поскольку в экономических приложениях в основном используются усеченные законы распределения, то становится понятной необременительность P2. Иногда требование ограниченности $A_t(\theta)$ с вероятностью 1 можно для некоторых матриц, например, матрицы $A(\theta)$ в двухэтапной задаче, заменить на требование ограниченности вторых моментов.

Существование оптимальных решений в рассматриваемых задачах стохастического программирования следует из выпуклости функций, замкнутости множеств и ограниченности множеств допустимых решений по норме $\|\cdot\| = \sqrt{\mathsf{M}|\cdot|^2}$. Ограниченность по норме допустимых решений прямой задачи очевидна с экономической точки зрения и просто проверяется в конкретных моделях.

Ограниченность по норме допустимых решений двойственной задачи, как правило, следует из условия существования такого t, что

$$\mathfrak{M}_t = \mathcal{J}. \tag{4.16}$$

Поскольку для $\mathcal{T}$-измеримых $\mathsf{M}(\eta/\mathcal{J}) = \eta \pmod{\mathsf{P}}$, то выполнение этого условия означает существование в двойственной задаче ограничений типа

$$A'_t(\theta)\,u(\theta) + a_t(\theta) \leqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}.$$

Подобным ограничениям, как правило, удовлетворяют лишь $u(\theta)$, ограниченные с вероятностью 1 или по норме $\|\cdot\| = \sqrt{\mathsf{M}|\cdot|^2}$.

Содержательный смысл условия (4.16) состоит в том, что часть плана должна приниматься при полной информации о состоянии природы. Заметим, что это условие в стохастических моделях производства, как правило, выполняется и, более того, условие (4.16) обязательно для того, чтобы модель была содержательной, поскольку невыполнение условия (4.16) приводит к тому, что в случае двухэтапной модели называется «жесткой» постановкой.

В главах V и VI приведены некоторые примеры проверки условий выполнения соотношений двойственности для прикладных стохастических моделей.

5. Соотношения двойственности для стохастической модели производства с конечным числом состояний природы. Рассмотрим стохастическую модель производства, в которой состояние природы принимает конечное число реализаций. Для простоты ограничимся рассмотрением трехэтапной модели. Запись модели с конечным числом состояний природы и соотношений двойственности для нее в более общем случае производится совершенно аналогично трехэтапному случаю.

Пусть состояние природы θ — случайный вектор, который принимает с положительными вероятностями значения

$$\theta_{11},\ \theta_{12},\ \ldots\ \theta_{1r_1},\ \theta_{21},\ \theta_{22},\ \ldots\ \theta_{2r_2},\ \ldots\ \theta_{s1},\ \theta_{s2},\ \ldots\ \theta_{sr_s}.$$

Возможны три типа измерений, уточняющих информацию о состояниях природы θ. Каждому типу измерений соответствует множество технологических способов, которые можно применять после получения определенной порции информации о состоянии θ. В результате измерения первого типа плановый орган не получает дополнительной информации о θ, т. е. измерения фактически не производятся. В данном случае σ-алгебра наблюдаемых событий состоит из двух событий: достоверного и невозможного. Измеримость вектора интенсивностей x_0 технологических способов, которые можно применять после измерений первого типа, относительно тривиальной σ-подалгебры $\{\Theta, \varnothing\}$ означает, что x_0 выбирается как детерминированный вектор.

В результате измерений третьего типа плановый орган получает абсолютно точную информацию о состоянии природы θ, т. е. имеет возможность наблюдать все события вида $B_{kl} = \{\theta = \theta_{kl}\}$. σ-алгебра наблюдаемых событий в данном случае является минимальной содержащей класс событий $\mathscr{E}_2 = \{B_{kl}\}_{l=\overline{1, r_k}, k=\overline{1, s}}$. Будем обозначать эту σ-алгебру через $\sigma(\mathscr{E}_2)$.

Нетрудно сообразить, что измеримость вектора интенсивностей способов, которые можно применять после эксперимента третьего типа, означает, что $x_2(\theta)$ представим в виде

$$x_2(\theta) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{l=1}^{r_k} x_{kl} \chi_{B_{kl}}, \tag{4.17}$$

где $\chi_{B_{kl}}$ — индикатор события B_{kl}.

И наконец, в результате измерений второго типа состояние природы уточняется, но не полностью. После измерений второго типа можно сказать о том, произошли или нет события вида

$$B_k = \bigcup_{l=1}^{r_k} B_{kl} \qquad (k = \overline{1,s}).$$

Другими словами, измерения производятся, но с погрешностями, поскольку результатом измерения является не точка, а область, в которой находится действительное значение θ. Обозначим систему множеств $\{B\}_{k=\overline{1,s}}$ через $\mathscr{E}_1$, а σ-алгебру всех наблюдаемых событий после эксперимента, т. е. минимальную σ-алгебру, содержащую класс $\mathscr{E}_1$, через $\sigma(\mathscr{E}_1)$. Измеримость вектора интенсивностей $x_1(\theta)$ относительно $\sigma(\mathscr{E}_1)$ означает, что $x_1(\theta)$ представим в виде

$$x_1(\theta) = \sum_{k=1}^{s} x_k \chi_{B_k}. \tag{4.18}$$

Поставим трехэтапную задачу, которая имеет вид

$$\begin{gathered}
\mathsf{M}\,((a_0(\theta), x_0(\theta)) + (a_1(\theta), x_1(\theta)) + (a_3(\theta), x_3(\theta))) \to \max, \\
A_0(\theta)\,x_0(\theta) + A_1(\theta)\,x_1(\theta) + A_2(\theta)\,x_2(\theta) + \\
+ b(\theta) \geqslant 0 \,(\mathrm{mod}\ \mathsf{P}), \qquad (4.19) \\
x_t(\theta) \geqslant 0 \,(\mathrm{mod}\ \mathsf{P}) \qquad (t = \overline{0,2}), \\
x_t(\theta) \in I(\mathfrak{M}_t) \qquad (t = \overline{0,2}),
\end{gathered}$$

где

$$\mathfrak{M}_0 = \{\Theta, \varnothing\}, \quad \mathfrak{M}_1 = \sigma\{\mathscr{E}_1\}, \quad \mathfrak{M}_2 = \sigma(\mathscr{E}_2).$$

Для этого вместо $x_0(\theta)$ подставим x, а вместо $x_1(\theta)$ и $x_2(\theta)$ — их выражения через уравнения (4.17), (4.18) В результате несложных выкладок можно доказать, что решением задачи (4.19) являются векторы x, $x_1(\theta)$ и $x_2(\theta)$, определяемые по формулам (4.17), (4.18), где x, x_k $(k=\overline{1, s})$ и x_{kl} $(l=\overline{1, r_k};\ k=\overline{1, s})$ являются решением задачи линейного программирования

$$(\bar{a}_0, x_0)+\sum_{k=1}^{s}(a_{1k}, x_k)\,p_k+\sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{r_k}(a_{2kl}, x_{kl})\,p_{kl}\to\max,$$

$$A_{kl}^0 x+A_{kl}^1 x_k+A_{kl}^2 x_{kl}+b_{kl}\geqslant 0$$

$$(l=\overline{1, r_k};\ k=\overline{1, s}), \tag{4.20}$$

$$x\geqslant 0,\quad x_k\geqslant 0\qquad (k=\overline{1, s}),$$

$$x_{kl}\geqslant 0\qquad (l=\overline{1, r_k};\ k=\overline{1, s}),$$

где

$$a_{1k}=\mathsf{M}\,(a_1/B_k),\quad p_{kl}=\mathsf{P}\,(B_{kl}),\quad p_k=\mathsf{P}\,(B_k).$$

Заметим, что задача (4.19) — задача в естественной форме, поскольку $\mathfrak{M}_0=\{\Theta, \varnothing\}$, $\mathfrak{M}_2=\mathcal{F}$. В соответствии с (4.12) двойственная задача к (4.19) или (4.20) формулируется следующим образом: найти такой $\mathcal{F}$-измеримый вектор $u(\theta)$, т. е. вектор, представимый в виде

$$u(\theta)=\sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{r_k}u_{kl}\chi_{B_{kl}}, \tag{4.21}$$

являющимся решением задачи

$$\mathsf{M}\,(b, u(\theta))\to\min,$$

$$\mathsf{M}\,(A_0'u(\theta)+a_0)\leqslant 0,$$

$$\mathsf{M}\,(A_1'u(\theta)+a_1/\mathfrak{M}_1)\leqslant 0\ (\mathrm{mod}\,\mathsf{P}), \tag{4.22}$$

$$A_2'u(\theta)+a_2\leqslant 0\ (\mathrm{mod}\,\mathsf{P}),\quad u(\theta)\geqslant 0\ (\mathrm{mod}\,\mathsf{P}).$$

Если в (4.22) подставить $u(\theta)$, выраженное через (4.21), то задачу нахождения u_{kl}, которые определяют $u(\theta)$, можно записать следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{r_k}(b_{kl}, u_{kl})\,p_{kl}\to\min,$$

$$\sum_{k=1}^{s} \sum_{l=1}^{r_k} (A_{kl}^0)' u_{kl} p_{kl} + \bar{a}_0 \leqslant 0,$$

$$\sum_{l=1}^{r_s} (A_{kl}^1)' u_{kl} p_{kl} + a_{1k} \leqslant 0 \qquad (k = \overline{1, s}),$$

$$(A_{kl}^2)' u_{kl} + a_{2kl} \leqslant 0 \qquad (l = \overline{1, r_k};\ k = \overline{1, s}),$$

$$u_{kl} \geqslant 0 \qquad (l = \overline{1, r_k};\ k = \overline{1, r}).$$

Рассмотрим теперь задачу (4.20) как обычную задачу линейного программирования и по обычным правилам построим двойственную к ней задачу. Пусть λ_{kl}^* — двойственные оценки к задаче линейного программирования (4.20). Как и следовало ожидать, λ_{kl}^* довольно тесно связаны с $u^*(\theta)$. Путем элементарной подстановки можно показать, что

$$u_{kl}^* = \frac{1}{p_{kl}} \lambda_{kl}^*,$$

$$u^*(\theta) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{l=1}^{r_k} \frac{\lambda_{kl}^*}{p_{kl}} \chi_{B_{kl}}.$$

Аналогично конкретизируются и теоремы 4.1 и 4.2 для задачи с конечным числом состояний природы.

§ 2. Экономическая интерпретация соотношений двойственности для стохастической модели производства. Стохастические оценки ингредиентов

Суть математического подхода к теоретическому изучению экономических систем вкратце состоит в следующем: та или иная изучаемая проблема формулируется в терминах строгой математической модели, а затем производится ее анализ, который базируется на качественных свойствах модели. Выводы об изучаемой экономической проблеме, сделанные подобным образом, приобретают характер математических теорем и, следовательно, их теоретическая и практическая ценность зависит всецело от того, насколько адекватно модель отражает экономическую систему в целом. Этот подход будет нами применяться к изучению некоторых проблем теории оптимального планирования, ставших уже традиционными, причем в качестве инструмента анализа будет выступать стохастическая модель производства, которая по сравнению с линейными моделями учитывает неопределенность процессов получения информации плановым органом.

Важной проблемой, к которой будут применены результаты анализа на основании стохастической модели производства, является проблема существования и поиска некоторых равновесных цен в оптимальных стохастических системах. В общем виде эта проблема формулируется следующим образом: существует ли некоторая система цен на все ингредиенты, делающая убыточным применение технологических способов, не входящих в оптимальный план, и стимулирующая применение оптимальных технологических способов?

Для большей наглядности наших рассуждений рассмотрим вначале более простую ситуацию, которая не выходит за рамки описываемой в § 1 гл. I двухэтапной стохастической модели производства.

1. Двухэтапная стохастическая модель производства. Конкретизация данной проблемы к вероятностным экономическим системам, описываемым стохастической моделью производства, связана с модификацией понятия убыточность и рентабельность в некоторой системе цен для программных и адаптивных технологических способов.

Коррекционный способ для различных реализаций случайных параметров может входить в оптимальный план, а может и не входить. Поэтому для такого способа система цен должна давать информацию о рентабельности способа для *каждой реализации случайных параметров*. Программный способ является оптимальным или нет, независимо от конкретных реализаций случайных параметров, поэтому рентабельность способа может пониматься лишь как средняя величина. Таким образом, речь идет о существовании цен, делающих в среднем оправданным применение оптимальных программных коррекционных способов для конкретных реализаций случайных параметров. Соответственно, неоптимальные программные способы должны быть в среднем нерентабельными, а неоптимальные коррекционные способы—нерентабельными для конкретных реализаций случайных параметров. Полностью ответ на вопрос о существовании подобной системы цен дается теоремой 4.4.

Теорема 4.4. (О характеристике оптимального плана двухэтапной стохастической модели производства). *Пусть выполняются предположения теоремы 4.3. Тогда для того, чтобы допустимый план* $(x^*, y^*(\theta))$ *был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой* $\mathcal{J}$*-измеримый вектор цен на ингредиенты*

$$\pi^*(\theta) = (\pi_0^*, \pi_1^*(\theta), \ldots \pi_m^*(\theta)), \qquad \mathsf{M}\,|\pi^*(\theta)|^2 < \infty,$$

что:

1. *а) Программные способы в этих ценах были не более, чем оправданы в среднем*

$$\mathsf{M}(a^j, \pi^*(\theta)) \leqslant 0 \qquad (j = \overline{1, n});$$

б) коррекционные способы в этих ценах п. н. не более, чем оправданы

$$(d^k, \pi^*(\theta)) \leqslant 0 \,(\mathrm{mod}\, \mathsf{P}) \qquad (k = \overline{1, l}).$$

2. *а) Если программный способ используется в оптимальном плане, то он в среднем оправдан, или если*

$$x_j^* > 0, \text{ то } \mathsf{M}(a^j, \pi^*(\theta)) = 0 \qquad (j = \overline{1, n});$$

б) если для некоторых реализаций случайных параметров коррекционный способ используется в оптимальном плане, то этот способ для тех же реализаций (за исключением множества реализаций меры нуль) случайных параметров оправдан, т. е. если $y_k^*(\theta) > 0$, *то* $(d^k, \pi^*(\theta)) = 0$.

3. $\pi^*(\theta) \geqslant 0 \,(\mathrm{mod}\, \mathsf{P})$; $\pi_0 > 0$ — *произвольная детерминированная величина.*

4. *Если для некоторых реализаций случайных параметров некоторый ингредиент недефицитен, то для тех же реализаций случайных параметров цена на этот ингредиент равна нулю (за исключением множества случайных параметров меры 0) или, если*

$$\sum_{j=0}^{n} a_{ij}x_j^* + \sum_{k=1}^{l} d_{ik}y_k^*(\theta) + b_i > 0,$$

то $\pi_i^*(\theta) = 0$.

Нетрудно заметить, что вектором цен, фигурирующим в теореме 4.4, может быть лишь вектор вида

$$\pi^* (\theta) = (\pi_0^*, \pi_0^* u_1^* (\theta), \ldots \pi_0^* u_m^* (\theta)),$$

где $u^* (\theta) = (u_1^* (\theta), \ldots u_m^* (\theta))$ — решение двойственной задачи к (4.1) — (4.4). Справедливость теоремы о характеристике следует из теоремы 4.3.

Запишем двойственную задачу к стохастической модели производства в виде

$$\mathsf{M} \left(\sum_{i=1}^{m} b_i \pi_i (\theta) \right) \to \min,$$

$$\mathsf{M} (a^j, \pi (\theta)) \leqslant 0 \qquad (j = \overline{1, n}),$$

$$(d^k, \pi (\theta)) \leqslant 0 \pmod{\mathsf{P}} \qquad (k = \overline{1, l}),$$

$$\pi (\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}, \quad \pi_0 = C \ (C \text{ — константа}).$$

Экономический смысл задачи состоит в нахождении системы цен, минимизирующей ожидаемое значение оценки ресурсов в этих ценах при условии, что программные и коррекционные способы не более чем оправданы в среднем и с вероятностью 1 соответственно.

Из теоремы 4.2 следует, что

$$\mathsf{M} (a, x^* (\theta)) = \frac{1}{\pi_0^*} \mathsf{M} \left(\sum_{i=1}^{m} b_i \pi_i^* (\theta) \right),$$

т. е. в оптимальном плане ожидаемое значение нулевого ингредиента равно минимальной ожидаемой оценке ресурсов в ценах π_i^*.

Нетрудно заметить, что вектор $\pi^* (\theta)$ по своим экономико-математическим свойствам весьма близок к объективно обусловленным оценкам детерминированной модели производственного планирования, а теорема 4.4 — к теореме о характеристике оптимального плана для линейно-программной модели. Вектор $\pi^* (\theta)$ в дальнейшем будем называть вектором стохастических объективно обусловленных оценок или, более кратко, *стохастическими оценками*.

Условия 1.б, 2.б, 3 и 4 теоремы 4.4 показывают, что стохастические оценки являются одним из решений двойственной задачи к задаче

$$(d(\theta), y) \rightarrow \max, \qquad (4.23)$$
$$D(\theta)\, y \geqslant -b(\theta) - A(\theta)\, x^*, \quad y \geqslant 0,$$

Если предполагать, что решение двойственной задачи к (4.23) единственно (довольно частый случай в практических задачах), то теорема о характеристике оптимального плана дает довольно удобный признак проверки на оптимальность некоторого плана-программы $\tilde{x}$. Для этого достаточно «проиграть» двойственную задачу к (4.23) и с помощью метода Монте-Карло подсчитать средний эффект в случайных ценах для программных способов. Если выполняются условия 1.а и 2.а теоремы 4.4, то план $\tilde{x}$ оптимальный, в противном случае — существует другой план с лучшим значением целевой функции. В случае, если задача (4.23) с вероятностью больше нуля вырождена, а двойственная к ней имеет неединственное решение, способ проверки некоторого плана-программы на оптимальность усложняется, но тем не менее остается с вычислительной точки зрения вполне приемлемым.

Основной вывод, который можно сделать, базируясь на анализе теоремы о характеристике, это принципиальная возможность соизмерения затрат и результатов с помощью некоторой системы цен с точки зрения глобального критерия оптимальности для локальных производственных ячеек (технологических способов) в стохастических экономических системах. Если предполагать, что существует глобальный критерий и стохастическая модель производства описывает народное хозяйство в целом, то ценами, приводящими в состояние гармонии народнохозяйственные и локальные интересы, могут быть стохастические оценки ингредиентов.

Перейдем к экономической интерпретации соотношений двойственности в общем случае.

2. Многоэтапная стохастическая модель. Выясним экономический смысл показателя

$$\mathsf{M}\,((a^j, \pi^*(\theta))/\mathfrak{M}), \qquad (4.24)$$

где $a^j = (a_{0j}, a_{1j}, \ldots a_{mj})$ — вектор технологического способа j; $\pi^*(\theta)$ — вектор цен; $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{F}$.

Очевидно, что величина

$$\xi(\theta) = (a^j, \pi^*(\theta))$$

показывает фактическую прибыль от применения с единичной интенсивностью способа j при фиксированном состоянии природы θ. Используя известную формулу, запишем условное математическое ожидание через условную вероятность

$$\mathsf{M}(\xi(\theta)/\mathfrak{M}) = \int \xi(\theta)\,\mathsf{P}(d\theta/\mathfrak{M})\ (\mathrm{mod}\ \mathsf{P}), \tag{4.24'}$$

где $\mathsf{P}(A/\mathfrak{M})$ — условная вероятность относительно σ-подалгебры $\mathfrak{M}$*). Поскольку $\mathsf{P}(A/\mathfrak{M})$ показывает вероятность событий из $\mathcal{F}$, зависящую от результатов эксперимента $\mathfrak{M}$, то, используя формулу (4.24′), показатель (4.24) можно понимать как среднее значение прибыли, взвешенное по вероятности, которая зависит от исходов эксперимента $\mathfrak{M}$ Более кратко можно сказать так: $\mathsf{M}((a^j, \pi^*(\theta))/\mathfrak{M})$ является средней прибылью от способа j при условии $\mathfrak{M}$. Таким образом, исход эксперимента в данном случае трактуется как уточнение вероятностей событий основной σ-алгебры $\mathcal{F}$. Сформулируем теорему 4.1 на языке «план-цены».

Теорема 4.5. (Теорема о характеристике для многоэтапной стохастической модели.) *Пусть выполняются предположения* P1 — P4. *Допустимый план* $x^*(\theta) = (x_1^*(\theta), \ldots$ $\ldots x_N(\theta))$ *будет оптимальным тогда и только тогда, когда существует такой $\mathcal{F}$-измеримый вектор цен* $\pi^*(\theta) =$ $= (\pi_0^*, \pi_1^*(\theta), \ldots \pi_m^*(\theta))$, *что* $\mathsf{M}\,|\pi^*(\theta)|^2 < \infty$.

1. $\mathsf{M}((a^j, \pi^*(\theta))/\mathfrak{M}_t) \leqslant 0\ (\mathrm{mod}\,\mathsf{P})$ $\quad (j \in U_t;\ t = \overline{0, N})$;

2. *с вероятностью* 1, *если* $x_j^*(\theta) > 0$, *то*

$$\mathsf{M}((a^j, \pi^*(\theta))/\mathfrak{M}_t) = 0 \quad \text{для} \quad j \in U_t;$$

---

*) Формула (4.24′) справедлива лишь тогда, когда $\mathsf{P}(A/\mathfrak{M})$ — регулярная условная вероятность. Однако $\mathsf{P}(A/\mathfrak{M})$ является регулярной в довольно широких случаях, в частности, когда Θ — полное сепарабельное метрическое пространство, а $\mathcal{F}$ — σ-алгебра борелевских множеств, что для наших целей вполне достаточно.

3. $\pi^*(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathrm{P}}$, π_0^* — *детерминированная величина строго больше нуля*;

4. *с вероятностью* 1, *если* $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j^*(\theta) + b_i > 0$, *то* $\pi_i^*(\theta) = 0$.

Так же как и в двухэтапной задаче, вектором $\pi^*(\theta)$ может быть лишь вектор вида $(\pi_0^*, \pi_0^* u_1^*(\theta), \dots \pi_0^* u_m^*(\theta))$.

Учитывая замечания, сделанные в начале пункта и экономическую интерпретацию теоремы 4.4, трактовка теоремы 4.5 не представляет труда. Для многоэтапной модели теорема 4.2 имеет похожий экономический смысл, как и для двухэтапной задачи.

Так же как и в случае двухэтапной модели, вектор $\pi^*(\theta)$ будем называть вектором стохастических объективно обусловленных оценок или *вектором стохастических оценок ингредиентов.*

§ 3. Маргинальные свойства стохастических оценок и их экономическая интерпретация

При теоретическом исследовании и практическом использовании математических моделей экономики чрезвычайно полезно знать насколько изменится оптимальное решение при малом изменении некоторой группы параметров. Соотношения, устанавливающие связь между изменениями параметров и изменениями оптимального решения и оптимального значения максимизируемого функционала, получили название *маргинальных*. В этом параграфе мы докажем некоторые маргинальные соотношения для стохастической модели производства и дадим им экономическую интерпретацию.

1. Основное маргинальное свойство стохастических оценок. Будем рассматривать оптимальное решение задачи (4.1)—(4.4) как вектор-функцию от величины ресурсов. Имеет место

Теорема 4.6. *Пусть для задачи* (4.1)—(4.4) *выполняются предположения* P1, P2, *а также в некоторой окрестности* $b(\theta)$, *заданной с помощью метрики* $\rho(\xi(\theta), \eta(\theta)) = \sqrt{\mathrm{M}(\xi(\theta) - \eta(\theta))^2}$, *выполняется предположение* P3. *Кроме того, предполагается, что множество допу-*

стимых решений двойственной задачи ограничено. Тогда

$$\mathsf{M}(a, x(\theta, b+\gamma e(\theta))) =$$

$$= \mathsf{M}(a, x(\theta, b)) + \gamma \mathsf{M}(e(\theta), u_e(\theta)) + o(\gamma),$$

где $e(\theta)$ *— случайный вектор такой, что* $\mathsf{M}|e(\theta)|^2 < \infty$; $\gamma > 0$; $u_e(\theta)$ *— решение задачи*

$$\mathsf{M}(e(\theta), u(\theta)) \to \min, \quad u(\theta) \in U^*; \tag{4.25}$$

$x(\theta, b)$ *— решение задачи* (4.1) — (4.4), *зависящее от* b; U^* *— множество решений двойственной задачи* (4.12).

Доказательство. Рассмотрим на $L_2(\Theta, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ функционал

$$\mu(b(\theta)) = \mathsf{M}(a, x(\theta, b)).$$

С помощью теоремы 4.2 $\mu(b(\theta))$ можно представить в виде

$$\mu(b(\theta)) = \min_{u(\theta)\in U} \mathsf{M}(b(\theta), u(\theta)), \tag{4.26}$$

где U — множество допустимых решений двойственной задачи.

Из ограниченности множества U (предположение теоремы), а также из замкнутости и выпуклости этого множества следует слабая компактность U и U^* относительно линейного функционала $l(\eta(\theta)) = \mathsf{M}(\xi(\theta), \eta(\theta))$. (Из слабой компактности U и U^*, а также из линейности функционалов задач (4.12) и (4.25) следует, кстати, существование решений этих задач.) Используя свойства выпуклых функционалов специального вида, а более точно, теорему о виде множества опорных функционалов функционала вида $\mu(x) = \max_{l\in M} l(x)$ (см. Б. Н. Пшеничный), а также (4.26), можно утверждать, что множество опорных функционалов для $\mu(b(\theta))$ совпадает с U^*. Применив известную формулу для производных по направлению выпуклых функционалов к функционалу $\mu(b(\theta))$ можно записать

$$\frac{\partial\mu(b(\theta))}{\partial e(\theta)} = \min_{u(\theta)\in U} \mathsf{M}(e(\theta), u(\theta)). \tag{4.27}$$

Из определения производных по направлению и (4.27) и следует доказательство теоремы.

Теорема 4.6 показывает, что из множества стохастических оценок можно выделить такие оценки, которые характеризуют экономическую эффективность каждого ресурса, т. е. являются мерой приращения критерия оптимальности при малом изменении ресурсов в некотором направлении.

С помощью теоремы 4.6 можно доказать для линейной многоэтапной стохастической задачи свойство, аналогичное свойству базисной устойчивости задачи линейного программирования.

2. **Базисная устойчивость стохастической модели производства.** Рассмотрим стохастическую модель производства

$$\mathsf{M}\left(\sum_{t=0}^{N}(a_t, x_t(\theta))\right) \to \max, \tag{4.28}$$

$$\sum_{t=0}^{N} A_t x_t(\theta) + b + \gamma e(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}, \tag{4.29}$$

$$x_t(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}} \qquad (t = \overline{0, N}), \tag{4.30}$$

$$x_t(\theta) \in I(\mathfrak{M}_t) \qquad (t = \overline{0, N}), \tag{4.31}$$

и двойственную к ней

$$\mathsf{M}\,(b + \gamma e(\theta), u(\theta)) \to \min, \tag{4.32}$$

$$\mathsf{M}\,(A_t' u(\theta) + a_t/\mathfrak{M}_t) \leqslant 0 \pmod{\mathsf{P}} \qquad (t = \overline{0, N}), \tag{4.33}$$

$$u(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}. \tag{4.34}$$

По-прежнему, $e(\theta)$ — $\mathcal{F}$-измеримый вектор и $\mathsf{M}\,|e(\theta)|^2 < \infty$.

Напомним, что решение двойственной задачи ищется на множестве $\mathcal{F}$-измеримых функций, а ограничение (4.31) означает, что подвектор решения $x_t(\theta)$ ищется как $\mathfrak{M}_t$-измеримая функция.

Обозначим через $X(b + \gamma e(\theta))$ и U множества допустимых решений задач (4.28) — (4.31) и (4.32) — (4.34) соответственно. Как и прежде, будем считать, что относительно многоэтапной модели выполняются предположения из § 1 настоящей главы. Имеет место следующая

Лемма 4.1. *Если* $x(\theta) \in X(b+\gamma e(\theta))$ *и* $u(\theta) \in U$, *то*

$$\mathsf{M}(b+\gamma e(\theta), u(\theta)) \geqslant -\mathsf{M}\left(\sum_{t=0}^{N} A_t x_t(\theta), u(\theta)\right) \geqslant$$
$$\geqslant \mathsf{M}(a, x(\theta)).$$

Доказательство. Умножив (4.29) на (4.34) и проинтегрировав полученное неравенство, доказываем левую часть неравенства леммы. Далее умножим (4.29) на (4.33); получаем

$$(x_t(\theta), \mathsf{M}(A_t' u(\theta) + a_t/\mathfrak{M}_t)) \leqslant 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathsf{P}). \qquad (4.35)$$

Поскольку $x_t(\theta)$ — $\mathfrak{M}_t$-измерим, то его можно внести под знак $\mathsf{M}(\cdot/\mathfrak{M}_t)$. Если после этого проинтегрировать полученные неравенства, просуммировать их по t и сделать некоторые несложные преобразования, то докажем правую часть неравенства леммы.

Для доказательства теоремы о базисной устойчивости нам понадобится

Лемма 4.2 (Ермольев [2]). *Пусть* h_s, $s = 0, 1, \ldots$ — *неотрицательные случайные величины*, $\mathsf{M}h_s < \infty$ *и* $\mathsf{M}h_s \to 0$ *при* $s \to \infty$. *Тогда существует подпоследовательность* $\{h_{s_k}\}$ *такая, что* $h_{s_k} \to 0$ *п. н.*

Сформулируем и докажем теорему, при тех же предположениях, что и теорему 4.6.

Теорема 4.7. *Пусть* $x(\theta, b+\gamma e(\theta))$ — *решение задачи* (4.28) — (4.31). *Имеют место следующие соотношения*:

$$1) \quad (x_t(\theta, b+\gamma e(\theta)), \mathsf{M}(A_t' u_e(\theta) + a_t/\mathfrak{M}_t)) =$$
$$= \varepsilon_t(\theta, \gamma) \quad (t = \overline{0, N});$$

$$2) \quad \left(u_e(\theta), \sum_{t=0}^{N} A_t x_t(\theta, b+\gamma e(\theta)) + b + \gamma e(\theta)\right) = \varepsilon(\theta, \gamma),$$

где $\varepsilon_t(\theta, \gamma)$ — $\mathfrak{M}_t$-*измеримые функции по* θ; $\varepsilon(\theta, \gamma)$ — $\mathcal{F}$-*измеримая функция по* θ *такие, что для любой последовательности* γ_s, *стремящейся к нулю при* $s \to \infty$, *можно выбрать такую подпоследовательность* γ_{s_k}, *что* $\varepsilon_t(\theta, \gamma_{s_k})\gamma_{s_k}^{-1} \to 0$ *и* $\varepsilon(\theta, \gamma_{s_k})\gamma_{s_k}^{-1} \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство. Поскольку $x(\theta, b+\gamma e(\theta)) \in X(b+ + \gamma e(\theta))$, и $u_e(\theta) \in U^* \subseteq U$, то из леммы 4.1 следует, что

$$M(b+\gamma e(\theta), u_e(\theta)) \geqslant -M\left(\sum_{t=0}^{N} A_t x_t(\theta, b+ + \gamma e(\theta)), u_e(\theta)\right) \geqslant M(a, x(\theta, b+\gamma e(\theta))). \quad (4.36)$$

Из теорем 4.6 и 4.2 следует, что

$$M(b+\gamma e(\theta), u_e(\theta)) = M(a, x(\theta, b+\gamma e(\theta))) + o(\gamma).$$

Отсюда неравенство (4.36) можно переписать в виде

$$M(a, x(\theta, b+\gamma e(\theta))) + o(\gamma) \geqslant -M\left(\sum_{t=0}^{N} A_t x_t(\theta, b+ + \gamma e(\theta)), u_e(\theta)\right) \geqslant M(a, x(\theta, b+\gamma e(\theta))),$$

или

$$M\left(\sum_{t=0}^{N} a_t x_t(\theta, b+\gamma e(\theta))\right) + + M\left(u_e(\theta), \sum_{t=0}^{N} A_t x_t(\theta, b+\gamma e(\theta))\right) = o(\gamma).$$

Учитывая то, что $x(\theta, b+\gamma e(\theta))$ и $u_e(\theta)$ должны удовлетворять (4.30), (4.33), из последнего соотношения следует

$$M(x_t(\theta, b+\gamma e(\theta)), A_t' u_e(\theta) + a_t) = o(\gamma) \quad (t = \overline{0, N}).$$

Используя свойства условных математических ожиданий, последнее соотношение можно преобразовать к виду

$$M(x_t(\theta, b+\gamma e(\theta)), M(A_t' u_e(\theta) + a_t/\mathfrak{M}_t)) = o(\gamma).$$

Для доказательства первого пункта теоремы осталось подметить, что для последовательности случайных величин

h_s^l, $s = 0, 1, \ldots$, где

$$h_s^l = -(x_l(\theta, b + \gamma_s e(\theta)), \mathsf{M}(A_l' u_e(\theta) + a_l/\mathfrak{M}_t))/\gamma_s,$$

$\gamma_s \to 0$ при $s \to \infty$, выполняются условия леммы 2.

Заменив в (4.36) $\mathsf{M}(a, x(\theta, b + \gamma e(\theta)))$ на $\mathsf{M}(b + \gamma e(\theta), u_e(\theta))$, получим, что

$$\mathsf{M}(b + \gamma e(\theta), u_e(\theta)) = \\ = -\mathsf{M}\left(\sum_{l=1}^{N} A_l x_l(\theta, b + \gamma e(\theta), u_e(\theta))\right) + o(\gamma).$$

Из последнего соотношения следует, что для случайных величин

$$h_s = \frac{\sum_{t=0}^{N} A_t x_t(\theta, b + \gamma_s e(\theta)) + b + \gamma_s e(\theta)}{\gamma_s},$$

выполняются условия леммы 4.2, откуда и следует доказательство второго пункта теоремы.

Из теорем 4.1 и 4.7 следует, что при малом изменении ресурсов ингредиентов в некотором направлении изменение оптимального плана происходит в основном за счет изменения интенсивностей «старых» оптимальных способов и при тех же состояниях природы; если в «старом» оптимальном плане некоторый ингредиент был дефицитным, то в «новом» оптимальном плане его избыток может быть лишь величиной более высокого порядка малости, чем приращение. Другими словами, набор оптимальных способов и дефицитных ингредиентов в стохастических экономических системах, описываемых моделью (4.1)—(4.4), устойчив.

Из теорем 4.6 и 4.7 видно, что достаточно хорошими свойствами, позволяющими судить о поведении оптимального решения возмущенной стохастической модели производства, обладает в общем случае не все множество решений двойственной задачи, а лишь некоторое его подмножество — решения задачи (4.25). Множество решений задачи (4.25) будем называть множеством стохастических оценок вектора $e(\theta)$, в направлении которого происходит изменение ресурсов ингредиентов.

§ 4. Модификация некоторых категорий теории оптимального планирования в стохастических экономических системах

Важную роль в развитии теории ценообразования в социалистической экономике сыграла концепция цен оптимального плана, выдвинутая Л. В. Канторовичем [1]. Сущность этой концепции состоит в том, что цены на все виды производственных ресурсов и потребительских товаров в плановой экономике должны определяться объективно обусловленными оценками. Несомненно, что применение этой идеи в чистом виде на практике весьма затруднительно по ряду причин, в частности, в связи с большими сложностями построения глобального критерия оптимальности, математического описания проблемы распределения и т. д. Однако теоретический анализ некоторых проблем ценообразования с помощью изучения и интерпретации двойственной задачи в ряде случаев оказывается полезным.

Концепция цен оптимального плана возникла на основе анализа и экономической интерпретации математических теорем двойственности в линейном программировании. С помощью этих теорем удалось формализовать такие категории политической экономии социализма, как эффективность общественного производства, оптимальный народнохозяйственный план, общественно необходимые затраты, цены и др. На основании этих формализаций были обоснованы важные выводы о способе сочетания централизованных и децентрализованных методов управления народным хозяйством, о характере действия закона стоимости в плановой экономике, о способах измерения затрат и результатов, предложены конкретные практические рекомендации по усовершенствованию методов планирования цен, измерения эффективности новой техники и т. д. Однако при всем этом ни в коем случае нельзя забывать об известной условности выводов, полученных на основании концепции цен оптимального плана, нельзя возводить эти выводы в абсолют. Об этом, кстати, неоднократно предупреждал и сам создатель концепции.

Подчеркнем еще раз, что концепция цен оптимального плана была развита на основе анализа линейно-программных и выпуклых моделей. Модели же линейного и выпуклого программирования зачастую не отражают некоторых сторон реальной экономической действительности, из которых, на наш взгляд, наиболее существенными являются наличие в экономической системе субъектов с несовпадающими (не обязательно противоположными) интересами и принципиальная невозможность получения плановым органом абсолютно точной информации. Учет первого фактора приводит к теоретико-игровым постановкам, второго — к моделям, сформулированным на основании задач стохастического программирования.

Важность первого фактора обусловлена тем, что лишь с его учетом возможен теоретический анализ с помощью математических моделей одной из центральных экономических проблем — проблемы распределения. Поскольку этот вопрос выходит далеко за пределы круга проблем, рассматриваемых в нашей книге, то он изучаться нами не будет, что, естественно, не говорит о его маловажности.

Учет второго фактора при теоретическом анализе плановой экономики приводит к некоторым важным выводам, которые значительно модифицируют и дополняют, однако отнюдь не опровергают, выводы, полученные на основании анализа экономики, соответствующей предположениям линейно-программной модели.

Так же как и в детерминированном случае, анализ стохастической модели производства основан на экономической интерпретации соотношений двойственности, на которой мы останавливались ранее. Подытожим основные экономико-математические свойства стохастической модели производства и стохастических оценок ингредиентов, полученные ранее (на некоторых мы остановимся более подробно), и опишем некоторую идеализированную экономику, которая полностью соответствует предположениям стохастической модели производства и которую мы будем называть *стохастической*.

Итак, рассматривается экономика, управляемая единственным субъектом, который мы будем называть *плановым органом*. Как отмечалось выше, мы абстрагируемся от факта наличия нескольких субъектов с несовпадающими интересами. Информация о параметрах технологических способов и ресурсах ингредиентов известна плановому органу лишь с точностью до вероятностного распределения, что объясняется, вообще говоря, принципиальной невозможностью получения абсолютно достоверной информации. Показателем, который количественно устанавливает, какое из состояний экономики «лучше», является производство нулевого ингредиента всеми технологическими способами. В наиболее простом случае нулевым ингредиентом может быть количество комплектов продукции непроизводственного потребления, в более сложных случаях нулевой ингредиент — линейная аппроксимация целевой функции потребления. Интересно отметить, что критерии в виде математического ожидания появляются в теории полезности при довольно естественных предпосылках о принимающем решение лице. Поэтому разумно выбирать план, максимизирующий математическое ожидание нулевого ингредиента. Поскольку план выбирается из соображений максимизации средней полезности, то не исключена возможность того, что в результате выполнения оптимального плана фактическое наличие нулевого ингредиента может быть меньше, чем в результате выполнения некоторого другого плана. В этом заключается одно из наиболее существенных различий между детерминированной и стохастической экономикой.

Оптимальный план стохастической экономики не имеет жесткого детерминированного характера. Наряду с детерминированной частью оптимального плана, совокупностью интенсивностей способов из U_0 (речь идет о естественной форме стохастической модели производства), которая выполняется в любом случае, оптимальный план стохастической экономики предусматривает возможность гибкой корректировки и маневра, что выражается в принятии части оптимального плана, плана-коррекции, как функции от случайных параметров.

Можно доказать строго математически (и хозяйственная практика подтверждает это), что возможность гибкой корректировки плановых заданий при изменившейся обстановке существенно повышает эффективность общественного производства. Таким образом, анализируя стохастическую модель производства, можно совершенно строго прийти к выводу, сделанному в книге Л. В. Канторовича и А. Б. Горстко на основании эвристических соображений, о необходимости применения нежесткого порядка планирования, который состоит в том, что лишь часть плана должна выполняться на 100%, другая же часть должна зависеть от конкретной ситуации, которая сложилась в результате реализации случайных параметров.

Наряду с оптимальным планом в стохастической экономике могут быть исчислены цены на ингредиенты — стохастические оценки, которые некоторым образом соизмеряют затраты и результаты в стохастической экономике. Необходимо заметить, что зависимость цен от состояния природы θ, или, другими словами, случайность цен, установленных на основании стохастических оценок, не является экономически абсурдной, как это может показаться на первый взгляд. Зависимость цен от состояния природы показывает, что они должны быть гибкими. Если зависимость плана от наблюдений над состоянием природы повышает эффективность планирования, то зависимость цен от θ дает возможность правильно организовать стимулирование локальных ячеек с целью выполнения оптимального плана. В формулировке теорем двойственности требовалась измеримость стохастических оценок относительно всей σ-алгебры возможных событий $\mathcal{F}$. Переформулируя это требование на экономический язык, можно сказать, что действительные реализации цен могут быть известными лишь после эксперимента, в результате которого о состоянии природы становится известным все. Поскольку эксперимент по наблюдению над состоянием природы, которому соответствует σ-алгебра $\mathfrak{M} = \mathcal{F}$ возможен только в конце планового периода, то отсюда следует, что действительные реализации цен становятся известными лишь в конце планового периода, в середине же планового периода цены в таком случае могут быть известны лишь с точностью до распределения. Таким образом, со здравым экономическим смыслом плохо согласуется не зависимость цен от θ вообще, а именно $\mathcal{F}$-измеримость цен. Однако при довольно естественных предположениях можно доказать, что часть вектора стохастических оценок, относящаяся к периоду времени τ, измерима относительно некоторой σ-алгебры $\mathfrak{C}_\tau$, причем $\mathfrak{C}_\tau$ описывает совокупность событий по наблюдению над состоянием природы θ, которую можно наблюдать именно в τ-й период времени. Таким образом, реализация вектора стохастических оценок в момент τ становится известной именно в момент τ.

Различие в технике соизмерения затрат и результатов для способов из различных множеств U_t приводит к весьма интересным выводам по некоторым проблемам хозрасчета. Анализ теоремы о характеристике для стохастической модели показывает, что к оценке деятельности локальных объектов народного хозяйства (отрасль, предприятие) нужно подходить дифференцированно в зависимости от того, какими возможностями получения информации об условиях производства обладают локальные объекты.

Рассмотрим вначале два крайних случая:

1) локальная ячейка обладает полной информацией об условиях производства, т. е. в ее распоряжении находятся технологические способы из множества U_{t_1}, причем $\mathfrak{M}_{t_1} = \mathcal{T}$;

2) в распоряжении локальной ячейки находятся лишь технологические способы из множества U_{t_2}, где $\mathfrak{M}_{t_2} = \{\Theta, \varnothing\}$, т. е. перед выбором интенсивностей способов никакого эксперимента по наблюдению θ не производится.

В первом случае, если локальная ячейка находится в оптимальном состоянии, то она должна быть неубыточной в любом случае, даже при стечении самых неблагоприятных обстоятельств (это следует из условия 2 теоремы 4.5). Убыточность производственной ячейки с адаптивными способами свидетельствует о субъективных просчетах в руководстве ею, которые привели к тому, что локальная ячейка народного хозяйства вышла из оптимального состояния, хотя были в наличии объективные предпосылки к выполнению оптимального плана.

Если же локальная ячейка не имеет возможностей для уточнения информации о θ, т. е. в ее распоряжении находятся лишь способы из U_{t_2}, то не исключена возможность, что даже при хорошей работе эта ячейка будет убыточной. Действительно, из условия 2 теоремы 4.5 и из того, что $\mathfrak{M}_{t_2} = \{\Theta, \varnothing\}$, следует

$$x_j^* \mathrm{M}\,(a^j, \pi^*(\theta)) = 0 \qquad (j \in U_{t_2}),$$

т. е. в данном случае, если способ входит в оптимальный план, то гарантируется лишь его неубыточность в среднем ($\mathrm{M}\,(a^j, \pi^*(\theta)) = 0$), фактическая же прибыль $(a^j, \pi^*(\theta))$ может быть и отрицательной величиной. О субъективных просчетах в руководстве локальной ячейкой будет свидетельствовать систематическая убыточность за ряд временных промежутков.

Рассмотрим промежуточный случай: локальная ячейка может уточнять состояние природы, однако не полностью, т. е. в ее распоряжении находятся технологические способы из U_t, причем $\mathfrak{M}_t \neq \{\Theta, \varnothing\}$ и $\mathfrak{M}_t \neq \mathcal{J}$. В соответствии с теоремой 4.5 с вероятностью 1, если $x_j^*(\Theta) > 0$, то выполняется соотношение

$$\mathsf{M}\,(a^j(\theta), \pi^*(\theta))/\mathfrak{M}_t) = 0, \tag{4.37}$$

где $j \in U_t$.

Предположим, что состоянием природы является вектор θ, состоящий из двух подвекторов θ^1 и θ^2. Эксперимент по наблюдению над состоянием природы θ состоит в измерении θ^1. В этом случае $\mathcal{J} = \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$; $\mathfrak{M}_t = \mathcal{B}_1 \times \{\Theta_2, \varnothing\}$, где Θ_1, Θ_2 — пространства значений векторов θ^1 и θ^2; $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ — σ-алгебры борелевских множеств из Θ_1 и Θ_2. Если считать, что θ^1 и θ^2 независимы, то (4.37) можно записать в виде

$$\mathsf{M}\,(a^j(\theta), \pi^*(\theta))/\mathfrak{M}_t) = \int\limits_{\Theta_2} (a^j(\theta), \pi^*(\theta))\, d\mathsf{P}_{\theta^2}(\theta^2), \tag{4.38}$$

где P_{θ^2} — вероятностная мера в пространстве значений вектора θ^2. Таким образом, для оценки деятельности локальной ячейки народного хозяйства необходимо знать не ожидаемую и не фактическую прибыль, а усредненную ожидаемую прибыль по тем параметрам, которые в результате эксперимента по наблюдению над состоянием природы остаются неизвестными (точнее, известными с точностью до вероятностного распределения). Отсюда, если локальная ячейка, имеющая возможность получить часть информации, находится в оптимальном состоянии, то при любых реализациях параметров (разве что за исключением множества параметров меры 0), которые доступны наблюдению, усредненная ожидаемая прибыль по параметрам, не доступным наблюдению, не должна быть отрицательной. Анализируя формулу (4.38), можно прийти к выводу, что если локальная ячейка и получает часть информации, то не исключен случай убыточности ячейки даже при хорошей ее работе.

Основной вывод, который можно сделать на основании наших рассуждений о специфике оценки деятельности, состоит в том, что обоснованную оценку деятельности локальных ячеек народного хозяйства можно дать, лишь изучив их возможности получения информации о параметрах способов и о ценах.

Стохастические оценки выполняют в стохастической экономике функцию измерения экономической эффективности каждого вида ингредиентов в том смысле, что стохастические оценки характеризуют приращение критерия оптимальности, вызванное приращением ингредиентов в некотором направлении, а также функцию инструмента корректировки плана при неожиданных флуктуациях распределения параметров.

На динамических аспектах функционирования стохастической экономики мы остановимся в следующей главе.

ГЛАВА V

АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВА. МЕТОДЫ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПРИКЛАДНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В настоящей главе соотношения, полученные в главе IV, применяются для исследования более специального случая стохастической модели производства, предназначенного для описания вероятностных экономических систем в динамике. Дается довольно естественное обобщение таким традиционным понятиям теории оптимального планирования, как экономический и технологический темпы роста, норма эффективности, доказываются некоторые соотношения, которые полезны для понимания экономической природы этих показателей.

В заключительных параграфах главы рассматриваются некоторые вопросы практического принятия стохастических моделей, методы экономико-математического анализа прикладных стохастических моделей, примеры использования этих методов.

§ 1. Постановка динамической стохастической модели производства

Рассмотрим функционирование управляемой экономической системы, изменяющей свои состояния в дискретные моменты времени τ ($\tau = \overline{0, T}$). Под состоянием системы будем понимать вектор продуктов в момент τ, имеющихся в системе. Под продуктом будем понимать недатированный вид вещества или энергии, т. е. один и тот же вид вещества или энергии в различные моменты времени считаются, в отличие от ингредиента, одним продуктом. В каждый момент времени плановый орган может применять те или иные технологические способы. Совокупность технологических способов, относящихся к моменту τ, описывается с помощью двух матриц: матрицы, описывающей затраты продуктов в момент τ при единичных интенсивностях способов и матрицы выпусков продуктов в момент $\tau + 1$. Такой способ описания технологий базируется на предположении, что технологический способ охватывает два временных промежутка, причем в первом промежутке продукты затрачиваются технологическим способом, во втором — выпускаются. Вследствие ошибок прогнозирования матрицы технологических способов и другие неуправляемые параметры являются случайными. Будем предполагать также, что истинные значения прогнозируемых параметров, относящихся к моменту τ, становятся известными плановому органу именно в момент τ. Введем обозначения: T — номер последнего года в плановом промежутке; $A(\tau)$ — матрица затрат для момента времени τ; $B(\tau+1)$ — матрица выпуска для момента времени τ; $b(\tau)$ — вектор продуктов, поступающих извне или изымаемых из системы в момент τ (вектор $b(\tau)$ называют еще «нагрузкой» на экономику); $x(\tau)$ — вектор выпускаемых продуктов в момент τ с учетом «нагрузки»; $h(\tau)$ — интенсивности технологических способов в момент τ.

В соответствии с предположением о характере уточнения информации в процессе выполнения плана сконструируем информационные множества для интенсивностей способов. Напомним, что информационное множество характеризует измеримость интенсивностей способов от неуправляемых параметров. Обозначим через θ^τ случайный вектор вида

$$(B(1), b(1), A(1), B(2), b(2), A(2), \ldots, B(\tau), b(\tau), A(\tau)),$$

через θ — вектор вида

$$(\theta^{T-1}, b(T), B(T)).$$

Матрица $A(0)$ предполагается детерминированной, поскольку естественно считать, что ошибки прогнозирования при ее определении отсутствуют. Поэтому матрица $A(0)$ не включена в вектор θ^τ. Наблюдение над действительными реализациями вектора θ^τ описываются σ-алгеброй $\mathfrak{M}_\tau = \prod_{k=1}^{\tau} \mathcal{B}_k \times \prod_{k=\tau+1}^{T} \{E_k, \varnothing\}$, где $\mathfrak{B}_k$ — σ-алгебра борелевских множеств из евклидова пространства E_k, имеющего размерность, совпадающую с количеством компонент массива $(b(k), B(k), A(k))$. Выбор же интенсивностей $h(\tau)$ после наблюдений, описываемых σ-алгеброй $\mathfrak{M}_\tau$, эквивалентен выбору $h(\tau)$, как измеримой вектор-функций относительно $\mathfrak{M}_\tau$. Через $h(\tau, \theta)$ будем обозначать вектора интенсивностей, измеримых относительно $\mathfrak{M}_\tau$, или, что то же самое, удовлетворяющих ограничению

$$h(\tau, \theta) \in I(\mathfrak{M}_\tau). \tag{5.1}$$

Перейдем к математической формулировке модели. Необходимо найти такие $\mathfrak{M}_\tau$-измеримые (т. е. удовлетворяющие (5.1)) векторы $h(\tau, \theta)$, чтобы в каждый момент времени с вероятностью 1 количество затрачиваемых продуктов было не больше количества продуктов, имеющихся в наличии,

$$A(\tau)\, h(\tau, \theta) \leqslant x(\tau) \pmod{\mathsf{P}} \qquad (\tau = \overline{0, T-1}), \tag{5.2}$$

где

$$x(\tau+1) = B(\tau+1)\, h(\tau, \theta) + b(\tau+1) \pmod{\mathsf{P}} \tag{5.3}$$

$$(\tau = \overline{0, T-1}),$$

$$x(0) = x^0, \tag{5.4}$$

причем математическое ожидание нулевого продукта в T-й момент времени было бы максимально:

$$\mathsf{M}\, x_0(T) \to \max. \tag{5.5}$$

Нетрудно заметить, что $\mathfrak{M}_\tau \subset \mathfrak{M}_{\tau+1}$. Поскольку векторы $x(\tau)$ можно рассматривать как независимые переменные, то вектор $x(T)$ является измеримым относительно $\prod_{k=1}^{T} \mathcal{B}_k$, т. е. относительно $\mathcal{F}$. Поэтому задача (5.1) — (5.5) является многоэтапной стохастической моделью в естественной форме.

В заключение этого параграфа необходимо отметить, что предположение о том, что технологические способы охватывают лишь два смежных периода, делает экономически более наглядными результаты анализа динамической модели, который будет произведен в следующих параграфах. Аналогично тому, как это сделано для детерминированной динамической модели (см. В. Л. Макаров, А. М. Рубинов [1]), стохастическую модель производства с произвольными способами можно преобразовать к задаче со способами, охватывающими два временны́х периода.

§ 2. Темпы роста в динамической стохастической модели производства

Примем следующие определения. Назовем величины

$$\alpha(\tau, \theta^{\tau}) = \frac{M((x(\tau+1), \pi(\tau, \theta))/\mathfrak{M}_{\tau})}{(x(\tau), \pi(\tau))},$$

$$\beta(\tau, \theta^{\tau}) = \frac{M((x(\tau+1), \pi(\tau, \theta))/\mathfrak{M}_{\tau})}{M((x(\tau+1), \pi(\tau+1, \theta))/\mathfrak{M}_{\tau})},$$

соответственно *технологическим и экономическим темпами роста*. В этих определениях под $x(\tau)$ понимается количество продуктов в момент τ в оптимальном плане, а под $\pi(\tau, \theta)$ — стохастические оценки продуктов в момент τ.

Условимся сейчас, и при дальнейшем анализе стохастической динамической модели этого специально оговаривать не будем, что для модели (5.1)—(5.5) выполняются условия, достаточные для выполнения теорем предыдущей главы. Как уже отмечалось, подобные условия являются необременительными для задач экономического происхождения, тем более, что, как мы убедились, модель (5.1)—(5.5) — многоэтапная стохастическая модель в естественной форме.

Перед тем как доказывать некоторые теоремы о соотношениях между α и β, отметим важную особенность стохастических оценок продуктов в модели (5.1) — (5.5). Оказывается, что оценки $\pi(\tau, \theta)$ — $\mathfrak{M}_{\tau}$-измеримы. Действительно, пусть $\pi(\tau, \theta)$ — решение двойственной задачи к задаче (5.1) — (5.5), не обязательно $\mathfrak{M}_{\tau}$-измеримое. По теореме 4.1 это означает, что

$$(h(\tau, \theta), M(B'(\tau+1)\pi(\tau+1, \theta) - \\ - A'(\tau)\pi(\tau, \theta)/\mathfrak{M}_{\tau})) = 0 \pmod{P}, \quad (5.6)$$

$$M(B'(\tau+1)\pi(\tau+1, \theta) - A'(\tau)\pi(\tau, \theta)/\mathfrak{M}_{\tau}) \leqslant 0 \pmod{P}, \quad (5.7)$$

$$(\pi(\tau, \theta), A(\tau)h(\tau, \theta) - x(\tau)) = 0 \pmod{P}. \quad (5.8)$$

Докажем, что если $\pi(\tau, \theta)$ удовлетворяет соотношениям (5.6) — (5.8), то $\tilde{\pi}(\tau, \theta) = M(\pi(\tau, \theta)/\mathfrak{M}_{\tau})$ также удовлетворяет (5.6) — (5.8). Это означает, что часть решения двойственной задачи, относящаяся к моменту τ, может искаться на множестве $\mathfrak{M}_\tau$-измеримых вектор-функций.

Учитывая свойства условных математических ожиданий и то, что $A(\tau)$ — $\mathfrak{M}_\tau$-измеримо, $B(\tau+1)$ — $\mathfrak{M}_{\tau+1}$-измеримо, $\mathfrak{M}_{\tau+1} \supset \mathfrak{M}_\tau$, имеем:

$$A'(\tau)\,\mathsf{M}\,(\pi(\tau,\theta)/\mathfrak{M}_\tau) = \mathsf{M}\,(A'(\tau)\,\pi(\tau,\theta)/\mathfrak{M}_\tau),$$

$$\mathsf{M}\,(A'\,\mathsf{M}\,(\pi(\tau,\theta)/\mathfrak{M}_\tau)/\mathfrak{M})_\tau = \mathsf{M}\,(A'\pi(\tau,\theta)/\mathfrak{M}_\tau),$$

$$\mathsf{M}\,(B'(\tau+1)\,\mathsf{M}\,(\pi(\tau+1,\theta)/\mathfrak{M}_{\tau+1})/\mathfrak{M}_\tau) =$$
$$= \mathsf{M}\,(\mathsf{M}\,(B'(\tau+1)\pi(\tau+1,\theta)/\mathfrak{M}_{\tau+1})/\mathfrak{M}_\tau) =$$
$$= \mathsf{M}\,(B'(\tau+1)\,\pi(\tau+1,\theta)/\mathfrak{M}_\tau).$$

Следовательно, для $\mathsf{M}\,(\pi(\tau,\theta)/\mathfrak{M}_\tau)$ и $\mathsf{M}\,(\pi(\tau+1,\theta)/\mathfrak{M}_{\tau+1})$ выполняются (5.6), (5.7). Выполнение же (5.8) для $\mathsf{M}(\pi(\tau,\theta)/$ $/\mathfrak{M}_\tau)$ очевидно.

Таким образом, в каждый момент τ становятся известными точно все параметры, необходимые для вычисления стохастических оценок. (Заметим, что этот факт использовался нами в § 4 главы IV при обсуждении экономической природы стохастических оценок.) В дальнейшем на измеримость стохастических оценок, относящихся к моменту τ, относительно $\mathfrak{M}_\tau$ мы иногда будем указывать посредством записи вектора π как функции от θ^τ.

Учитывая сделанное только что замечание о характере измеримости стохастических оценок, технологический и экономический темпы роста можно переписать, заменив $\mathsf{M}\,((x(\tau+1), \pi(\tau,\theta^\tau))/\mathfrak{M}_\tau)$ эквивалентной записью в виде $(\mathsf{M}\,(x(\tau+1)/\mathfrak{M}_\tau), \pi(\tau,\theta^\tau))$.

Следующая теорема устанавливает интересные соотношения между α и β.

Теорема 5.1. *С вероятностью* 1, *если* $\mathsf{M}\,((\pi(\tau+1, \theta^{\tau+1}), b(\tau+1))/\mathfrak{M}_\tau) > 0$ (*соотв.* $= 0$; < 0), *то* $\alpha(\tau,\theta^\tau) > \beta(\tau,\theta^\tau)$ (*соотв.* $= \beta(\tau,\theta^\tau)$; $< \beta(\tau,\theta^\tau)$).

Доказательство. Из (5.6) следует

$$\mathsf{M}\,((B(\tau+1)\,h(\tau,\theta), \pi(\tau+1,\theta^{\tau+1}))/\mathfrak{M}_\tau) =$$
$$= (A(\tau)\,h(\tau,\theta^\tau), \pi(\tau,\theta^\tau))\ (\mathrm{mod}\ \mathsf{P}).$$

Последнее соотношение, используя (5.3), (5.8), перепишем следующим образом:

$$\mathsf{M}((x(\tau+1), \pi(\tau+1, \theta^{\tau+1}))/\mathfrak{M}_\tau) = (x(\tau), \pi(\tau, \theta^\tau)) + \\ + \mathsf{M}((b(\tau+1), \pi(\tau+1, \theta^{\tau+1}))/\mathfrak{M}_\tau) \pmod{\mathsf{P}}. \tag{5.9}$$

Сравнение последнего равенства и определения α и β и доказывает теорему.

Если на (5.9) подействовать оператором $\mathsf{M}(.)$, то получим:

$$\mathsf{M}(x(\tau+1), \pi(\tau+1, \theta^{\tau+1})) = \\ = \mathsf{M}(x(\tau), \pi(\tau, \theta^\tau)) + \mathsf{M}(b(\tau+1), \pi(\tau+1, \theta^{\tau+1})).$$

Таким образом, справедлива также теорема 5.1'.

Теорема 5.1'. *Если* $\mathsf{M}(b(\tau+1), \pi(\tau+1)) > 0$ (*соотв.* $=0$; <0), *то* $\alpha(\tau) > \beta(\tau)$ (*соотв.* $=\beta(\tau)$; $<\beta(\tau)$), *где*

$$\alpha(\tau) = \frac{\mathsf{M}(x(\tau+1), \pi(\tau))}{\mathsf{M}(x(\tau), \pi(\tau))}, \quad \beta(\tau) = \frac{\mathsf{M}(x(\tau+1), \pi(\tau))}{\mathsf{M}(x(\tau+1), \pi(\tau+1))}.$$

Сформулируем теорему 5.1' в экономических терминах. Экономический темп роста $\beta(\tau)$ обозначает темп падения среднего уровня стохастических оценок, соизмеренных в количестве продуктов; технологический темп роста — темп роста среднего уровня продуктов, соизмеренных в стохастических оценках. Величина $\mathsf{M}(b(\tau), \pi(\tau))$ характеризует степень замкнутости экономической системы (в терминах работы В. Л. Макарова [1] — это математическая замкнутость). Чем больше величина $\mathsf{M}(b(\tau), \pi(\tau))$, тем больше экономическая система в среднем получает ресурсов извне, чем их расходует. Отсюда утверждение теоремы 5.1' можно переформулировать следующим образом: если в оптимальном режиме стохастическая система получает ресурсов извне больше (в среднем), чем выдает их, то темп роста среднего значения продуктов, соизмеренных в оптимальных ценах, больше темпа падения среднего уровня цен, соизмеренных в количествах продуктов.

Заметим, что показатели α и β, так же как и соответствующие показатели в детерминированных моделях, недостаточно учитывают возможности внутреннего развития системы. Этот недостаток можно устранить, введя показатели, которые более тонко учитывают внутренний потенциал системы, причем анализ соотношений между этими показателями более прост, чем для $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$ и $\alpha(\tau, \theta^\tau)$, $\beta(\tau, \theta^\tau)$.

По экономическому смыслу теорема 5.1 близка к теореме 5.1′. В дальнейшем показатели $\alpha(\tau)$ и $\beta(\tau)$ будем также называть соответственно технологическим и экономическим темпами роста. При этом, чтобы избежать смешения понятий, термин «темпы роста» будем сопровождать обозначениями $\alpha(\tau, \theta^\tau)$ или $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau, \theta^\tau)$ или $\beta(\tau)$.

§ 3. Норма эффективности в стохастических экономических системах

Серьезным достижением теории оптимального планирования явилось четкое истолкование на основании строгих математических моделей такого важного для экономической практики показателя, как норматив эффективности капиталовложений. С точки зрения детерминированных моделей норматив эффективности показывает, насколько увеличивается некоторая сумма средств при наилучшем ее использовании к следующему временному периоду. Если некоторые мероприятия обеспечивают меньший прирост средств, то естественно не включать их в план, а постараться отыскать более эффективные мероприятия.

В ряде работ на основании теоретического анализа полной народнохозяйственной модели даны практические рекомендации по использованию норматива эффективности при измерении эффекта от капиталовложений. Однако даже правильное использование норматива эффективности в экономических расчетах в формулах, выведенных на основании анализа детерминированной модели, отнюдь не гарантирует строго определенного эффекта от капиталовложений. В одних случаях этот прирост будет меньше нормативного, в других — больше. Этот факт объясняется случайностью исходной информации, что типично в планово-проектной практике. Естественно возникает вопрос: как понимать норматив эффективности и эффект от капиталовложений в условиях неполноты исходной информации? Анализ стохастической модели производства показывает, что довольно естественно понимать норматив эффективности не как некоторый жесткий порог, который в любом случае превышается эффектом от внедряемого проекта, а лишь как некоторый средний уровень, вокруг которого колеблется эффективность внедряемых проектов капиталовложений. Если варианты капиталовложений оценивать по эффекту, который они могут доставить в наихудшем случае, то в план капитального строительства попадут довольно «осторожные» варианты, которые в среднем не дадут большого эффекта. К недопустимому риску ведет выбор вариантов капиталовложений, ориентирующийся на эффект при наиболее благоприятных реализациях случайных параметров.

Определим в рамках динамической стохастической модели норму эффективности. Под *нормой эффективности* будем понимать величину

$$\rho_\tau(e) = \lim_{\gamma \to +0} \frac{M\,(\pi_{e_\tau}(\tau+1),\ e(\tau+1))}{M\,(\pi_{e_\tau}(\tau+1),\ \gamma e(\theta))} - 1, \tag{5.10}$$

где $\gamma e(\theta)$ — приращение продуктов в момент времени τ; $e(\tau+1)$ — приращение продуктов в оптимальном плане в $\tau+1$-й момент времени, вследствие приращения продуктов на γe в момент τ; $\pi_{e_\nu}(\tau)$ — характерные стохастические оценки продуктов в момент τ для вектора e, в направлении которого увеличивается количество продуктов в момент ν. Для корректности определения (5.10) достаточно, чтобы существовал предел в правой части равенства (5.10). Ниже мы убедимся, что этот предел существует.

Норма эффективности показывает, насколько в среднем может быть увеличена некоторая малая сумма средств в денежной оценке к следующему временному периоду при оптимальном ее использовании. С помощью теорем 4.1 и 4.7 норму эффективности можно связать с темпом падения среднего уровня характерных стохастических оценок, соизмеренных по вектору e.

Т е о р е м а 5.2. *Справедлива формула*

$$\rho_\tau(e) = \frac{M\,(\pi_{e_\tau}(\tau),\ e(\theta))}{M\,(\pi_{e_\tau}(\tau+1),\ e(\theta))} - 1. \tag{5.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сопоставляя определение $\rho_\tau(e)$ и формулировку теоремы 5.2, можно заметить, что для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\mathsf{M}\,(\pi_{e_\tau}(\tau+1),\ e(\tau+1)) = \gamma\mathsf{M}\,(\pi_{e_\tau}(\tau),\ e(\theta)) + o(\gamma).$$

Докажем это соотношение. В процессе доказательства теоремы 4.7 было установлено следующее:

$$\mathsf{M}\,(x_t(\theta,\ b+\gamma e(\theta)),\ A_t'u_e(\theta)+a_t) = \\ = o(\gamma) \qquad (t=\overline{0,\ T}), \tag{5.12}$$

$$\mathsf{M}\,(u_e(\theta),\ \sum_{t=0}^{T} A_t x_t(\theta,\ b+\gamma e(\theta)) + b + \gamma e(\theta)) = o(\gamma). \tag{5.13}$$

Конкретизируя (5.13) применительно к динамической стохастической модели, получаем

$$\mathsf{M}\,(\pi_{e_\tau}(\tau),\ A(\tau)(h^*(\tau)+\Delta h(\tau)) - x(\tau) - \gamma e(\theta)) = o(\gamma), \tag{5.14}$$

где $\Delta h(\tau) = h(\tau,\ \gamma e(\theta)) - h^*(\tau)$; $h(\tau,\ \gamma e(\theta))$ — оптимальное решение задачи (5.1)—(5.5) при ресурсах продуктов в момент τ $x(\tau)+\gamma e(\theta)$; $h^*(\tau)$ — решение задачи (5.1)—(5.5).

Вычитая из (5.14) соотношение (5.8), на которое предварительно подействовали оператором математического ожидания, приходим к равенству

$$\mathsf{M}\,(\pi_{e_\tau}(\tau),\ A(\tau)\,\Delta h(\tau)) = \gamma\mathsf{M}\,(\pi_{e_\tau}(\tau),\ e(\theta)) + o(\gamma). \tag{5.15}$$

Соотношение (5.12) для задачи (5.1) — (5.5) можно записать следующим образом:

$$\mathsf{M}\,(h^*(\tau)+\Delta h(\tau),\ A'(\tau)\,\pi_{e_\tau}(\tau) - B'(\tau+1)\,\pi_{e_\tau}(\tau+1)) = o(\gamma).$$

Вычтем из предыдущего равенства соотношение (5.6), на которое предварительно подействуем оператором $\mathsf{M}(\cdot)$. Получим

$$\mathsf{M}\,(B'(\tau+1)\,\pi_{e_\tau}(\tau+1),\ \Delta h(\tau)) = \\ = \mathsf{M}\,(A'(\tau)\,\pi_{e_\tau}(\tau),\ \Delta h(\tau)) + o(\gamma). \tag{5.16}$$

Очевидно, что

$$e(\tau+1) = B(\tau+1)\,\Delta h(\tau). \tag{5.17}$$

Справедлива следующая цепочка равенств, которая и доказывает теорему (число над знаком равенства показывает номер соотношения, из которого следует данное равенство):

$$\begin{aligned}\mathsf{M}(\pi_{e_\tau}(\tau+1),\ e(\tau+1)) &\overset{(5.17)}{=} \mathsf{M}\,(\pi_{e_\tau}(\tau+1), B(\tau+1)\,\Delta h(\tau)) = \\ &= \mathsf{M}\,(B(\tau+1),\ \pi_{e_\tau}(\tau+1)\,\Delta h(\tau)) \overset{(5.16)}{=} \\ &\overset{(5.16)}{=} \mathsf{M}\,(A'(\tau)\,\pi_{e_\tau}(\tau),\ \Delta h(\tau)) + o(\gamma) = \\ &= \mathsf{M}\,(\pi_{e_\tau}(\tau),\ A(\tau)\,\Delta h(\tau)) + o(\gamma) \overset{(5.15)}{=} \\ &\overset{(5.15)}{=} \gamma\mathsf{M}\,(\pi_{e_\tau}(\tau),\ e(\theta)) + o(\gamma).\end{aligned}$$

Утверждение теоремы 5.2 по форме близко к утверждению теоремы 5.1′, а норма эффективности — к показателям $\alpha(\tau)$ и $\beta(\tau)$. Можно ввести показатель $\rho_\tau(e,\ \theta^\tau)$, который по экономическому смыслу близок к $\rho_\tau(e)$, а по форме —к $\alpha(\tau,\ \theta^\tau)$ и $\beta(\tau,\ \theta^\tau)$ (т. е. в числителе и знаменателе стоят условные математические ожидания). Можно также доказать утверждение для $\rho_\tau(e,\ \theta^\tau)$, аналогичное утверждению теоремы 5.2. При доказательстве этого утверждения также используются теоремы 4.1 и 4.7, причем последняя, в отличие от доказательства теоремы 5.2, используется в полную меру. Кроме того, в определении $\rho_\tau(e,\ \theta^\tau)\,e(\theta)$ должно быть $\mathfrak{M}_\tau$-измеримым.

Формула (5.11) для $\rho_\tau(e)$ допускает две интерпретации. В первой интерпретации $1+\rho_\tau(e)$ является темпом падения среднего уровня характерных стохастических оценок для вектора e, соизмеренных по этому же вектору. Если предположить, что стохастические оценки единственны и $e = x(\tau+1)$, то формула (5.11) эквивалентна следующей:

$$1+\rho_\tau(x(\tau+1)) = \beta(\tau).$$

Во второй трактовке формулы (5.11) $\rho_\tau(e)$ показывает средний прирост значения критериального ингредиента $x_0(T)$ при использовании количества продуктов γe в момент τ по сравнению с использованием этого же количества продуктов в году $\tau+1$, т. е. $\rho_\tau(e)$ можно понимать как оценку «промедления» на единицу времени использования малого количества продуктов с точки зрения прироста математического ожидания критериального ингредиента.

Базируясь на анализе динамической стохастической модели, можно предложить некоторые методы исчисления нормы эффективности.

Первый метод основан на прогнозировании уровня цен, соизмеренных в некотором эталонном количестве продуктов, т. е. величины $\zeta(\tau) = (\pi(\tau), e)$. Например, если $\zeta(\tau)$ представимы в виде $\zeta(\tau) = f(\tau) + \xi(\tau)$, где $f(\tau)$ — тренд, $\xi(\tau)$ — центрированная случайная величина, то используя методы теории прогнозирования, на основании реализаций $\zeta(\tau)$ (отчетные данные об уровне цен за ряд лет) можно найти $f(\tau)$, $M\zeta(\tau)$, а следовательно и $\rho_\tau(e)$.

Второй метод приближенного подсчета $\rho_\tau(e)$ основан на использовании прогнозных моделей типа модели Н. Ф. Шатилова. Проигрывая модель Н. Ф. Шатилова при различных значениях случайных параметров, можно исследовать, каким образом увеличение количества продуктов в некотором году влияет на увеличение математического ожидания критериального ингредиента. Найдя статистическую оценку математического ожидания количества критериального ингредиента до и после увеличения продуктов на малую величину в году τ, можно приближенно вычислить $\rho_\tau(e)$ на основе второй трактовки формулы (5.11).

Полученные соотношения и выводы на основе анализа динамической стохастической модели вполне естественным образом модифицируют соответствующие выводы из детерминированных моделей производства. Смысл полученных результатов состоит в том, что они расширяют круг экономических явлений, к которым применимы результаты теории оптимального планирования и позволяют наметить пути совершенствования методики подсчета некоторых нормативов плановой экономики и применения их для локальных оптимизационных расчетов.

§ 4. Оценка эффективности вновь создаваемых технологических способов в условиях неопределенности

При разработке новой технологии, внедрении более производительного оборудования возникает необходимость дать хотя бы приблизительную оценку эффективности разрабатываемого новшества. Эта проблема усложняется тем, что параметры новой техники, как правило, точно не известны, а можно указать лишь их вероятностные оценки. Выведем на основании модельного анализа стохастической модели производства некоторые формулы для эффекта от внедрения новых способов.

В терминах стохастической модели производства проблема формулируется следующим образом: дан некоторый технологический способ, который первоначально не учитывался при решении стохастической модели. Нужно определить, войдет ли этот способ в оптимальный план модели, и дать оценку прироста критерия оптимальности вследствие применения нового способа с малой интенсивностью.

Рассмотрим случай, когда вновь создаваемый технологический способ может применяться до получения какой-либо информации по уточнению распределения параметров или, другими словами, этот способ принадлежит множеству U_0, причем $\mathfrak{M}_0 = \{\Theta, \varnothing\}$. Если стохастическая модель производства является двухэтапной, то вновь создаваемый способ является программным.

Применим с достаточно малой интенсивностью γ вновь создаваемый технологический способ $a^{\Delta}=(a_{0\Delta}, a_{1\Delta}, \dots, a_{m\Delta})$. При этом количество нулевого ингредиента от непосредственного применения способа увеличится на γa_0^{Δ}. В свою очередь вследствие применения способа Δ количество других ингредиентов увеличится или уменьшится на следующие величины: $\gamma a_1^{\Delta}, \gamma a_2^{\Delta}, \dots, \gamma a_n^{\Delta}$. Значение же критерия оптимальности увеличится или уменьшится вследствие изменения величин ресурсов (в силу теоремы 4.6) на

$$\gamma \min_{u(\theta)\in U^*} \mathsf{M}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i\Delta} u_i(\theta)\right),$$

где U^* — множество стохастических оценок на ингредиенты с индексами 1, 2, ..., m. Общее количество увеличения или уменьшения среднего значения критериального ингредиента от применения с малой интенсивностью способа Δ будет равно

$$\frac{1}{\pi_0}\gamma \min_{\pi(\theta)\in\Lambda^*} \mathsf{M}\,(a^{\Delta}, \pi(\theta)),$$

где Λ^* — множество векторов вида $\pi(\theta) = (\pi_0, \pi_0 u^*(\theta))$, $\pi_0 = C$ (C — константа). Таким образом, если

$$\min_{\pi(\theta)\in\Lambda^*} \mathsf{M}\,(a^\Delta, \pi(\theta)) > 0 \qquad (\Delta \in U_0), \tag{5.18}$$

то вновь создаваемый технологический способ эффективен с точки зрения глобального критерия оптимальности и его нужно внедрять, в противном случае — способ Δ неэффективен.

Из (5.18) видно, что чем больше величина ожидаемой прибыли от способа Δ в характерных стохастических оценках, тем больше приращение критерия от применения способа с достаточно малой интенсивностью. Поэтому величину ожидаемой прибыли при применении способа с единичной интенсивностью в оптимальных ценах можно принять в качестве критерия эффективности для вновь создаваемых технологических способов. Критерий записывается следующим образом:

$$\min_{\pi(\theta)\in\Lambda^*} \mathsf{M}\,(a^\Delta, \pi(\theta)) \to \max. \tag{5.19}$$

Критерий (5.19) в ряде случаев допускает упрощения. Если вектор стохастических оценок единствен, что зачастую бывает довольно оправданным допущением, то (5.19) принимает вид

$$\mathsf{M}\,(a^\Delta, \pi(\theta)) \to \max, \tag{5.20}$$

что существенно упрощает практические расчеты.

Если же компоненты вектора a^Δ не коррелируются с компонентами других векторов, что также является весьма оправданным допущением, то формула (5.19) принимает еще более простой вид, а именно:

$$(\mathsf{M}a^\Delta, \mathsf{M}\pi(\theta)) \to \max.$$

Изучим более общий случай. Пусть вновь создаваемый способ a^Δ может применяться после некоторого эксперимента по уточнению состояния природы, описываемого σ-алгеброй наблюдаемых событий $\mathfrak{M}_t$. Применим способ $a^\Delta(\theta)$ с $\mathfrak{M}_t$-измеримой интенсивностью

$$\gamma(\theta) \leqslant \gamma \pmod{\mathsf{P}},$$

где γ — малая величина Представим $\gamma(\theta)$ в виде

$$\gamma(\theta) = \varepsilon\delta(\theta),$$

где ε — малая детерминированная величина строго больше нуля, $\delta(\theta)$ — $\mathfrak{M}_l$-измеримая случайная величина, $0 \leqslant \delta(\theta) \leqslant 1 \pmod{\mathsf{P}}$

Очевидно, что если способ вида $\delta(\theta)\, a^{\Delta}(\theta)$, применяемый до уточнения состояния природы, эффективен, то эффективен и способ $a^{\Delta}(\theta)$, применяемый после измерения, описываемого σ-алгеброй $\mathfrak{M}_l$. Справедливо также утверждение в обратную сторону Таким образом, из (5.18) следует, что способ a^{Δ} эффективен тогда и только тогда, когда

$$\max_{0 \leqslant \delta(\theta) \leqslant 1} \mathsf{M}\, \delta(\theta)\, (a^{\Delta}(\theta),\ \pi_{a^{\Delta}}(\theta)) > 0,$$

где $\pi_{a^{\Delta}}(\theta)$ — характерные стохастические оценки для вектора a^{Δ} Поскольку $\delta(\theta)$ — $\mathfrak{M}_l$-измеримая величина, то последнее неравенство можно переписать следующим образом:

$$\max_{0 \leqslant \delta(\theta) \leqslant 1} \mathsf{M}\, \delta(\theta)\, \mathsf{M}\, ((a^{\Delta},\ \pi_{a^{\Delta}}(\theta))/\mathfrak{M}_l) > 0.$$

Опять же из $\mathfrak{M}_l$-измеримости $\delta(\theta)$ следует

$$\delta(\theta) = \begin{cases} 1, & \mathsf{M}\, ((a^{\Delta},\ \pi_{a^{\Delta}}(\theta))/\mathfrak{M}_l) > 0, \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

В итоге получаем, что вновь создаваемый способ $a^{\Delta}(\theta)$, применение которого возможно после эксперимента $\mathfrak{M}_l$, эффективен тогда и только тогда, когда

$$\mathsf{M} \max \{0,\ \mathsf{M}\, ((a^{\Delta},\ \pi_{a^{\Delta}}(\theta))/\mathfrak{M}_l)\} > 0.$$

В качестве критерия эффективности коррекционных технологических способов можно принять критерий

$$\mathsf{M} \max \{0,\ \mathsf{M}\, ((a^{\Delta},\ \pi_{a^{\Delta}}(\theta))/\mathfrak{M}_l)\} \to \max \qquad (5.21)$$

Анализируя (5.21), можно получить довольно неожиданный вывод: для новых технологических способов, которые могут применяться после уточнения состояния природы, очень «плохие» реализации параметров этого способа и цен (с точки зрения математического ожидания прибыли при условии, что известна более точная информация о состоянии природы) не важны, поскольку при этих реализациях способ не используется и в среднем эффекте «плохие» реализации не учитываются. Таким образом, локальная хозяйственная ячейка, располагающая большим количеством адаптивных способов, имеет более широкие возможности для «рискованных» мероприятий, чем ячейки с меньшим количеством адаптивных способов, поскольку при больших возможностях получения информации корректировку и хозяйственный маневр можно осуществлять более качественно, гибко, глубоко.

Установленные в этом параграфе свойства стохастических оценок можно использовать также в некоторых случаях для уменьшения размерности задачи. Кроме этого, стохастические оценки и критерии эффективности новых способов могут оказаться полезными при целенаправленном создании новых технологий в режиме диалога специалиста и ЭВМ и при формировании банка новых технологий (см. В. М. Глушков [1]).

С вопросом оценки эффективности вновь создаваемых технологических способов тесно связано выведение так называемых формул приведения, которые приводят к одному моменту времени разновременные эффекты. Формулы приведения в стохастическом случае можно вывести из формул (5.18)—(5.21) аналогично тому, как это сделано для детермированного случая, поэтому мы рассмотрим в качестве примера вывод лишь одной простой формулы. Пусть программный способ имеет вид

$$(-C,\ -K,\ -C,\ -C, \ldots), \tag{5.22}$$

где C — вектор текущих затрат; K — вектор капиталовложений. Предположим, что темп падения ожидаемого значения стохастических оценок, соизмеренных в текущих ценах, постоянный, или

$$\mathsf{M}(\pi(\tau+1),\ C) = \frac{1}{1+\rho(C)}\,\mathsf{M}(\pi(\tau),\ C).$$

Заметим, что это предположение более реалистично, чем аналогичное предположение для детерминированной модели.

Конкретизируем критерий (5.19) для способа (5.22):

$$-(\mathrm{M}(\pi(0), K)+\mathrm{M}\sum_{t=0}^{\infty}(\pi(\tau), C))=$$

$$=-\left(\mathrm{M}(\pi(0), K)+\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{(1+\rho(C))^{t}}\mathrm{M}(\pi(0), C)\right)=$$

$$=-\left(\mathrm{M}(\pi(0), C)+\frac{1}{\rho(C)}\mathrm{M}(\pi(0), C)\right)\to\max,$$

или

$$\mathrm{M}(\pi(0), C)+\rho(C)\,\mathrm{M}(\pi(0), K)\to\min. \qquad (5.23)$$

Формула (5.23) — стохастический аналог простейшей формулы приведения $C+EK\to\min$. С помощью (5.20) можно вывести более сложные формулы приведения.

§ 5. Проблемы использования стохастических моделей производства в практических расчетах

В настоящем параграфе будут рассмотрены некоторые специфические проблемы и трудности, характерные для практической реализации стохастических моделей производства. Многоэтапные стохастические модели целесообразно применять в основном для теоретического анализа некоторых проблем в управляемых экономических системах со случайными параметрами. Практическая же реализация многоэтапных стохастических моделей с числом этапов больше двух весьма затруднительна. Поэтому в данном параграфе мы будем уделять внимание лишь двухэтапным стохастическим моделям, тем более, что эти модели охватывают довольно широкий класс тех реальных постановок, которые в настоящее время возникают в практике планирования (это не снижает актуальности разработки численных и качественных методов многоэтапных задач).

1. Алгоритмическое и информационное обеспечение двухэтапных стохастических моделей. При практическом использовании стохастических моделей, безусловно, наиболее важным является наличие эффективных методов решения этих моделей. Кроме того, для экономико-математического анализа полученного решения необходимо уметь вычислять стохастические оценки в той или иной форме. Сделаем некоторые дополнительные замечания о возможных трудностях при решении двухэтапной стохастической задачи стохастическим квазиградиентным методом и о путях их преодоления. Напомним, что нахождение оптимального плана-программы линейной двухэтапной задачи

$$(a, x) + \mathsf{M}\,(d(\theta), y(\theta)) \to \max,$$
$$A(\theta)x + D(\theta)y(\theta) + b(\theta) \geqslant 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathsf{P}),$$
$$x \geqslant 0, \quad y(\theta) \geqslant 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathsf{P})$$

сводится к максимизации выпуклой вверх недифференцируемой функции

$$F(x) = (a, x) + \mathsf{M} \max_{y \in Y(\theta, x)} (d(\theta), y) \to \max, \tag{5.24}$$

где

$$Y(\theta, x) = \{y:\ D(\theta)y + A(\theta)x + \\ + b(\theta) \geqslant 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathsf{P}), \quad y(\theta) \geqslant 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathsf{P})\},$$

при ограничениях

$$x \geqslant 0, \quad x \in K, \tag{5.25}$$

где K — множество индуцированных ограничений. Если предполагать, что $K = E^n$, то рекуррентные соотношения для максимизации (5.24) при условиях (5.25) методом проекций стохастических квазиградиентов примут вид

$$x^{s+1} = \max\{0, x^s + \rho_s(a + A'(\theta^s)\,u(x^s, \theta^s))\},$$

где $u(x^s, \theta^s)$ — решение двойственной задачи к задаче

$$(d(\theta^s), y) \to \max, \quad y \in Y(\theta^s, x^s), \tag{5.26}$$

т. е. решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &(A(\theta^s)x^s + b(\theta^s), u) \to \min, \\ &D'(\theta^s)u + d(\theta^s) \leqslant 0, \quad u \geqslant 0. \end{aligned}\right. \tag{5.27}$$

Эффективность метода стохастических квазиградиентов для решения двухэтапной задачи в значительной мере зависит от сложности решения задачи (5.27), поскольку ее приходится решать на каждой итерации; от стратегии выбора ρ_s, поскольку от нее существенно зависит реальная скорость сходимости метода; от размерности состояния природы θ, т. е. от количества случайных параметров.

В ряде практических задач задача (5.27) имеет довольно специальный вид и для ее решения можно использовать специальные методы решения задач линейного программирования, в чем заключается существенный резерв повышения эффективности стохастического квазиградиентного метода. Весьма перспективным при нахождении $u(x^s, \theta^s)$ является использование методов решения задач линейного программирования, основанных на известном решении «близкой» задачи. Если, например, матрица $D(\theta)$ не случайна, то $u(x, \theta^s)$ весьма просто получить, используя последнюю симплексную таблицу задачи (5.27). Если матрица $D(\theta)$ случайна, то имеет смысл использовать следующую процедуру нахождения $u(x^{s+1}, \theta^{s+1})$ на основании информации, полученной на s-й итерации:

1) используя последнюю симплекс-таблицу задачи

$$(b(\theta^s) + A(\theta^s)x^s, u) \to \min,$$
$$D'(\theta^s)u + d(\theta^s) \leqslant 0, \quad u \geqslant 0$$

в s-й итерации, находится *) решение задачи

$$(b(\theta^{s+1}) + A(\theta^{s+1})x^{s+1}, u) \to \min,$$
$$D'(\theta^s)u + d(\theta^{s+1}) \leqslant 0, \quad u \geqslant 0;$$

2) на основании решения предыдущей задачи находится решение «близкой» задачи при $D = D(\theta^{s+1})$ в соответствии с методом, описанным Courtillot M.

При уменьшении количества случайных параметров уменьшается количество машинного времени, необходимое для проигрывания на каждой итерации случайных параметров с помощью датчика случайных чисел. Кроме того, повышается вероятность применения специальных методов решения задачи (5.27). Поэтому нужно по возможности стремиться к тому, чтобы не было «лишних» случайных параметров в двухэтапной задаче. В этой связи большое значе-

*) Путем последовательного применения прямого и двойственного симплекс-метода.

ние приобретают методы определения «важности» коэффициентов модели, а также устойчивости решения стохастической двухэтапной задачи. При малых дисперсиях некоторых параметров и при относительной устойчивости оптимального значения функционала при вариации этих параметров имеет смысл отождествлять случайный параметр с его математическим ожиданием. Устойчивость относительно вариации вектора u можно определять с помощью двойственных оценок $u^*(\theta)$. При оценке «важности» параметров в некоторых случаях оправдано использование результатов подобных исследований, проведенных для некоторых детерминированных моделей (в основном, межотраслевых; см. В. В. Коссов).

Рассмотрим методы решения двойственной задачи к стохастической двухэтапной задаче

$$\begin{gathered} \mathsf{M}\,(b,\, u(\theta)) \to \min, \quad \mathsf{M}\,(A'u(\theta) + a) \leqslant 0, \\ D'u(\theta) + d \leqslant 0 \,(\operatorname{mod} \mathsf{P}), \quad u(\theta) \geqslant 0 \,(\operatorname{mod} \mathsf{P}). \end{gathered} \tag{5.28}$$

Анализ теоремы 4.1 показывает, что существует случай, когда решение задачи (5.28) находится довольно просто. Действительно, если x^* — оптимальный план-программа и почти для каждого $\theta \in \Theta$ решение задачи

$$\begin{gathered} (b(\theta) + A(\theta)\,x^*,\ u) \to \min, \\ D'(\theta)\,u + d(\theta) \leqslant 0, \quad u \geqslant 0, \end{gathered} \tag{5.29}$$

единственно, то оно совпадает (с точностью до эквивалентности) с решением задачи (5.28). Если бы это было не так, то это противоречило бы в силу теоремы 4.3 оптимальности u.

Можно привести ряд критериев выполнения условия единственности решения (5.29), доказательство которых базируется на приемах, используемых в статье Н. И. Арбузовой, А. И. Верескова, Н. Д. Николаевой. Эти критерии свидетельствуют о том, что единственность с вероятностью 1 задачи (5.29) — довольно частый случай в практических задачах. Однако, несмотря на это, из рассмотрения не следует исключать и более общий случай. Предположение о единственности может, например, не выполняться, если параметры имеют дискретное распределение.

Опишем алгоритм нахождения сколь угодно большого количества реализаций θ для общего случая. Алгоритм основан на проигрывании задачи (5.29) и задачи

$$\begin{gathered}(d(\theta),\, y) \to \max,\\ D(\theta)\, y + A(\theta)\, x^* + b(\theta) \geqslant 0, \quad y \geqslant 0,\end{gathered} \tag{5.30}$$

с одновременным нахождением их решений методом последовательного сокращения невязок (Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин). Если решение задачи (5.30) при конкретной реализации состояния природы невырождено (это легко проверяется), то решение двойственной к ней задачи, задачи (5.29), единственно, и следовательно, при данной реализации состояния природы является одновременно и реализацией решения задачи (5.28). Для приближенного нахождения реализаций стохастических оценок $u^*(\theta)$ при состояниях природы $\theta = \theta^r$, при которых решение задачи (5.29) не единственно, необходимо решить задачу линейного программирования относительно u^r:

$$\begin{gathered}\frac{1}{L}\sum_{r\in\Xi}(b(\theta^r),\, u^r) \to \min,\\ \frac{1}{L}\sum_{r\in\Xi}A'(\theta^r)\, u^r + A \leqslant 0,\\ D'(\theta^r)\, u^r + d(\theta^r) \leqslant 0 \qquad (r\in\Xi),\\ u^r \geqslant 0 \qquad (r\in\Xi),\end{gathered} \tag{5.31}$$

где Ξ — множество реализаций состояния природы, для которых решение задачи (5.31) не единственно; L — количество независимых испытаний, для которых $r\in\Xi$; $A = a + \mathsf{M}\,(A'(\theta)\, u^*(\theta)/\theta \bar{\in} \Xi)\, \mathsf{P}(\theta\in\Xi)$ (A подсчитывается с помощью метода Монте-Карло).

Если вероятность вырождения задачи (5.30) мала, что является типичным случаем в практических задачах, то задача (5.31) имеет небольшую размерность и ее решение не представляет труда. В противном случае для решения задачи (5.31) можно использовать блочные методы.

Большое значение для повышения реальной скорости сходимости стохастических квазиградиентных методов является разумная стратегия выбора шаговых множителей ρ_s. Условия, которые накладываются на ρ_s, выделяют довольно широкий класс последовательностей, которые гарантируют теоретическую сходимость стохастических квазиградиентных методов к оптимальному решению. Естественно, стратегия выбора шаговых множителей должна учитывать специфику конкретной задачи и предысторию последовательности приближений.

Определенную информацию о возрастании целевой функции может дать анализ поведения значений $f(x^s, \theta^s)$ и

$$F_s = \frac{1}{L+1} \sum_{l=s-L}^{s} f(x^l, \theta^l),$$

где $f(x^s, \theta^s) = (a, x^s) + \max\limits_{y \in Y(\theta^s, x^s)} (d(\theta^s), y)$.

Опыт проведения расчетов на ЭВМ показал приемлемость следующего способа регулировки ρ_s: ρ_s полагается равной величине $\frac{K_s}{1+s}$, где $0 < \underline{K} \leqslant K_s \leqslant \bar{K} < \infty$, причем K_s полагается равной константе C_r в r-й серии итераций. После проведения первой серии итераций анализируется характер поведения функций $\frac{1}{L+1} \sum\limits_{l=s-L}^{s} f(x^s, \theta^s)$ и $\Lambda_s = \frac{1}{L+1} \sum\limits_{l=s-L}^{s} (b(\theta^l), u(x^l, \theta^l))$. Типичные графики, описывающие поведение функций F_s, Λ_s, $f(x^s, \theta^s)$ и $(b(\theta^s), u(x^s, \theta^s))$, имеют вид, изображенный на рис. 18. Наличие участка типа (A, B), где в «среднем» совпадают Λ_s и F_s, свидетельствует о том, что функционалы прямой и двойственной задачи близки; это в свою очередь говорит о близости x^s к x^*. Если после проведения первой серии участок типа (A, B) отсутствует, то необходимо провести вторую серию итераций с другим C_r, которое выбирается в зависимости от поведения Λ_s и F_s. В зависимости от распределения, серия содержит от десятка до сотен наблюдений. При удачном выборе K_1, как правило, достаточно провести одну серию итераций.

Представляют интерес и другие правила остановки. Для этих целей можно использовать теорему 4.3. Вычисления прекращаются, если

$$|(x^s,\ \mathsf{M}\,(A'(\theta)\,u\,(x^s,\ \theta)+a))|<\varepsilon,$$

$$\max\{0,\ \mathsf{M}\,(A'(\theta)\,u\,(x^s,\ \theta)+a)\}<\varepsilon.$$

В связи с тем, что вычисление $\mathsf{M}A'(\theta)\,u\,(x,\ \theta)$ на каждой

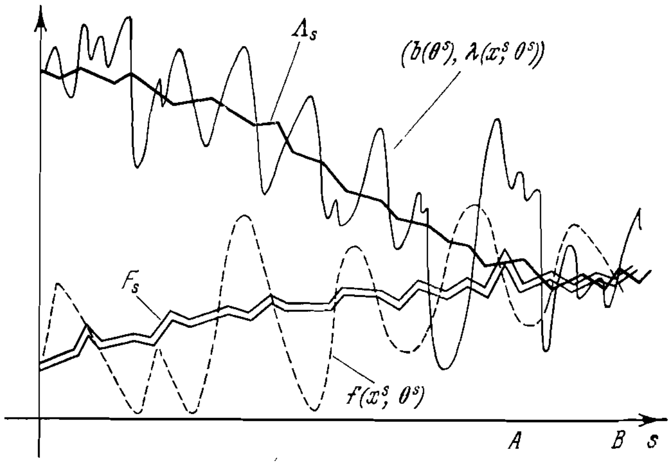

Рис. 18.

итерации связано с большим объемом вычислительной работы, $\mathsf{M}A'(\theta)\,u\,(x,\ \theta)$ целесообразно заменять на

$$\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}A'(\theta^k)\,u\,(x^k,\ \theta^k).$$

Остановимся вкратце на информационном обеспечении стохастических моделей производства. В работах В. М. Ефимова и В. М. Ефимова и В. А. Спивака обоснована возможность использования опыта и интуиции экспертов для определения вероятностного распределения того или иного параметра. При отсутствии достаточных статистических данных этот метод является единственно возможным.

При использовании регрессионных моделей для прогнозирования параметров при достаточном количестве наблюдений имеется возможность определить распределение параметров, базируясь на статистических данных. $f_{ij}(t)$ — тренд прогнозируемого коэффициента a_{ij}, определенный с помощью методов теории прогнозирования. Разность $\varepsilon_{ij}(t) = a_{ij}(t) - f_{ij}(t)$ является случайной составляющей коэффициентов удельных выпусков a_{ij}. Если при этом $\varepsilon_{ij}(t)$ окажется стационарным случайным процессом, то по реализациям $\varepsilon_{ij}(t)$ можно построить полигон или гистограмму и найти распределение методами математической статистики. Распределение иногда можно и не искать в аналитическом виде, поскольку метод стохастических квазиградиентов требует на каждой итерации лишь независимые реализации случайных параметров.

2. Методы экономико-математического анализа прикладных стохастических моделей производства. Изученные выше свойства стохастических оценок полезны не только для теоретического анализа общих моделей, но также и для практической реализации прикладных стохастических моделей. С помощью изложенной ниже методики можно поэтапно уточнять модель экономической системы, добиваться большей адекватности модели моделируемому объекту, а также определять нормативы экономической эффективности ингредиентов. Подобная методика для линейных моделей довольно подробно разработана и дала хорошие результаты при ее практическом использовании (А. Г. Аганбегян).

Изложим основные пункты экономико-математического анализа стохастических моделей.

I. Анализ характера исходной информации. Выявляются случайные параметры модели с малой дисперсией, а также малосущественные параметры с целью их замены детерминированными величинами. Анализируются типы распределений случайных параметров и проверяются критерии единственности решения задачи (5.29).

II. Сравнение результатов расчетов по стохастической модели и ее детерминированному аналогу. При подобном сравнении удается проследить основные структурные сдвиги плана экономической системы, вследствие более полного учета стохастики, выявить стохастические факторы, влияющие на изменение плановых проектировок и т. д.

III. Анализ стохастических оценок. На основании алгоритмов, изложенных в настоящем параграфе, подсчитываются вероятностные характеристики стохастических оценок. Математические ожидания стохастических оценок сравниваются с двойственными оценками детерминированного аналога. Анализируются причины, повлекшие за собой изменения дефицитности продукции при учете стохастического характера исходной информации. Исследуются вероятностные свойства плана-коррекции с помощью метода Монте-Карло (вероятность децифита, вероятность оптимальности определенного базиса и др.).

IV. Анализ структуры стохастических оценок. Определяется структура математического ожидания стохастических оценок на продукцию, производимую программными способами, с помощью условия 2.а теоремы 4.3, а также изучается структура стохастических оценок на продукцию, произведенную коррекционными способами, с помощью условия 2.в теоремы 4.3.

V. Подсчет ценности полной информации. Ценность полной информации подсчитывается по формуле

$$C_I = \mathsf{M}\,((a(\theta),\, x^*(\theta)) + (d(\theta),\, y^{**}(\theta))) - \\ - (a,\, x^*) - \mathsf{M}\,(d(\theta),\, y^*(\theta)),$$

где $(x^*(\theta),\ y^{**}(\theta))$ — оптимальное решение исследуемой модели при условии, что все технологические способы коррекционные. Это в свою очередь означает, что плановый орган имеет возможность получить полную информацию о реализациях случайных параметров. Подобный подход к оценке ценности информации имеется в книге У. Т. Морриса.

VI. Исследование целесообразности включения в модель дополнительных технологических способов. Это исследование производится с помощью критериев эффективности способов, изложенных в § 3 настоящей главы.

VII. Определение специфических показателей, характеризующих те или иные особенности оптимального плана (норма эффективности, темпы роста и др.). Анализ соотношений между этими показателями.

VIII. Подготовка рекомендаций по усовершенствованию модели. Повышение точности той или иной группы параметров, включение дополнительных технологических способов, изменение величин ресурсов, оценка эффективности мероприятий по получению дополнительной информации и др.

Изложенные выше пункты экономико-математического анализа составляют лишь остов, костяк для изучения и усовершенствования стохастических моделей. Эта схема может (и должна) существенно модифицироваться применительно к каждой исследуемой модели, более тонко и специально учитывать специфические свойства модели.

3. Стохастические модели в системе моделей, описывающей сложную экономическую систему. При теоретическом анализе наиболее общих свойств экономики вполне правомерно предполагать, что изучаемая экономическая система описывается одной достаточно общей математической моделью. Практическая же реализация единой модели, описывающей во всех тонкостях изучаемую экономическую систему, наталкивается на большие, если не сказать непреодолимые, трудности. Первые опыты по моделированию достаточно сложных экономических систем, и особенно на уровне народного хозяйства в целом, показали, что более или менее удовлетворительное описание этих систем с помощью единой модели с точки зрения практической реализации вряд ли возможно на данном этапе развития экономико-математических методов и вычислительной техники. Помимо громадной размерности этой модели, она должна быть еще и стохастической, целочисленной, нелинейной, динамической и т. д., что отодвигает ее практическую реализацию в необозримое будущее. Более реальным является путь реализации и взаимоувязки системы моделей, в каждой из которых достаточно сильно акцентируется один из существенных аспектов функционирования экономики (динамический, территориальный, технологический и др.) и довольно приближенно описываются другие аспекты. Например, система моделей народнохозяйственного планирования, созданная и апробированная в НИИ ЭиОПП СО АН СССР (см. А. Г. Аганбегян, К. А. Багриновский, А. Г. Гранберг), включает в себя две модели: динамическую межотраслевую и оптимизационную многоотраслевую. Первая модель предназначена для определения достаточно общих тенденций развития народного хозяйства и является динамической. Вторая модель за счет упрощенного описания динамики более подробно отображает территориальный фактор. Модели увязываются с помощью взаимного обмена информацией и цикла взаимосвязанных расчетов по этим моделям. Выходная информация этих моделей служит базой для формирования отраслевых моделей.

Нам представляется, что системы моделей подобного рода весьма целесообразно дополнить моделями, специализирующимися на более детальном описании вероятностных свойств экономики. Численные расчеты и экономико-математический анализ стохастической модели позволит произвести корректировку входных данных в других моделях системы, что даст возможность как избежать ненужного риска, так и не проявлять чрезмерной осторожности при выборе плановых проектировок. То и другое существенно повышает средний эффект от планирования.

§ 6. Примеры экономико-математического анализа стохастических моделей. Простые задачи складирования

Проиллюстрируем применение методов экономико-математического анализа на примере простых задач складирования, которые рассматривались в главе III. Специальная структура этих задач позволяет построить экономные алгоритмы их решения.

1. Простейшая модель складирования. Модель имеет следующий вид:

$$F(x) = \mathsf{M}\max\{\alpha(x-\theta), \beta(\theta-x)\} \to \min. \tag{5.32}$$

Обозначения те же, что и в главе III. Задачу (5.32) можно преобразовать к следующему, более удобному для качественного исследования виду: найти такие x и борелевские функции $z_+(\theta)$ и $z_-(\theta)$, чтобы

$$\alpha\mathsf{M}z_+(\theta) + \beta\mathsf{M}z_-(\theta) \to \min, \tag{5.33}$$

$$x - z_+(\theta) + z_-(\theta) = \theta \pmod{\mathsf{P}}, \tag{5.34}$$

$$z_+(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}, \quad z_-(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}} \tag{5.35}$$

($z_+(\theta)$ можно интерпретировать как избыток продукции, $z_-(\theta)$ — как дефицит). Будем предполагать, что $\alpha, \beta > 0$

и $\mathsf{M}\theta^2 < \infty$. Очевидно, что множество решений (5.32) ограничено. Отсюда для произвольного решения (5.33) — (5.35) $(x^*, \overset{*}{z}_+(\theta), \overset{*}{z}_-(\theta))$ имеем

$$|x^*| < \infty, \quad \mathsf{M}\,|\overset{*}{z}_+(\theta)|^2 < \infty, \quad \mathsf{M}\,|\overset{*}{z}_-(\theta)|^2 < \infty.$$

Запишем для (5.33) — (5.35) двойственную задачу: найти такую борелевскую функцию $u(\theta)$, чтобы

$$\mathsf{M}\,(\theta u(\theta)) \to \max, \tag{5.36}$$

$$\mathsf{M}\,u(\theta) = 0, \tag{5.37}$$

$$-\alpha \leqslant u(\theta) \leqslant \beta \ (\mathrm{mod}\ \mathsf{P}). \tag{5.38}$$

Из (5.38) следует, что для произвольного допустимого решения задачи (5.36)—(5.38) $\mathsf{M}u^2(\theta) < \infty$. Таким образом, для задач (5.33)—(5.35) и (5.36)—(5.38) справедливы условия, достаточные для выполнения теорем 4.2 и 4.3. Конкретизируя эти теоремы применительно к задаче (5.33)—(5.35), имеем:

$$\text{если } \overset{*}{z}_+(\theta) > 0, \text{ то } u^*(\theta) = -\alpha, \tag{5.39}$$

$$\text{если } \overset{*}{z}_-(\theta) > 0, \text{ то } u^*(\theta) = \beta. \tag{5.40}$$

Если предположить, что

$$\mathsf{P}\,(x^* = \theta) = 0, \tag{5.41}$$

то из (5.39), (5.40), (5.34), (5.37) можно получить формулу

$$\mathsf{P}\,(\theta < x^*) = \frac{\beta}{\alpha + \beta}. \tag{5.42}$$

В главе III формула (5.42) получена при условии существования плотности θ. Сейчас это условие заменено на более слабое — условие (5.41).

Путем элементарных выкладок для некоторых распределений θ для x^* можно найти явное выражение. Например, если θ распределено равномерно на интервале (a, b), то

$$x^* = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\, a + \frac{\beta}{\alpha + \beta}\, b. \tag{5.43}$$

Из (5.43) следует, что оптимальная величина запаса находится между наименьшей и наибольшей величиной спроса. Если штраф за избыток продукции $\alpha \to \infty$, то x^* стремится к нижней границе спроса, если стоимость дефицита $\beta \to \infty$, то x^* стремится к нижней границе спроса. Из теоремы 4.6 следует, что при малом изменении спроса на детерминированную величину изменения оптимального значения функционала не происходит. Это объясняется тем, что в модели не учитываются затраты на создание запаса.

Ценность полной информации, т. е. величина уменьшения функционала при условии, что решение происходит при полной информации, в данном случае определяется как

$$C_I = F(x^*) - F(x^*(\theta)),$$

где $x^*(\theta)$ — функция от θ, являющаяся компонентой решения задачи

$$\alpha \mathsf{M} z_+(\theta) + \beta \mathsf{M} z_-(\theta) \to \max,$$

$$x(\theta) - z_+(\theta) + z_-(\theta) = \theta \pmod{\mathsf{P}},$$

$$z_+(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}, \quad z_-(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}.$$

Очевидно, что $x^*(\theta) = \theta$, и, следовательно, $F(x^*(\theta)) = 0$. Если θ равномерно распределено на (a, b), то

$$C_I = \frac{\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)}{2(\alpha + \beta)^3}(b - a). \tag{5.44}$$

Формула (5.44) вполне сообразуется со здравым смыслом: чем больший разброс спроса θ, тем больший выигрыш дает точное знание о нем.

2. Модель со взаимозаменяемостью и затратами на складирование. Рассмотрим некоторое усложнение простейшей модели, которое заключается в том, что предполагается возможность удовлетворения спроса несколькими видами продукции, причем, кроме затрат, связанных с дефицитом и избытком продукции, учитываются еще и затраты на складирование. Введем обозначения: x_j — количество j-й запасаемой продукции; λ_j — спрос, который удовлетворяется единицей j-й продукции; c_j — затраты на складирование единицы j-й продукции. Остальные обозначения — прежние. Необходимо определить такие запасы продукции каждого вида, чтобы минимизировать суммарные затраты на складирование и ожидаемые затраты, связанные с избытком и дефицитом продукции, т. е. $x = (x_1, \ldots, x_n)$ является решением следующей задачи:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j +$$

$$+\mathsf{M} \max \left\{ \alpha \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j - \theta \right), \beta \left(\theta - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \right) \right\} \to \min, \tag{5.45}$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad (j = \overline{1, n}).$$

Будем предполагать, что $\alpha + \beta > 0$ и $\lambda_j > 0$.

Так же как и простейшую, задачу (5.45) для качественного исследования более удобно представить в виде двухэтапной стохастической задачи: найти такой $x = (x_1, \ldots$ $\ldots, x_n)$ и такие функции от θ $z_+(\theta)$ и $z_-(\theta)$, чтобы

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \alpha \mathsf{M} z_+(\theta) + \beta \mathsf{M} z_-(\theta) \to \min, \tag{5.46}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j - z_+(\theta) + z_-(\theta) = \theta \,(\mathrm{mod}\, \mathsf{P}), \tag{5.47}$$

$$x_j \geqslant 0 \; (j = \overline{1, n}),$$

$$z_+(\theta) \geqslant 0 \,(\mathrm{mod}\, \mathsf{P}), \quad z_-(\theta) \geqslant 0 \,(\mathrm{mod}\, \mathsf{P}). \tag{5.48}$$

Предположив, что $\mathsf{M}\theta^2 < \infty$, нетрудно убедиться, что для задачи (5.46)—(5.48) имеют место условия, достаточные для выполнения соотношений двойственности и условий оптимальности для задач стохастического программирования. Двойственная задача к задаче (5.46)—(5.48) имеет вид

$$\mathsf{M}\,(\theta u(\theta)) \to \max, \tag{5.49}$$

$$\mathsf{M}\, u(\theta) \leqslant \frac{c_j}{\lambda_j} \qquad (j = \overline{1, n}), \tag{5.50}$$

$$-\alpha \leqslant u(\theta) \leqslant \beta \,(\mathrm{mod}\, \mathsf{P}). \tag{5.51}$$

Экономический смысл задачи (5.49)—(5.51) состоит в нахождении такой цены, зависимой от спроса на продукцию, чтобы максимизировалась ожидаемая оценка спроса в этой цене, при условии, что ожидаемое значение цены не превышает минимальных затрат на складирование единицы удовлетворенного спроса единицей продукта и, кроме того, с вероятностью 1 цена заключена в пределах $-\alpha$ и β.

Очевидно, что (5.50) можно заменить на

$$\mathsf{M}\, u(\theta) \leqslant \min_j \frac{c_j}{\lambda_j}. \tag{5.50$'$}$$

По теореме 4.3 план $(x^*, z^*_+(\theta), z^*_-(\theta)) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}$ задачи (5.46) — (5.48) является оптимальным тогда и только тогда, когда

$$\text{из } x^*_j > 0 \text{ следует } \mathsf{M} u^*(\theta) = c_j/\lambda_j, \tag{5.52}$$

$$\text{из } z^*_+(\theta) > 0 \text{ следует } u^*(\theta) = -\alpha, \tag{5.53}$$

$$\text{из } z^*_-(\theta) > 0 \text{ следует } u^*(\theta) = \beta, \tag{5.54}$$

где $u^*(\theta)$ — решение задачи (5.49)—(5.51).

Непосредственным следствием (5.52) является то, что в оптимальном плане запасаться будут лишь продукты из множества

$$E = \left\{ k : \frac{c_k}{\lambda_k} = \min_j \frac{c_j}{\lambda_j} \right\}.$$

Назовем его *множеством наиболее экономичных продуктов*. Таким образом, для нахождения оптимального решения достаточно знать лишь величины запасов наиболее экономичных продуктов. Запас остальных в силу сделанных замечаний равен нулю. Полную характеристику оптимальных решений задачи (5.46)—(5.48) дает следующая теорема.

Теорема 5.3. *Пусть* $\mathsf{P}(\theta > 0) = 1$. *Тогда:*

1. *а) если*

$$\beta > \min_j \frac{c_j}{\lambda_j}, \tag{5.55}$$

то $\sum_{j \in E} x^*_j > 0$;

б) если $\beta < \min_j \frac{c_j}{\lambda_j}$, *то* $x^*_j = 0$ *для* $j \in E$;

в) если $\beta = \min\limits_j \frac{c_j}{\lambda_j}$, *то произвольный план запасов, удовлетворяющий соотношению*

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^* \leqslant \theta \ (\mathrm{mod}\ \mathsf{P}),$$

является оптимальным, и наоборот.

2. *Если выполняется* (5.55),

$$\mathsf{P}\left(\sum_{j \in E} \lambda_j x_j^* = \theta\right) = 0, \tag{5.56}$$

то оптимальные запасы наиболее экономичных продуктов находятся из условия

$$H\left(\sum_{j \in E} \lambda_j x_j\right) = \frac{\beta - \min\limits_j \frac{c_j}{\lambda_j}}{\alpha + \beta}, \tag{5.57}$$

где $H(z)$ — *функция распределения* θ.

Доказательство. Если $\beta \leqslant \min\limits_j \frac{c_j}{\lambda_j}$, то из (5.49) — (5.51) и того, что $\mathsf{P}(\theta > 0) = 1$, следует, что

$$u^*(\theta) = \beta \ (\mathrm{mod}\ \mathsf{P}). \tag{5.58}$$

Если же $\beta < \min\limits_j \frac{c_j}{\lambda_j}$, то из (5.58) и (5.52) следует доказательство 1.*б*.

Пусть $\beta = \min\limits_j \frac{c_j}{\lambda_j}$. Поскольку по-прежнему $u^*(\theta) = \beta$, то из (5.53) следует, что $z_+^*(\theta) = 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathsf{P})$, и следовательно, из (5.47) получаем

$$\sum_{j \in E} \lambda_j x_j^* \leqslant \theta \ (\mathrm{mod}\ \mathsf{P}).$$

Нетрудно заметить, что для произвольного плана, удовлетворяющего предыдущему соотношению, и для $u^*(\theta) = \beta$ выполняются (5.52)—(5.54), т. е. этот план является оптимальным. Таким образом, доказан пункт 1.*в*.

Предположим, что выполняется (5.55) и в то же время $x_j^* = 0$ $(j \in E)$. Тогда из (5.47) и из предположения теоремы получаем $z_-^*(\theta) > 0$ (mod **P**). Далее, используя (5.54), можно утверждать что $\mathsf{M}\, u^*(\theta) = \beta$, а это в сочетании с (5.55) и (5.50) дает противоречие, которое и доказывает пункт 1. *a* теоремы.

Перейдем к доказательству пункта 2 теоремы. Из (5.56) и (5.47) следует, что

$$\mathsf{P}(z_-^*(\theta) = 0 \cap z_+^*(\theta) = 0) = 0,$$

а с учетом (5.53), (5.54) получаем с вероятностью 1

$$u^*(\theta) = \begin{cases} -\alpha, \\ \beta. \end{cases}$$

Из последнего соотношения, (5.52) и пункта 1. *a* теоремы можно определить вероятность того, что $u^*(\theta) = -\alpha$ или, что же самое, вероятность того, что $\sum_{j \in E} \lambda_j x_j^* > 0$. Эта вероятность равна $\dfrac{\beta - \min_j \frac{c_j}{\lambda_j}}{\alpha + \beta}$, что и доказывает теорему.

З а м е ч а н и е 1. Условие (5.56), как правило, выполняется в практических задачах, и заведомо выполняется, если θ обладает плотностью распределения.

З а м е ч а н и е 2. Также типичным случаем в практических задачах является выполнение условия (5.55), экономический смысл которого состоит в том, что затраты, связанные с неудовлетворением спроса, больше затрат на складирование единицы удовлетворенного спроса единицей наиболее экономичного продукта.

З а м е ч а н и е 3. Пусть выполняется условие (5.55) и (5.56) и множество E состоит из одного продукта. Тогда оптимальный план определяется однозначно из условия

$$H(\lambda_k x_k) = \frac{\beta - \min_j \frac{c_j}{\lambda_j}}{\alpha + \beta}.$$

Если E состоит более чем из одного продукта, то оптимальный план не однозначен, однако, нетрудно из (5.57) получить какой-нибудь один продукт.

Замечание 4. Из (5.52) следует, что если все $c_j > 0$, то $Mu^*(\theta) > 0$, т. е. продукция спроса в среднем дефицитна.

3. **Модель со спросом на несколько продуктов и с ограничением на емкость склада.** Исследуем модель со спросом на несколько продуктов, которая была сформулирована в третьей главе:

$$F(x) = \mathsf{M} \sum_{k=1}^{r} \max \left\{ \alpha_k \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jk} x_{jk} - \theta_k \right), \beta_k \left(\theta_k - \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jk} x_{jk} \right) \right\} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{r} x_{jk} \leqslant a, \qquad x_{jk} \geqslant 0 \ (k = \overline{1, r};\ j = \overline{1, n}). \tag{5.59}$$

Обозначения прежние. Преобразуем задачу (5.59) к виду: найти такие x_{jk} и такие функции $z_k^+(\theta)$ и $z_k^-(\theta)$ $(k = \overline{1, r})$, чтобы

$$\sum_{k=1}^{r} (\alpha_k \mathsf{M} z_k^+(\theta) + \beta_k \mathsf{M} z_k^-(\theta)) \to \min, \tag{5.60}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jk} x_{jk} - z_k^+(\theta) + z_k^-(\theta) = \theta_k \ (\mathrm{mod}\ \mathsf{P}) \qquad (k = \overline{1, r}), \tag{5.61}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{r} x_{jk} \leqslant a, \tag{5.62}$$

$$x_{jk} \geqslant 0, \quad z_k^+(\theta) \geqslant 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathsf{P}),$$
$$z_k^-(\theta) \geqslant 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathsf{P}) \qquad (k = \overline{1, r};\ j = \overline{1, n}). \tag{5.63}$$

При предположении о том, что $\mathsf{M}\theta_k^2 < \infty (k = \overline{1, r})$, для задачи (5.60)—(5.63) выполняются соотношения двойственности для линейных задач стохастического программирования. Кроме того, будем предполагать, что выполняются естественные условия α_k, β_k, λ_{jk}, a_j, $a > 0$. Двойственная задача имеет вид: найти такие функции $u_k(\theta)$ и величину w, чтобы

$$\mathsf{M}\left(\sum_{k=1}^{r} \theta_k u_k(\theta)\right) - wa \to \max, \tag{5.64}$$

$$\mathsf{M} u_k(\theta) \leqslant \frac{a_j}{\lambda_{jk}} w \qquad (k = \overline{1, r};\ j = \overline{1, n}), \tag{5.65}$$

$$-\alpha \leqslant u_k(\theta) \leqslant \beta \,(\mathrm{mod}\ \mathsf{P}) \qquad (k = \overline{1, r}), \tag{5.66}$$

$$w \geqslant 0. \tag{5.67}$$

В соответствии с теоремой 4.3 сформулируем признак оптимальности для задачи (5.60)—(5.63): допустимый план

$$(x^*, z^*(\theta)) = (\{x_{jk}\}_{j=\overline{1,n};\ k=\overline{1,r}},\ \{(z_k^+(\theta),\ z_k^-(\theta)\}_{k=\overline{1,r}})$$

является оптимальным тогда и только тогда, когда между $(x^*, z^*(\theta))$ и решением задачи (5.64) — (5.67) $(u^*(\theta),\ w)$ существует следующая взаимосвязь:

$$\text{если } x_{jk}^* > 0, \text{ то } \mathsf{M}u_k^*(\theta) = w^* \min_j \frac{a_j}{\lambda_{jk}}, \tag{5.68}$$

$$\text{если } z_k^+(\theta) > 0, \text{ то } u_k^*(\theta) = -\alpha_k, \tag{5.69}$$

$$\text{если } z_k^-(\theta) > 0, \text{ то } u_k^*(\theta) = \beta_k, \tag{5.70}$$

$$\text{если } \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{r} x_{jk}^* < a, \text{ то } w^* = 0. \tag{5.71}$$

Если $w^* = 0$, то нетрудно заметить, что задача (5.60) — (5.63) сводится к решению r задач типа (5.45). Если же $w^* > 0$, то для решения задачи (5.59) целесообразно применять двойственный градиентный метод. Для этого составим функцию Лагранжа для задачи (5.59):

$$\varphi(x, u) =$$

$$= \mathsf{M} \sum_{k=1}^{r} \max \left\{ \alpha_k \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jk} x_{jk} - \theta_k \right),\ \beta_k \left(\theta_k - \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jk} x_{jk} \right) \right\} +$$

$$+ u \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} a_j x_{jk} - a \right).$$

Решение находится использованием следующего рекуррентного соотношения:

$$u^{s+1} = \max\left\{0, u^s + \rho_s\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} a_j x_{jk}^s - a\right)\right\},$$

где x_{jk}^s — решение задачи

$$\varphi(x, u^s) \to \min, \qquad x \geqslant 0. \tag{5.72}$$

Нетрудно заметить, что задача (5.72) распадается на несколько подзадач типа (5.45) и для их решения можно применять теорему 5.3.

Представляет интерес изучение более сложных стохастических моделей складирования, в частности, моделей, в которых учитывается возможность корректировки ранее принятых планов после уточнения информации о спросе, а также изучение стохастических моделей складирования и производства.

ГЛАВА VI

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МЕЖОТРАСЛЕВЫЕ МОДЕЛИ

§ 1. Введение

В настоящей главе будут изучаться стохастические межотраслевые модели, которые являются частным случаем общей стохастической модели производства. Выбор в качестве объекта исследований именно такого класса специальных моделей, как межотраслевые стохастические, не случаен.

Удобство описания многоотраслевых экономических систем, интересные математические свойства, которые имеют прозрачную экономическую интерпретацию,— вот те качества, которые привлекают внимание к линейным межотраслевым моделям. Однако в основе детерминированных линейных межотраслевых моделей лежит весьма существенное допущение о возможности получения абсолютно достоверной информации о неуправляемых параметрах (коэффициенты прямых затрат, приростной фондоемкости, капиталоемкости, лаги капиталовложений и др.), что в значительной степени обесценивает как теоретические положения, полученные на основании анализа межотраслевых моделей, так и результаты практических расчетов по прикладным моделям. Это обстоятельство было замечено относительно давно и на него указывалось в ряде работ. Например, В. В. Коссов считает, что жизнеспособность метода межотраслевого баланса в будущем во многом зависит от того, насколько эффективные методы и модели будут созданы для учета стохастического характера исходной информации в межотраслевых системах.

В настоящей главе предлагается подход к изучению указанной проблемы. Однако перед основным изложением мы считаем уместным остановиться на тех немногочисленных работах, в которых изучаются межотраслевые модели, в той или иной форме учитывающие вероятностный характер исходной информации.

В работе Э. Б. Ершова изучаются вероятностные свойства матрицы полных затрат и вектора валовых выпусков простейшей статической модели межотраслевого баланса (модель Леонтьева)

$$x = Ax + y,$$

при условии, что матрица прямых затрат A и вектор конечной продукции y случайны. Получены приближенные формулы для подсчета первых и вторых центральных моментов вектора x и матрицы $(E - A)^{-1}$ по тем же моментам матрицы A и вектора y.

В работе Э. А. Сатановой было проведено экспериментальное исследование с помощью метода Монте-Карло вероятностных характеристик решения полудинамической межотраслевой модели при условии, что некоторые параметры модели случайны.

Интересный результат получен В. Л. Гирко. Им найдено распределение решения модели Леонтьева при $n \to \infty$, где n — количество отраслей.

Модели, изучаемые в работах Э. Б. Ершова, Э. А. Сатановой, В. Л. Гирко, можно рассматривать как модели оперативного стохастического программирования, т. е. как модели, в которых выбирают решения в соответствии со схемой

$$\textit{наблюдение — решение.} \tag{6.1}$$

В настоящей работе изучаются ситуации, когда выбор решения полностью или частично предшествует наблюдению случайных параметров, т. е. выбор решений частично осуществляется на основе априорной информации о неуправляемых параметрах, получаемой плановым органом.

Далее изучим основные свойства оптимального плана и стохастических оценок, связанных с этим планом, в различных постановках стохастических межотраслевых моделей. Все рассмотренные ниже модели являются частным случаем общей стохастической модели производственного планирования и обладают всеми свойствами общей модели. Однако специфика межотраслевых матриц позволяет установить ряд дополнительных свойств, которые характеризуют особенности функционирования оптимальных стохастических межотраслевых систем, а также позволяют построить экономные алгоритмы для численного нахождения оптимального решения этих моделей.

§ 2. Стохастический аналог модели Леонтьева

1. Формулировка модели. Рассмотрим простейшую модель межотраслевых связей—статическую модель межотраслевого баланса, или, как ее еще называют, модель Леонтьева. Она записывается с помощью системы линейных уравнений

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i \qquad (i = \overline{1, n}),$$

или, в векторно-матричных обозначениях,

$$x = Ax + y. \tag{6.2}$$

Выше приняты обозначения: n — количество отраслей; a_{ij} — удельные затраты i-го продукта на производство j-го; y_i — конечная продукция в i-й отрасли; x_i — валовая продукция в i-й отрасли.

Как правило, модель Леонтьева используется для нахождения по заданному вектору конечной продукции соответствующего вектора валовых выпусков. Реальные матрицы прямых затрат A таковы, что $|E - A| \neq 0$, т. е. решение системы уравнений (6.2) существует и единственно.

Ситуация изменяется, если матрицу A вследствие ошибок измерения и прогнозирования считать случайной, т. е. зависимой от состояния природы θ. Если план по выпуску валовой продукции выбирать не зависящим от состояния природы, то реальный выпуск конечной продукции

$$x - A(\theta)\, x$$

будет случайным вектором, который лишь в исключительных случаях совпадает с планом по выпуску конечной продукции. Поэтому, вообще говоря, при детерминированных x и y баланса добиться невозможно. Коль скоро баланс невозможен, то естественно план выпуска валовой продукции выбирать таким образом, чтобы хотя бы невязки были минимальны в некотором смысле. Например, план по выпуску валовой продукции можно выбирать таким образом, чтобы минимизировать математическое ожидание суммы квадратов невязок или математическое ожидание максимальной невязки по модулю. В первом случае x является решением задачи стохастического программирования вида

$$\mathsf{M}\,\| x - A(\theta)\,x - y \|^2 \underset{x}{\rightarrow} \min, \tag{6.3}$$

во втором — задачи

$$\mathsf{M}\max_i \left| x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)\,x_j - y_i \right| \underset{x}{\rightarrow} \min.$$

Рассмотрим подробнее модель (6.3), которую мы будем называть *стохастическим аналогом модели Леонтьева*.

2. Стохастическая продуктивность модели. Важным свойством детерминированной модели Леонтьева является свойство продуктивности, которое доказывается при весьма несильных предположениях и суть которого заключается в существовании неотрицательных решений системы уравнений (6.2) для любых неотрицательных векторов конечной продукции. По аналогии с детерминированной моделью дадим определение продуктивности для модели (6.3). Назовем модель (6.3) *стохастически продуктивной*, если для произвольного $y \geqslant 0$ существует неотрицательное решение задачи (6.3).

С понятием стохастической продуктивности тесно связано понятие полных стохастических затрат валовой продукции (так же как и в детерминированном случае — продуктивность и полные затраты валовой продукции). Будем рассматривать решение задачи (6.3) как вектор-функцию от y, т. е. $x(y)$.

Если существуют $\dfrac{\partial x_i(y)}{\partial y_j}$ $(i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, n})$, то под матрицей *полных стохастических затрат* в валовой продукции будем понимать матрицу $\beta = \{\beta_{ij}\}_{(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n})}$, где

$$\beta_{ij} = \frac{\partial x_i(y)}{\partial y_j},$$

$x_i(y)$ — i-я компонента решения задачи (6.3), зависящего от вектора y.

Можно привести довольно простые достаточные условия существования матрицы β. Одно из таких условий формулируется следующим образом: если

$$\mathsf{P}(|E - A(\theta)| \neq 0) = \delta > 0, \tag{6.4}$$

то матрица полных стохастических затрат существует. Сразу же заметим, что условие (6.4) для реальных экономических матриц затрат обычно выполняется, поскольку есть все основания считать матрицу $A(\theta)$ с вероятностью 1 продуктивной, а матрицу вида $E - A(\theta)$, где $A(\theta)$ — продуктивная матрица, невырожденной. Нетрудно убедиться, что из (6.4) следует существование матрицы β. Действительно,

$$F(x) = \mathsf{M}\,\|x - A(\theta)\,x - y\|^2 =$$
$$= \mathsf{M}\,\|x - A(\theta)\,x\|^2 - 2\,(x - \mathsf{M}A(\theta)\,x, y) + \|y\|^2.$$

Поскольку имеет место (6.4), то с положительной вероятностью $\|x - A(\theta)\,x\|^2 > 0$. Отсюда, для тех θ, для которых выполняется последнее неравенство, функция $\|x - A(\theta)x\|^2$ и ее условное математическое ожидание будут строго выпуклыми. Сумма же выпуклых и строго выпуклых функций — строго выпуклая функция, т. е. $F(x)$ — строго выпукла.

Далее, из строгой выпуклости $F(x)$ и ее ограниченности снизу ($F(x) \geqslant 0$) следует существование и единственность точки минимума функции $F(x)$. Поэтому необходимые и достаточные условия минимума функции

$$F_x(x) = \mathsf{M}\,(E - A'(\theta))\,(E - A(\theta))\,x -$$
$$- (E - \mathsf{M}A'(\theta))\,y = 0 \qquad (6.5)$$

имеют единственное решение, которое представимо в виде

$$x(y) = (E - \mathsf{M}R(\theta))^{-1}\,(E - \mathsf{M}A'(\theta))\,y, \qquad (6.6)$$

где

$$R(\theta) = A'(\theta) + A(\theta) - A'(\theta)\,A(\theta).$$

Из (6.6) получаем, что

$$\beta = (E - \mathsf{M}R(\theta))^{-1}\,(E - \mathsf{M}A'(\theta)). \qquad (6.7)$$

Формула (6.7) показывает, что матрица β не зависит от y.

Справедливы следующие критерии стохастической продуктивности стохастического аналога модели Леонтьева.

1. Модель (6.3) тогда и только тогда стохастически продуктивна, если матрица полных стохастических затрат неотрицательна.

2. Если $|E - \mathsf{M} A(\theta)| \neq 0$, существует хотя бы одно неотрицательное решение задачи (6.3) при $y > 0$ и, кроме того,

$$\mathsf{M} A(\theta) \geqslant B'\mathsf{M}\varepsilon'(\theta)\,\varepsilon(\theta), \tag{6.8}$$

где

$$B = (E - \mathsf{M} A(\theta))^{-1}, \quad \varepsilon(\theta) = A(\theta) - \mathsf{M} A(\theta),$$

то модель (6.3) стохастически продуктивна.

Докажем эти критерии. Из (6.6) и (6.7) следует равенство $x = \beta y$, которое и доказывает первый критерий. Из условия $|E - \mathsf{M}\,A(\theta)| \neq 0$ критерия 2 следует, что матрица B существует. Поэтому (6.5) можно переписать следующим образом:

$$B'\mathsf{M}\,(E - A'(\theta))(E - A(\theta))\,x = y.$$

Раскрывая скобки под знаком математического ожидания и учитывая, что

$$B'(E - \mathsf{M}A'(\theta)) = E,$$

получаем

$$(E - B'\mathsf{M}\,(E - A'(\theta))\,A(\theta))\,x = y.$$

Преобразуем матрицу $B'\mathsf{M}\,(E - A'(\theta))\,A(\theta)$, заменив $A(\theta)$ на $\mathsf{M}\,A(\theta) + \varepsilon(\theta)$, где $\mathsf{M}\,\varepsilon(\theta) = 0$:

$$\begin{aligned} B'\mathsf{M}\,(E - A'(\theta))\,A(\theta) &= \\ = B'\mathsf{M}\,(E - \mathsf{M}A'(\theta) &- \varepsilon'(\theta))(\mathsf{M}A(\theta) + \varepsilon(\theta)) = \\ = B'\mathsf{M}\,(E &- \mathsf{M}A'(\theta))(\mathsf{M}A(\theta) + \varepsilon(\theta)) - \\ - B'\mathsf{M}\varepsilon'(\theta)\,(\mathsf{M}A(\theta) &+ \varepsilon(\theta)) = \mathsf{M}A(\theta) - B'\mathsf{M}\varepsilon'(\theta)\,\varepsilon(\theta). \end{aligned}$$

В итоге (6.5) преобразуется в

$$(E - \mathsf{M}A(\theta) + B'\mathsf{M}\varepsilon'(\theta)\,\varepsilon(\theta))\,x = y. \tag{6.9}$$

Если существует хотя бы одно неотрицательное решение задачи (6.3) для $y > 0$, то это же можно сказать и о системе линейных уравнений (6.8). В сочетании с условиями (6.8) это дает условия обычной продуктивности модели Леонтьева с матрицей $\mathsf{M}A(\theta) - B'\mathsf{M}\varepsilon'(\theta)\,\varepsilon(\theta)$, а следовательно, и стохастической продуктивности модели (6.3)

Второй критерий можно переформулировать следующим образом: если матрица $\mathsf{M}A(\theta) - B'\,\mathsf{M}\varepsilon'(\theta)\,\varepsilon(\theta)$ неотрицательна и продуктивна в обычном смысле, то стохастический аналог модели Леонтьева стохастически продуктивен. Пользуясь новой формулировкой, можно записать простые достаточные условия стохастической продуктивности:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}a_{ij}(\theta) - \sum_{k=1}^{n} b_{ki} \sum_{L=1}^{n} \mathrm{M}\,\varepsilon_{lk}(\theta)\,\varepsilon_{lj}(\theta) \leqslant 1, \qquad (6.10)$$

для всех j, и хотя бы для одного j должно выполняться строгое неравенство; кроме этого выполняется (6.8). Выше под b_{ki} и $\varepsilon_{lk}(\theta)$ понимаются элементы матриц B и $\varepsilon(\theta)$.

Только что сформулированное условие заметно упрощается, если считать коэффициенты матрицы $A(\theta)$ распределенными независимо, а коэффициенты матрицы $\mathrm{M}A(\theta)$ удовлетворяющими следующему реальному экономическому требованию: $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}\,a_{ij}(\theta) \leqslant 1$ для всех j, и хотя бы для одного j должно выполняться строгое неравенство. Тогда для стохастической продуктивности достаточно только наложить определенные требования на уровень ошибок при определении матрицы $A(\theta)$:

$$\sum_{i=1}^{n} Da_{ij}(\theta)\, b_{ji} \leqslant \mathrm{M}\,a_{ij}(\theta), \qquad (6.11)$$

где D — символ дисперсии. Потребовав, кроме того, чтобы матрица $\mathrm{M}A(\theta)$ была неразложима (это — типичное свойство реальных матриц затрат, генерирующее строгую положительность коэффициентов b_{ij} для всех i, j), неравенство (6.11) можно переписать так:

$$\sum_{i=1}^{n} Da_{ij}(\theta) \leqslant \min_{i} \frac{\mathrm{M}\,a_{ij}(\theta)}{b_{ji}} \qquad (j = \overline{1, n}). \qquad (6.12)$$

Несмотря на довольно прозрачный экономический смысл, который можно придать выражению (6.12), это соотношение накладывает довольно жесткие ограничения на матрицу прямых затрат. Однако, напомним, что неравенство (6.12) дает лишь достаточные условия стохастической продуктивности. Модель (6.3) для реальных матриц $A(\theta)$, как правило, является стохастически продуктивной даже в том случае, если не выполняются неравенства (6.12).

3. **Агрегирование в стохастическом аналоге модели Леонтьева**. Важной проблемой в межотраслевом балансе является проблема агрегирования и дезагрегирования. Представляет интерес рассмотрение хотя бы некоторого фрагмента этой проблемы (например, условий идеального агрегирования) для стохастического аналога модели Леонтьева и сравнение результатов изучения агрегирования для детерминированной модели Леонтьева и ее стохастического аналога.

Под решением агрегированной стохастической модели будем понимать решение следующей задачи:

$$\mathsf{M}\,\|z-\tilde{A}(\theta)z-Ty\|^2 \underset{z}{\to} \min, \qquad (6.13)$$

где $\tilde{A}(\theta)$ — агрегированная матрица прямых затрат; T—оператор агрегирования. Нас будут интересовать случаи, когда $z^* = Tx^*$ (z^*, x^* — решения задач (6.13), (6.3) соответственно).

Используя соотношения (6.9), можно доказать, что необходимыми и достаточными условиями «идеального» агрегирования является выполнение матричного равенства

$$T(\mathsf{M}A(\theta) - B'\mathsf{M}\varepsilon'(\theta)\,\varepsilon(\theta)) = (\mathsf{M}\tilde{A}(\theta) - \tilde{B}'\mathsf{M}\tilde{\varepsilon}'(\theta)\,\varepsilon(\theta))\,T, \qquad (6.14)$$

где

$$\tilde{B} = (E - \mathsf{M}\,\tilde{A}(\theta))^{-1}, \quad \tilde{\varepsilon}(\theta) = \tilde{A}(\theta) - \mathsf{M}\tilde{A}(\theta).$$

Если ошибки при определении матрицы прямых затрат отсутствуют, то равенство (6.14) переходит в известное условие неизменного возврата Хатанака ($TA = \tilde{A}T$). Равенство (6.14) показывает, что на качество агрегирования в стохастическом аналоге модели Леонтьева оказывает влияние уровень помех.

4. **Метод решения**. Для численного решения задачи (6.3) можно использовать метод стохастических квазиградиентов. Нетрудно заметить, что вектор стохастического квазиградиента функции $F(x)$ имеет вид

$$\xi^s = 2(E - A'(\theta^s))(x^s - A(\theta^s)x^s - y),$$

где $A(\theta^s)$ — независимое наблюдение над матрицей $A(\theta)$ в s-й итерации; x^s — приближение в s-й итерации.

Если дисперсии матрицы $A(\theta)$ невелики по сравнению со средними значениями $\mathsf{M}A(\theta)$, то для решения задачи

$$\mathsf{M}\,\|x - A(\theta)\,x - y\|^2 \underset{x}{\to} \min$$

полезно использовать метод, основанный на решении детерминированной модели

$$x = Ax + y$$

(которая в настоящее время широко используется в практике планирования), с последующей коррекцией этого решения в соответствии с величиной помех. Это позволило бы упростить экспериментальные расчеты по стохастической модели. Изложим подобный метод, основанный на том, что считается известной матрица $B = (E - \mathsf{M}A(\theta))^{-1}$ и решение системы уравнений

$$x = \mathsf{M}A(\theta)\,x + y. \tag{6.15}$$

Преобразуем необходимые и достаточные условия минимума функции $F(x)$ к следующему виду:

$$x = -BB'\mathsf{M}\varepsilon'(\theta)\,\varepsilon(\theta)\,x + \bar{x}, \tag{6.16}$$

где $\bar{x} = By$, т. е. $\bar{x}$ — решение системы уравнений (6.15).

Рассмотрим итеративный процесс

$$x^{s+1} = Cx^s + \bar{x}, \tag{6.17}$$

где

$$C = -BB'\mathsf{M}\,\varepsilon'(\theta)\,\varepsilon(\theta).$$

Если уровень помех мал настолько, что $\sum\limits_{i,j} c_{ij}^2 < 1$, где c_{ij} — коэффициенты матрицы C, то в силу принципа сжатых отображений (см. В. И. Соболев) процесс (6.17) сходится к решению системы уравнений (6.16), а значит, и к решению задачи (6.3). Скорость сходимости будет тем выше, чем меньше величина $\sum\limits_{i,j} c_{ij}^2$, т. е. чем меньше ошибки при измерении матрицы прямых затрат.

§ 3. Стохастические межотраслевые модели без корректировки валовых выпусков

1. Постановка простейшей оптимизационной стохастической межотраслевой модели. Стохастический аналог модели Леонтьева — простейшая стохастическая модель и, естественно, она в недостаточной мере отражает некоторые важные стороны функционирования межотраслевых систем в условиях неопределенности. Среди основных недостатков, присущих стохастическому аналогу модели Леонтьева, отметим следующие:

1) в модели (6.3) имеют одинаковый вес как дисбалансы по разным видам продукции, так и дисбалансы, связанные с перевыполнением и недовыполнением заданий по конечной продукции;

2) задания по конечной продукции считаются заданными величинами;

3) не учитывается ограниченность некоторых видов ресурсов.

Перечисленные недостатки являются непосредственным следствием того, то модель (6.3) является аналогом балансовой, а не оптимизационной модели. Большой интерес представляет постановка, анализ и численные расчеты по оптимизационным стохастическим межотраслевым моделям. Приведем простейшую постановку одной из таких моделей.

Введем обозначения: n — количество отраслей; i, j — индексы отраслей; s_j — количество производственных способов в j-й отрасли; ψ — индекс способа; $a_{ij\psi}(\theta)$ — удельные затраты продукции i-й отрасли на производство продукции j-й отрасли ψ-м способом; $t_{j\psi}$—удельные затраты труда на производство j-й продукции ψ-м способом; α_i — удельный вес i-й продукции в составе конечной продукции; L — величина трудовых ресурсов;

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j; \end{cases}$$

$x_{j\psi}$ — интенсивность применения ψ-го способа в отрасли j.

Предполагается, что коэффициенты прямых затрат $a_{ij\psi}(\theta)$ вследствие ошибок при измерении и прогнозировании случайны. Величины α_i строго больше нуля для всех i, т. е. в комплект конечной продукции входит продукция всех отраслей α_i, а удельные затраты труда $t_{j\psi}$ и ресурс труда L будем предполагать детерминированными.

Необходимо выбрать такой план производства валовой продукции $x_{j\psi}$ ($\psi = \overline{1, s_j}$; $j = \overline{1, n}$), чтобы выполнялось ограничение по труду и максимизировалось математическое ожидание числа комплектов конечной продукции. Сформулированные выше требования к плану производства записываются в виде следующей модели.

Модель I.

$$\mathsf{M}\left(\min_i \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{\psi=1}^{s_j}(\delta_{ij} - a_{ij\psi}(\theta))\,x_{j\psi}}{\alpha_i}\right) \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{\psi=1}^{s_j} t_{j\psi}x_{j\psi} \leqslant L, \quad x_{j\psi} \geqslant 0 \qquad (\psi = \overline{1, s_j},\ j = \overline{1, n}).$$

Эту модель можно преобразовать к следующему виду: найти такие детерминированные величины $x_{j\psi}$ и такую функцию $z(\theta)$, чтобы

$$\mathsf{M}\, z(\theta) \to \max, \tag{6.18}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{\psi=1}^{s_j}(\delta_{ij} - a_{ij\psi}(\theta))\,x_{j\psi} \geqslant \alpha_i z_i(\theta)\ (\mathrm{mod}\,\mathsf{P}) \qquad (i = \overline{1, n}), \tag{6.19}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{\psi=1}^{s_j} t_{j\psi}x_{j\psi} \leqslant L, \tag{6.20}$$

$$x_{j\psi} \geqslant 0 \qquad (\psi = \overline{1, s_j};\ j = \overline{1, n}). \tag{6.21}$$

В этой модели зависимой от состояния природы является лишь переменная, показывающая объем конечного выпуска в заданных пропорциях, а не интенсивность реальной технологии. Вторая запись модели I более удобна для исследования, поскольку задача (6.18)—(6.21) является линейной двухэтапной стохастической задачей.

2. Экономико-математические свойства модели. 1. Сделаем естественное предположение о том, что с вероятностью 1 $0 \leqslant a_{ij\psi}(\theta) \leqslant 1$ и $t_{j\psi} > 0$ для всех i, j, ψ. Тогда множество допустимых решений модели ограничено с вероятностью 1. Доказательство очевидно.

2. Предположим, что в каждой отрасли существует такой способ, которые в совокупности образуют случайную квадратную матрицу $A(\theta) = \{a_{ij\psi_j}(\theta)\}_{i,j=\overline{1,n}}$ такую, что матрица $\overline{A} = \{\max\limits_{\theta} a_{ij\psi_j}(\theta)\}_{i,j=\overline{1,n}}$ продуктивна. В этом случае модель I имеет допустимое решение, помимо нулевого. Действительно, в силу продуктивности матрицы $\overline{A}$ можно выбрать такой вектор $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$, что $\tilde{x} > 0$ и $(E-\overline{A})\tilde{x} > 0$. Отсюда с вероятностью 1

$$0 < (E - \overline{A})\,\tilde{x} \leqslant (E - A(\theta))\,\tilde{x}.$$

Из последнего соотношения следует, что при достаточно малом $\delta > 0$ вектор $\delta\tilde{x}$ удовлетворяет ограничениям модели I.

Заметим, что приведенное выше предположение о продуктивности матрицы $\overline{A}$ с экономической точки зрения весьма несильное и поэтому в дальнейшем будем считать, что оно всегда выполняется.

3. Двойственная задача имеет вид

$$\mathsf{M}(Lw) \to \min, \tag{6.22}$$

$$\mathsf{M}\pi_j(\theta) \leqslant \mathsf{M}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij\psi}(\theta)\,\pi_i(\theta)\right) + \mathsf{M}(t_{j\psi}w) \text{ для всех } j, \psi, \tag{6.23}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \pi_i(\theta) = 1 \,(\mathrm{mod}\, \mathsf{P}), \tag{6.24}$$

$$\pi_i(\theta) \geqslant 0 \,(\mathrm{mod}\, \mathsf{P}) \qquad (i = \overline{1,n}), \quad w \geqslant 0, \tag{6.25}$$

где $\pi(\theta) = (\pi_1(\theta), \dots \pi_n(\theta))$ — стохастические оценки продукции, w — оценка труда. Нетрудно заметить, что в данном случае оптимальное значение w можно искать на множестве детерминированных величин, поскольку $t_{j\psi}$ и L по предположению детерминированы. Экономический смысл задачи (6.22) — (6.25) состоит в нахождении таких оценок продукции и труда, чтобы оценка труда была минимальной, среднее значение оценки продукции не превышало среднего уровня значения оценки затрат на эту продукцию, а также, чтобы цена имела определенный масштаб

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \pi_i(\theta) = 1 \pmod{\mathsf{P}}\right).$$

4. В оптимальном плане все виды продукции производятся хотя бы одним способом или $\sum_{\psi} x^*_{i\psi} > 0$ $(i = \overline{1, n})$.

В противном случае, в силу предположения о неотрицательности α_i $(i = \overline{1, n})$, оптимальное значение $z^*(\theta)$ с вероятностью 1 равно нулю. Но в пункте 2 было доказано существование вектора $\delta\bar{x}$, для которого с вероятностью 1 $z(\theta) > 0$. Отсюда, если $\sum_{\psi} x_{i\psi} = 0$ для некоторого i, то данный план неоптимален. Свойство доказано.

5. Условия оптимальности модели I (конкретизация теоремы 4.3).

Из предположений, а также из (6.24), (6.25) следует, что для модели I выполняется теорема 4.3. Применяя теорему 4.3 к модели I, получаем следующий признак оптимальности: детерминированный вектор

$$(x^*_{11}, \ x^*_{12}, \ldots, x^*_{1s_1}, \ldots, x^*_{n1}, \ldots, x^*_{ns_n})$$

и величина, зависящая от θ, $z^*(\theta)$, удовлетворяющие условиям (6.19) — (6.21), составляют оптимальный план модели I тогда и только тогда, когда существует такой случайный вектор оценок продукции $\pi(\theta) = (\pi_1(\theta), \ldots, \pi_n(\theta))$ и такая детерминированная оценка труда w, что:

$$\mathsf{M}\pi_j(\theta) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathsf{M} a_{ij\psi}(\theta)\, \pi_i(\theta) + w t_{j\psi} \text{ для всех } j, \psi;$$

$$\text{если } x^*_{j\psi} > 0, \text{ то } \mathsf{M}\pi_j(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{M} a_{ij\psi}(\theta)\, \pi_i(\theta) + w t_{j\psi}; \quad (6.23^1)$$

$$\text{с вероятностью 1 } \pi(\theta) \geqslant 0; \ w \geqslant 0;$$

с вероятностью 1, если $\sum_{j,\psi} (\delta_{ij} - a_{ij\psi}(\theta))\, x^*_{j\psi} > \alpha_i z^*(\theta)$,

то $\pi_i(\theta) = 0$;

$$\text{если } \sum_{j,\psi} t_{j\psi} x^*_{j\psi} < L, \text{ то } w > 0.$$

6. Из (6.23[1]) следует, что структура математического ожидания оценки продукции, отнесенной к оценке труда ($v_j = \pi_j(\theta)/w$), аналогична структуре полных затрат, исчисленных по «лучшим» способам.

7. Из (6.24) следует, что вероятность того, что хотя бы один продукт дефицитен, равна 1.

8. Из теоремы 4.2 следует, что оценка труда равна математическому ожиданию количества комплектов конечной продукции на единицу трудовых ресурсов, или

$$w = \frac{\mathsf{M} z^*(\theta)}{L}.$$

9. Из того, что в оптимальном плане $\mathsf{M} z^*(\theta) > 0$ и из предыдущего свойства следует, что оценка труда строго положительна, т. е. трудовые ресурсы используются полностью.

10. Будем предполагать, что труд используется во всех оптимальных производственных способах. Отсюда, используя (6.23[1]) и свойства 4 и 9, получаем, что математическое ожидание оценки продукции всех отраслей строго положительно.

11. Непосредственно из предыдущего свойства следует, что вероятность того, что не будет излишков данной продукции, больше нуля.

12. Предположим, что хотя бы один элемент в каждой строке матрицы $\{a_{ij\psi}(\theta)\}_{ij}$ распределен непрерывно и независимо по отношению к остальным параметрам. Тогда вероятность того, что одновременно будут дефицитными несколько видов продукции, равна нулю.

Действительно, оценки $\pi_l(\theta)$ и $\pi_k(\theta)$ будут больше нуля одновременно только в том случае, если

$$\frac{\sum_{j,\psi} (\delta_{lj} - a_{lj\psi}(\theta))\, x^*_{j\psi}}{\alpha_l} = \frac{\sum_{j,\psi} (\delta_{kj} - a_{kj\psi}(\theta))\, x^*_{j\psi}}{\alpha_k}.$$

Вероятность выполнения последнего соотношения равна нулю.

13. При выполнении предположения пункта 12 имеет место соотношение

$$\mathsf{M}\,\pi_i(\theta) = \mathsf{P}\,(H_i)\,\frac{1}{\alpha_i}\,,$$

т. е. средняя дефицитность продукции определенного вида прямо пропорциональна вероятности дефицита $\mathsf{P}(H_i)$ и обратно пропорциональна удельному весу данной продукции в комплекте конечной продукции.

14. В соответствии с теоремой 4.6 множество стохастических оценок продукции характеризует меру прироста математического ожидания количества комплектов конечной продукции в оптимальном плане при малом приросте продукции.

Свойства 8 и 13 дают весьма удобный способ подсчета оценки труда и математического ожидания оценок продукции при известном оптимальном плане производства продукции. Заметим, что и нахождение оптимального плана модели I методом стохастических квазиградиентов существенно упрощается, поскольку вычисление стохастического квазиградиента на каждой итерации сводится к нахождению минимума из n чисел.

Все приведенные свойства довольно естественны с экономической точки зрения и вполне соответствуют результатам исследования детерминированных моделей (см. А. Г. Гранберг [1]), за исключением свойства 12. Свойство 12 — довольно интересный и неожиданный результат, который объясняется двумя причинами:

1) линейно-комплектным характером критерия оптимальности, что приводит к невозможности утилизации сверхкомплектной продукции;

2) отсутствием гибкого адаптивного механизма плана производства продукции.

Рассмотрим модель, где в простой форме учитывается взаимосвязь между различными видами конечной продукции, т. е. частично устраняется первый недостаток модели I.

3. **Модель с базисными способами потребления.** В отличие от предыдущей модели, где имелась одна структура конечного потребления, в модели II предполагается, что имеется несколько структур потребления, причем ценность

потребления одного комплекта при разных структурах одинакова. Такой способ описания потребления предложен Алленом и использовался в межотраслевых моделях. Модель II отличается от модели I еще и тем, что в ней фиксируется часть конечного потребления, идущего на накопление, т. е. оптимизация конечного продукта производится лишь за счет вариаций вектора непроизводственного потребления.

Введем обозначения: $q_i(\theta)$ — фиксированная часть конечной продукции i-го вида, идущая на накопление; $\alpha_{i\nu}(\theta)$ —удельный вес i-й продукции в ν-м базисном способе потребления; $z_\nu(\theta)$ — интенсивность ν-го способа потребления; r — количество способов потребления.

Модель описывает следующую схему планирования. До наблюдения состояния природы принимается план производства; после наблюдения истинных значений неуправляемых параметров выбирается структура потребления. Если θ — элемент вероятностного пространства $(\Theta, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, то модель с базисными способами потребления формулируется следующим образом.

Модель II. Найти такие $x_{j\psi}$ $(\psi=\overline{1, s_j};\ j=\overline{1,n})$ и такие зависимые от θ ($\mathcal{F}$-измеримые) $z_\nu(\theta)$ $(\nu=\overline{1,r})$, чтобы

$$\mathsf{M}\left(\sum_{\nu=1}^{r} z_\nu(\theta)\right) \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{\psi=1}^{s_j}(\delta_{ij}-a_{ij\psi}(\theta))\,x_{j\psi} \geqslant \sum_{\nu=1}^{r}\alpha_{i\nu}z_\nu(\theta) \pmod{\mathsf{P}} \qquad (i=\overline{1,n}),$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{\psi=1}^{s_j} t_{j\psi}x_{j\psi} \leqslant L,$$

$$x_{j\psi} \geqslant 0 \qquad (\psi=\overline{1,s_j};\ j=\overline{1,n}),$$

$$z_\nu(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}} \qquad (\nu=\overline{1,r}).$$

Экономическая интерпретация соотношений модели довольно очевидна и мы ее приводить не будем.

Свойства 1—12 и 14 модели I весьма незначительно трансформируется как по математической форме, так и по экономическому смыслу и для модели II. Рассмотрим те свойства, которые дополнительно возникают в модели II по сравнению с моделью I.

Если сделать предположения типа непрерывности распределения и независимости $a_{ij\psi}(\theta)$, которые с вероятностью 1 гарантируют невырожденность оптимального решения задачи

$$\sum_{\nu=1}^{r} z_\nu \to \max,$$

$$\sum_{\nu=1}^{r} \alpha_{i\nu} z_\nu \leqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{\psi=1}^{s_j} (\delta_{ij} - a_{ij\psi}(\theta))\, x^*_{j\psi} \qquad (i = \overline{1, n}), \quad (6.26)$$

$$z_\nu \geqslant 0 \qquad (\nu = \overline{1, r}),$$

и предположений, которые мы не будем формулировать строго математически, но смысл которых состоит в том, что структуры способов потребления достаточно специализированы, то можно доказать следующее.

Во-первых, с положительной вероятностью в оптимальном плане модели II содержится более одного способа потребления. Это следует из того, что $z^*_\nu(\theta)$ $(\nu = \overline{1, r})$ с вероятностью 1 является решением задачи (6.26). Таким образом, набор способов потребления модели II богаче набора способов потребления детерминированной модели

$$\sum_{\nu=1}^{r} z_\nu \to \max,$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j,\psi} (\delta_{ij} - a_{ij\psi})\, x_{j\psi} \geqslant \sum_{\nu=1}^{r} \alpha_{i\nu} z_\nu, \\ &\sum_{j,\psi} t_{j\psi} x_{j\psi} \leqslant L, \quad x_{j\psi} \geqslant 0 \quad (\forall\, j, \psi), \end{aligned}\right\} \quad (6.27)$$

$$z_\nu \geqslant 0 \qquad (\nu = \overline{1, r}),$$

аналогом которой является модель II. В работе А. Г. Гранберга [1], где описана модель (6.27), доказано, что ее типичным свойством является положительность интенсивности использования лишь одного способа потребления. Таким образом, учет стохастичности исходных данных при некоторых предположениях приводит к более реалистичному выводу о характере оптимальной структуры потребления.

Во-вторых, анализ размерностей задачи (6.26) и двойственной к ней задачи

$$\sum_{i=1}^{n} y_i(\theta) u_i \to \min,$$
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i\nu} u_i \geqslant 1 \quad (\nu = \overline{1, r}), \qquad u_i \geqslant 0 \quad (i = \overline{1, n}), \tag{6.28}$$

где

$$y_i(\theta) = \sum_{j,\psi} (\delta_{ij} - a_{ij\psi}(\theta))\, x^*_{j\psi},$$

показывает, что с положительной вероятностью ненулевыми могут быть несколько компонент задачи (6.28). Поскольку задача (6.26) с вероятностью 1 невырождена, то решение (6.28) с вероятностью 1 совпадает со стохастическими оценками модели II. Отсюда, несколько видов продукции с положительной вероятностью дефицитны. Таким образом, для модели справедлив следующий вывод: если на структуры потребления наложены некоторые требования, то потребление в некоторых случаях в состоянии подстроиться к производству таким образом, чтобы план был более сбалансирован. Итак, если выполняются предположения, сделанные относительно модели II, то нереалистичное свойство 12 модели I частично устраняется. Если же предположения не выполняются, что может быть хотя бы в том случае, когда $r < n$, то свойство 12 может проявляться и в модели II.

Более совершенным инструментом измерения потребительской полезности продукции потребительского назначения является целевая функция потребления. Рассмотрим модель, в которой потребительский эффект выражается с помощью этой функции.

4. Модели без коррекции валовых выпусков с целевой функцией потребления.

М о д е л ь III.

$$u(y(\theta)) \xrightarrow[x,\, y(\theta)]{} \max,$$

$$\sum_{j,\psi} (\delta_{ij} - a_{ij\psi}(\theta))\, x_{j\psi} \geqslant y_i(\theta) + q_i(\theta) \pmod{\mathsf{P}} \qquad (i = \overline{1, n}),$$

$$\sum_{j,\psi} t_{j\psi} x_{j\psi} \leqslant L,$$

$$x_{j\psi} \geqslant 0 \qquad (\psi = \overline{1, s_j};\ j = \overline{1, n}),$$

$$y_i(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}} \qquad (i = \overline{1, n}).$$

Экономический смысл модели III состоит в выборе плана производства продукции до наблюдения над состоянием природы θ и плана потребления, зависящего от θ, таким образом, чтобы с вероятностью 1 выполнялись балансы производства и потребления, не превышался лимит по труду и максимизировался целевой функционал потребления.

Будем предполагать, что $u(y(\theta))$ дифференцируем по Фреше, т. е. существует такой случайный вектор $\nabla u(y(\theta))$, что

$$u(y(\theta) + \Delta y(\theta)) =$$
$$= u(y(\theta)) + \mathsf{M}\,(\nabla u(y(\theta)), \Delta y(\theta)) + o\left(\sqrt{\mathsf{M}\,\|\Delta y(\theta)\|^2}\right),$$

а также то, что

$$\nabla u(y(\theta)) > 0 \pmod{\mathsf{P}},$$

т. е. каждая дополнительная единица потребительского блага увеличивает благосостояние. Из этого довольно естественного предположения следует, что в оптимальном плане имеет место соотношение

$$\pi(\theta) = \nabla u(y^*(\theta)) > 0 \pmod{\mathsf{P}}.$$

Таким образом, в модели III полностью устраняется нереалистичное свойство 12 модели I.

В моделях с несколькими детерминированными невоспроизводимыми ресурсами свойства моделей I—III изменяются незначительно. Так, например, если в модель I добавить ограничения по некоторым другим невоспроизводимым ресурсам, то свойство 9 изменится и будет формулироваться следующим образом: хотя бы одна оценка ресурсов положительна. Изменится также структура математического ожидания оценки продукции за счет включения в нее оценок ресурсов. Остальные свойства модели I сохраняются.

5. **Модель без коррекции валовых выпусков с единственным случайным невоспроизводимым ресурсом.** В используемых моделях предполагалось, что все невоспроизводимые ингредиенты детерминированы, т. е. удельные затраты и ресурс этих ингредиентов были детерминированными величинами. Это предположение дало возможность построить содержательные стохастические модели, в которых величины валовых выпусков не корректируются. Описание межотраслевых стохастических систем с помощью моделей без коррекции валовых выпусков возможно лишь в одном частном случае, когда случайным является лишь один невоспроизводимый ингредиент — труд. Опишем одно из обобщений модели II на случай, когда удельные затраты труда являются случайными.

В этой модели ресурс труда $L(\theta)$ является переменной, зависящей от состояния природы. Увеличение (уменьшение) $L(\theta)$ уменьшает (увеличивает) количество блага «свободное время» и это уменьшение (увеличение) соизмеряется с полезностью продукции с помощью целевого функционала потребления $u(y(\theta), L(\theta))$. Подобная целевая функция использовалась В. Л. Макаровым [2]. Модель записывается следующим образом:

Модель IV.

$$u(y(\theta), L(\theta)) \to \max,$$

$$\sum_{j,\psi} (\delta_{ij} - a_{ij\psi}(\theta))\, x_{j\psi} \geqslant y_i(\theta) + q_i(\theta) \pmod{\mathbf{P}} \qquad (i = \overline{1, n}),$$

$$\sum_{j,\psi} t_{j\psi}(\theta)\, x_{j\psi} \leqslant L(\theta) \pmod{\mathbf{P}},$$

$$x_{j\psi} \geqslant 0 \qquad (\psi = \overline{1, s_j};\ j = \overline{1, n}),$$

$$y_i(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathbf{P}} \qquad (i = \overline{1, n}).$$

Свойства модели III в модели IV в основном сохраняются, но положительность оценки труда ($w > 0$) следует не из свойств 8, 9 модели I, а из соотношения

$$0 > \nabla_{L(\theta)} u(y^*(\theta), L^*(\theta)) = -w \pmod{\mathbf{P}}.$$

6. Методы решения стохастических межотраслевых моделей без коррекции валовых выпусков. Модели I — IV являются двухэтапными задачами стохастического программирования и поэтому для их решения можно применять общие методы стохастических квазиградиентов. Однако при реализации моделей без коррекции валовых выпусков целесообразно учитывать их специфику, что повышает эффективность общих методов. Рассмотрим для примера конкретизацию метода проекций стохастических квазиградиентов для модели I.

Поскольку $w^* > 0$, то

$$\sum_{j,\psi} t_{j\psi} x_{j\psi} = L.$$

Таким образом, на каждой итерации метода проекций стохастических квазиградиентов необходимо проектировать вектор на множество, описываемое ограничениями

$$\sum_{j,\psi} t_{j\psi} x_{j\psi} = L, \tag{6.29}$$

$$x_{j\psi} \geqslant 0 \text{ для всех } j,\ \psi. \tag{6.30}$$

Для проектирования на множество, задаваемое ограничениями типа

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = a, \quad x_j \geqslant 0 \qquad (j = \overline{1, n}), \tag{6.31}$$

существует экономный алгоритм, который приведен в монографии Ю. М. Ермольева.

Для задачи (6.18)—(6.21) несложно вычисляется стохастический квазиградиент. Конкретизируя известную формулу, можно записать

$$\xi^s = \sum_{j,\psi} (\delta_{i(x^s),j} - a_{i(x^s),j\psi}(\theta^s))/\alpha_{i(x^s)},$$

где $i(x^s)$ — номер i, на котором достигается минимум (по i) выражения

$$\Big(\sum_{j,\psi} (\delta_{ij} - a_{ij\psi}(\theta^s)\Big) x^s_{j\psi})/\alpha_{i(x^s)}.$$

Для экономико-математического анализа оптимального плана полезны стохастические оценки; $M\pi$ (θ) можно подсчитывать, используя свойство 13 модели I. Оценку w можно определить, используя соотношение $Mz^*(\theta) = wL$; $Mz^*(\theta)$ подсчитывается методом Монте-Карло.

§ 4. Стохастические межотраслевые модели с коррекцией валовых выпусков

Недостатком моделей без коррекции валовых выпусков является жесткий детерминированный характер плана производства продукции. От состояния природы зависел лишь план потребления. Между тем, важным резервом повышения эффективности общественного производства является гибкий маневр в ходе выполнения производственного плана по мере выяснения информации о состоянии природы. В настоящем параграфе изучаются межотраслевые модели, в которых план производства продукции частично выбирается как вектор-функция от состояния природы.

1. **Описание модели с полной информацией о параметрах первого периода**. Модель описывает межотраслевую систему, которая функционирует на протяжении двух промежутков времени, и в которой в силу ошибок прогнозирования некоторые параметры в начале планового периода известны лишь с точностью до вероятностного распределения. Второй промежуток времени характеризуется тем, что ему предшествует момент наблюдения случайных параметров, а поэтому план производства и распределения продукции во втором промежутке времени может выбираться зависимым от состояния природы. В первом же промежутке времени план производства и распределения продукции может выбираться лишь как детерминированная величина, поскольку параметры системы на первом промежутке времени (априори) известны лишь с точностью до вероятностного распределения.

Введем обозначения: $U_1(j)$ и $U_2(j)$ — множества производственных способов отрасли j в первом и втором периодах соответственно; r — количество видов невоспроизводимых ресурсов; φ — индекс невоспроизводимого ресурса; $f_{\varphi j\psi}$ — удельные затраты φ-го невоспроизводимого ресурса на производство продукции j способом ψ; $L_{1\varphi}$, $L_{2\varphi}$ — количества φ-го невоспроизводимого ресурса соответственно в первом и втором периодах; z — величина фонда потребления в заданных пропорциях.

Будем предполагать, что параметры $a_{ij\psi}$, $f_{\varphi j\psi}$ для $\psi \in U_1(j)$ и $L_{1\varphi}$ детерминированы, остальные неуправляемые параметры могут быть случайными вследствие ошибок прогнозирования, поэтому будем считать их зависимыми от θ. Это предположение соответствует ситуации, которая состоит в том, что экзогенные параметры системы, относящиеся к началу планового периода (первый временной промежуток), известны с достаточной точностью, чтобы их предполагать детерминированными; остальные же параметры вследствие удаленности временного промежутка, к которому они относятся, известны в начале планового периода лишь с точностью до вероятностного распределения.

М о д е л ь V. Задача состоит в том, чтобы найти такой детерминированный план производства в первом промежутке $x = \{x_{j\psi}\}_{\psi \in U_1(j);\ j=\overline{1,n}}$ и такой зависимый от θ ($\mathcal{T}$-измеримый) план производства и план потребления во втором периоде $x(\theta) = \{x_{j\psi}(\theta)\}_{\psi \in U_2(j),\ j=\overline{1,n}}$ и $z(\theta)$, чтобы максимизировать математическое ожидание фонда потребления

$$\mathsf{M}z(\theta) \to \max; \tag{6.32}$$

с вероятностью 1 выполнялись балансы продукции

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{\psi \in U_1(j)} (\delta_{ij} - a_{ij\psi})\, x_{j\psi} + \sum_{\psi \in U_2(j)} (\delta_{ij} - a_{ij\psi}(\theta)\right) x_{j\psi}(\theta) \geqslant$$
$$\geqslant \alpha_i z(\theta) + q_i(\theta) \pmod{\mathsf{P}} \qquad (i = \overline{1,n}); \tag{6.33}$$

выполнялись ограничения по невоспроизводимым ресурсам как в первом, так и во втором периодах:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\psi \in U_1(j)} f_{\varphi j\psi} x_{j\psi} \leqslant L_{1\varphi} \qquad (\varphi = \overline{1,r}),$$
$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\psi \in U_2(j)} f_{\varphi j\psi}(\theta)\, x_{j\psi}(\theta) \leqslant L_{2\varphi}(\theta) \pmod{\mathsf{P}} \qquad (\varphi = \overline{1,r}); \tag{6.34}$$

производство конечной продукции в первом периоде было неотрицательно:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\psi \in U_1(j)} (\delta_{ij} - a_{ij\psi}) x_{j\psi} \geqslant 0 \qquad (i = \overline{1, n}); \tag{6.35}$$

планы производства и потребления были неотрицательными:

$$x \geqslant 0; \quad x(\theta) \geqslant 0 \,(\mathrm{mod}\, \mathbf{P}); \quad z(\theta) \geqslant 0 \,(\mathrm{mod}\, \mathbf{P}). \tag{6.36}$$

В соответствии с терминологией, принятой в главе I, вектор x является планом-программой; а $x(\theta)$ и $z(\theta)$ — планом-коррекцией.

2. Исследование модели с единственным невоспроизводимым ресурсом. Существование допустимого решения в модели зависит от величин $q_i(\theta)$. Будем предполагать, что $q_i(\theta)$ таковы, что множество допустимых решений модели непусто. Очевидно, что в модели V условия (6.33), (6.35) можно заменить на следующие ограничения, которые более удобны для изучения:

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\psi \in U_1(j)} (\delta_{ij} - a_{ij\psi}) x_{j\psi} \geqslant R_i \qquad (i = \overline{1, n}), \\ \sum_{j=1}^{n} \sum_{\psi \in U_2(j)} (\delta_{ij} - a_{ij\psi}(\theta)) x_{j\psi}(\theta) \geqslant \alpha_i z(\theta) + q_i(\theta) - \\ - R_i \,(\mathrm{mod}\, \mathbf{P}) \quad (i = \overline{1, n}), \qquad R_i \geqslant 0 \quad (i = \overline{1, n}), \end{gathered} \tag{6.37}$$

где R_i — детерминированная переменная, показывающая количество конечной продукции, которая производится в первом периоде.

Обозначим через $(x^*, R^*, x^*(\theta), z^*(\theta))$ оптимальное решение задачи (6.32), (6.34), (6.36), (6.37). Если предполагать, что коэффициенты прямых затрат удовлетворяют реальным экономическим требованиям (типа продуктивности, неразложимости), а также если дополнительно предположить, что с вероятностью 1

$$\alpha z^*(\theta) - R^* + q(\theta) \geqslant 0, \tag{6.38}$$

то оказывается, что модель V обладает интересными свойствами, которые во многом сходны со свойствами детерминированных моделей.

Далее мы более подробно остановимся на выяснении смысла условия (6.38), а сейчас заметим только, что можно показать при довольно естественных предположениях, что условие (6.38) выполняется, если момент наблюдения случайных параметров достаточно близок к началу планового периода.

Рассмотрим частный, но довольно характерный случай модели V, когда ограниченный невоспроизводимый ингредиент, например труд,— единственный. Запишем эту модификацию модели V полностью.

Модель Va.

$$\mathsf{M}\, z(\theta) \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\psi \in U_1(j)} (\delta_{ij} - a_{ij\psi})\, x_{j\psi} \geqslant R_i \qquad (i = \overline{1, m}),$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\psi \in U_2(j)} (\delta_{ij} - a_{ij\psi}(\theta))\, x_{j\psi}(\theta) \geqslant$$

$$\geqslant \alpha_i z(\theta) + q_i(\theta) - R_i \pmod{\mathsf{P}} \qquad (i = \overline{1, n}), \tag{6.39}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\psi \in U_1(j)} t_{j\psi} x_{j\psi} \leqslant L_1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\psi \in U_2(j)} t_{j\psi}(\theta)\, x_{j\psi}(\theta) \leqslant L_2(\theta) \pmod{\mathsf{P}},$$

$$x \geqslant 0, \quad x(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}, \quad z(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}.$$

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования при фиксированном β и θ:

$$z \to \max_{(x, z)},$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\psi \in U_2(j)} (\delta_{ij} - a_{ij\psi}(\theta))\, x_{j\psi} \geqslant \alpha_i z + \beta_i \qquad (i = \overline{1, n}),$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\psi \in U_2(j)} t_{j\psi}(\theta)\, x_{j\psi} \leqslant L_2(\theta), \tag{6.40}$$

$$x(\theta) \geqslant 0, \quad z(\theta) \geqslant 0.$$

Нетрудно заметить, что если в оптимальном плане задачи (6.40) имеет место соотношение

$$\alpha z^*(\theta) + \beta \geqslant 0, \tag{6.41}$$

то она для каждой реализации случайных параметров является простейшей оптимизационной межотраслевой статической моделью с линейно-комплектным критерием оптимальности (А. Г. Гранберг [1]) и с вероятностью 1 обладает всеми ее свойствами, из которых нам понадобятся следующие:

1. производятся все продукты, каждый продукт производится только одним способом;

2. набор оптимальных способов и двойственные оценки к задаче (6.40) не зависят от β и L_2;

3. двойственные оценки к задаче (6.40) единственны для всех β, которые удовлетворяют (6.41).

Если в задаче (6.40) $\beta = q(\theta) - R^*$, то ее решением является оптимальный план-коррекция модели Va, а решением двойственной к ней задачи — стохастические оценки продукции и труда, что следует из третьего свойства задачи (6.40). Из третьего свойства модели (6.40) также следует, что функция $z(\beta)$—оптимальное значение функционала задачи (6.40) при фиксированном β — дифференцируема, причем

$$\frac{\partial z(\beta)}{\partial \beta_i} = -\tilde{\pi}_i(\theta),$$

где $\tilde{\pi}_i(\theta)$ — двойственная оценка i-й продукции в задаче (6.40). Отсюда, оптимальный план-программа (x^*, R^*) является одним из решений задачи

$$\begin{gathered}
(\nabla_R \mathsf{M}\,(z(R^*, \theta)), R) = (\mathsf{M}\tilde{\pi}(\theta), R) \to \max, \\
\sum_{j=1}^{n} \sum_{\psi \in U_1(j)} (\delta_{ij} - a_{ij\psi})\, x_{j\psi} \geqslant R_i \qquad (i = \overline{1, n}), \\
\sum_{j=1}^{n} \sum_{\psi \in U_1(j)} t_{j\psi} x_{j\psi} \leqslant L_1, \\
x_{j\psi} \geqslant 0 \text{ для всех } j,\ \psi.
\end{gathered} \tag{6.42}$$

Будем предполагать, что решение задачи (6.42) единственно. Из (6.42) следует, что в оптимальном плане-программе выпускаются все виды продукции, причем конечный выпуск положительным может быть лишь для одного вида продукции. Отсюда задача (6.42) эквивалентна задаче

$$z \to \max, \tag{6.43}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\psi \in U_1(j)} (\delta_{ij} - a_{ij\psi}) x_{j\psi} \geqslant \alpha^{\chi} z,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\psi \in U_1(j)} t_{j\psi} x_{j\psi} \leqslant L_1,$$

$$x_{j\psi} \geqslant 0 \text{ для всех } j, \psi,$$

где $\alpha^{\chi} = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{\chi}, 0, \ldots, 0)$, χ — номер продукции, конечный выпуск которой в первом периоде положителен.

Таким образом, нахождение плана-программы свелось к решению хорошо изученной детерминированной межотраслевой модели. Учитывая взаимосвязь плана-программы и плана-коррекции с задачами (6.42) и (6.43) соответственно, можно установить следующие свойства модели V при условии, что выполняется (6.38).

1. В оптимальном плане модели V производятся продукты всех отраслей, причем каждый продукт одним способом в первом периоде и одним способом для конкретных реализаций случайных параметров во втором периоде.

2. Набор оптимальных способов в первом периоде и набор оптимальных способов для конкретных реализаций случайных параметров во втором периоде, а также стохастические оценки продукции и труда, не зависят от заданий по производству фиксированных количеств конечной продукции и величин трудовых ресурсов в первом и втором периодах.

3. В первом периоде конечный выпуск лишь одного вида продукции положителен.

4. В оптимальном плане не производятся излишки продукции и трудовые ресурсы используются полностью.

3. Метод решения задачи (6.39). Специфику модели Va можно использовать для построения экономного алгоритма решения задачи. Поскольку оптимальный базис задач

(6.40) и (6.43) не зависит соответственно от β и α^{χ}, то можно сразу вычислить математические ожидания стохастических оценок для продукции во втором периоде, «проиграв» двойственную задачу к задаче (6.40) при произвольном $\beta \geqslant 0$; а также вектор полных трудовых затрат на производство продукции в первом периоде

$$T = ((E - A^*)^{-1})' \, t^*,$$

где A^* — матрица прямых затрат, составленная из оптимальных способов задачи (6.43), t^* — вектор прямых затрат труда оптимальных способов. Вектор t^* и матрица A^* находятся в результате решения задачи (6.43).

Нетрудно видеть, что оптимальное значение x удовлетворяет соотношению

$$\frac{\mathsf{M}\,\tilde{\pi}_{\chi}(\theta)}{T_{\chi}} = \max_{i} \frac{\mathsf{M}\,\tilde{\pi}_{i}(\theta)}{T_{i}}, \tag{6.44}$$

которое можно получить из теоремы 4.1, откуда следует что $\pi \geqslant \mathsf{M}\,\tilde{\pi}(\theta)$, где π — оценки продукции в первом периоде; из $R_i^* > 0$ должно следовать $\pi_i = \mathsf{M}\tilde{\pi}_i(\theta)$, а между оценкой труда w, полными затратами труда и оценкой продукции в первом периоде должна существовать связь:

$$\pi = Tw.$$

После нахождения χ на основании известной уже матрицы $(E - A^*)^{-1}$ довольно просто найти план в первом временно́м промежутке, а также R^*.

Наиболее сложным в данном алгоритме является подсчет $\mathsf{M}\tilde{\pi}(\theta)$, поскольку для этого необходимо многократно решать задачу линейного программирования. При этом можно использовать алгоритмы нахождения решения задачи линейного программирования, основанные на известном решении «близкой» задачи, а также алгоритмы, учитывающие специфику межотраслевых матриц. Нахождение $\mathsf{M}\tilde{\pi}(\theta)$ значительно упрощается, если в каждой отрасли рассматривается лишь по одному производственному способу.

4. Об условии (6.38). Остановимся несколько подробнее на выяснении смысла условия (6.38). Для модели Va это условие можно записать в более наглядной и удобной форме. Записывая решение задач (6.40) и (6.42) в явном виде, можно показать, что из (6.38) следует неравенство

$$\alpha_\chi \frac{L_2 + T_\chi(\theta)\dfrac{L_1}{T_\chi} - (T(\theta), q)}{(T(\theta), \alpha)} + q_\chi \geqslant \frac{L_1}{T_\chi}, \qquad (6.45)$$

где $T(\theta)$ — полные затраты труда на производство продукции оптимальными способами во втором периоде. Из (6.45) видно, что оно выполняется, если L_2 достаточно велико по сравнению с L_1. Экономический смысл условия (6.45) состоит в том, что максимальное производство продукции χ для непроизводственного потребления в комплекте во втором периоде плюс задание конечной продукции χ больше, чем максимальное производство продукции χ в первом периоде. Продукцию χ в соответствии с (6.44) можно понимать как продукцию, полные затраты труда на производство которой в первом и втором периодах наименее близки.

Представляет интерес оценка момента наблюдения случайных параметров, для которого выполняется соотношение (6.45). Вывод этой оценки не представляет особых трудностей, если предполагать, что трудовые ресурсы в некоторый период прямо пропорциональны его длительности. Отсюда, если L — трудовые ресурсы за весь плановый промежуток, то γL и $(1-\gamma)L$ — соответственно трудовые ресурсы в первом и втором промежутках. Подставляя в (6.45) вместо L_1 и L_2 γL и $(1-\gamma)L$, путем элементарных выкладок можно получить, что (6.45) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $\gamma \geqslant \gamma_{max}$, где γ_{max} — минимальное значение случайной величины

$$\frac{T_\chi(L\alpha_\chi + q_\chi(T(\theta), \alpha) - (T(\theta), q)\alpha_\chi)}{L((T(\theta), \alpha) + \alpha_\chi(T_\chi - T_\chi(\theta)))}.$$

В случае, когда в модели Va максимизируется ожидаемое количество комплектов конечной продукции и обязательные задания по производству конечной продукции не фиксируются, т. е. $q = 0$, а вектор α показывает структуру конечной продукции, то

$$\gamma_{max} = \min\left\{\min_\theta \frac{T_\chi \alpha_\chi}{(T(\theta), \alpha) + \alpha_\chi(T_\chi - T_\chi(\theta))}, 1\right\}. \qquad (6.46)$$

Если α — детерминированный вектор, а элементы матрицы A^* распределены независимо, то (6.46) эквивалентно соотношению

$$\gamma_{\max} = \min\left\{\frac{T_\chi \alpha_\chi}{(\bar{T}, \alpha) + \alpha_\chi (T_\chi - \bar{T}_\chi)},\ 1\right\}, \tag{6.47}$$

где

$$\bar{T} = ((E - \bar{A}^*)^{-1})' t^*,$$

а $\bar{A}^*$ — одно из значений матрицы $A^*(\theta)$, для которого имеет место $\bar{A}^* \geqslant A^*(\theta) \pmod{\mathrm{P}}$.

Из (6.47), в частности, видно, что чем бо́льшие разбросы имеет матрица $A^*(\theta)$, тем более жесткие ограничения накладываются на момент наблюдения случайных параметров.

Условия (6.45)—(6.47) являются необходимыми. Однако даже в этом случае представляет большой интерес оценка $\gamma_{\max}$. Следует отметить некоторую условность схемы получения и использования информации в модели. Она заключается в том, что момент наблюдения над состоянием природы θ должен удовлетворять несколько противоречивым, с экономической точки зрения, требованиям. Модель V с практической точки зрения может быть использована в основном для экспериментальных расчетов по определению χ, $\gamma_{\max}$, для сравнения эффективности различных схем получения и использования информации. Кроме того, представляет интерес сравнение оптимальных планов и показателей дефицитности продукции в стохастической и детерминированной моделях.

При наличии нескольких невоспроизводимых ресурсов свойства модели Va проявляются в ослабленном виде.

§ 5. Стохастические межотраслевые модели с коррекцией валовых выпусков (продолжение)

1. Модель VI. Рассмотрим несколько иную схему получения информации плановым органом. Будем считать, что матрица коэффициентов прямых затрат $A(\theta)$ случайна. Предполагается, что каждый вид продукции производится одним способом. Необходимо выбрать такой план валовых выпусков x до наблюдения θ, и такой план валовых выпусков после наблюдения θ — $x(\theta)$, чтобы максимизировать математическое ожидание количества комплектов конечной продукции непроизводственного потребления в заданных пропорциях

$$\mathsf{M}\, z(\theta) \to \max;$$

с вероятностью 1 выполнялись балансы продукции

$$(E - A(\theta))(x + x(\theta)) \geqslant \alpha z(\theta) + q(\theta) \quad (\mathrm{mod}\, \mathsf{P});$$

выполнялись ограничения по трудовым ресурсам в первом и втором периодах

$$(t, x) \leqslant L_1, \quad (t, x(\theta)) \leqslant L_2 \ (\mathrm{mod}\, \mathsf{P});$$

переменные были неотрицательными

$$x \geqslant 0, \quad x(\theta) \geqslant 0\, (\mathrm{mod}\, \mathsf{P}), \quad z(\theta) \geqslant 0\, (\mathrm{mod}\, \mathsf{P}).$$

Анализ модели VI позволяет получить любопытные экономико-математические результаты, если сделать предположение типа (6.38), т. е. предполагать, что

$$\alpha z^*(\theta) + q(\theta) - (E - A(\theta))\, x^* \geqslant 0. \tag{6.48}$$

При выполнении (6.48) имеют место следующие свойства, которые доказываются аналогично соответствующим свойствам модели Va.

1. Стохастические оценки продукции и труда не зависят от величин ресурсов труда, структуры непроизводственного потребления и фиксированных количеств конечной продукции для всех тех состояний природы, для которых имеет место соотношение (6.48).

2. Если дополнительно предположить, что

$$x_i^* > 0 \qquad (i = \overline{1, n}), \tag{6.49}$$

то из теоремы о характеристике следует, что

$$\mathsf{M}\, \pi_j(\theta) = \mathsf{M}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(\theta)\, \pi_i(\theta)\right) + w,$$

$$\pi_j(\theta) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(\theta)\, \pi_i(\theta) + w(\theta),$$

где w, $w(\theta)$ — оценки труда в первом и втором периодах.

Из последних двух равенств вытекает равенство оценки труда в первом периоде и математического ожидания стохастической оценки труда во втором периоде, т. е.

$$w = \mathsf{M}w(\theta).$$

Изучим, каким образом влияет на эффективность производства длительность между началом периода планирования и моментом наблюдения состояния природы, т. е. длины первого периода. Это изучение будет, так же как и в предыдущем пункте, производиться при предположении о выполнении простейшей гипотезы о распределении ресурса во времени, а именно, будет предполагаться, что величина ресурса труда в первом и втором периодах прямо пропорциональна их длительности. Таким образом, если L — общая величина ресурса труда за плановый период, то

$$L_1 = \gamma L, \quad L_2 = (1-\gamma) L,$$

где γ — момент наблюдения над состояниями природы. Таким образом, мы приходим к изучению зависимости оптимального значения функционала задачи

$$\begin{gathered} \mathsf{M}\, z(\theta) \to \max, \\ (E - A(\theta))\,(x + x(\theta)) \geqslant \alpha z(\theta) + q(\theta) \pmod{\mathsf{P}}, \\ (t, x) \leqslant \gamma L, \quad (t, x) = (1-\gamma) L, \\ x \geqslant 0, \quad x(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}, \quad z(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}} \end{gathered}$$

от параметра γ.

Поскольку оптимальное значение функционалов прямой и двойственной задачи равны, то можно записать

$$\mathsf{M}z^*(\theta) = \gamma L w + (1-\gamma) L \mathsf{M}\, w(\theta) - \mathsf{M}\,(\pi(\theta), q(\theta)).$$

3. Из свойства 1 и 2 модели VI следует, что для тех γ, для которых с вероятностью 1 выполняется (6.48), оптимальное значение функционала не зависит от γ.

Обсудим доказанное свойство. Чем меньше величина γ, тем раньше имеется возможность выбирать план производства продукции при наличии полной информации, т. е. зависимым от состояния природы θ. План производства, выбранный при наличии более полной информации, более эффективен. Однако из свойства 3 модели VI следует, что существует некоторое пороговое значение момента наблюдения, при уменьшении которого эффективность производства не увеличивается. Это свидетельствует о том, что возможна ситуация, когда нецелесообразно затрачивать усилия, направленные на убыстрение получения точной информации о неуправляемых параметрах.

Несложно вывести формулы, аналогичные формулам (6.46), (6.47), которые дают значение порогового значения γ, причем можно убедиться, исследуя эти формулы, что чем больше разбросы параметров, тем меньше интервал, на котором неэффективно затрачивать средства на убыстрение получения полной информации о состояниях природы.

В моделях с несколькими невоспроизводимыми ресурсами свойство 3 имеет место в несколько ослабленной форме.

2. Полудинамическая межотраслевая модель. Сложность реализации на ЭВМ динамических моделей, наиболее совершенного инструмента долгосрочного планирования, большие трудности в подготовке информации для этих моделей привели к возникновению моделей, в которых в упрощенной форме описывается динамика экономических систем. Достаточно распространенным классом таких моделей являются так называемые полудинамические модели. Рассмотрим один из вариантов стохастической полудинамической модели. Как и в предыдущем пункте, в целях упрощения обозначений будем рассматривать модель, в которой производство продукции каждого вида осуществляется лишь одним способом.

Введем обозначения: $x_j(\theta)$ — производство продукции j-го вида в последнем году планового периода на мощностях базисного периода; $\bar{x}_j(\theta)$ — производство продукции j-го вида в последнем году планового периода на вновь вводимых мощностях; $\varphi(\rho, H)$ — вектор-функция, задающая зависимость между вектором капиталовложений базисного периода H, параметрами ρ и капиталовложениями последнего года φ; $\psi(\rho, H)$ — вектор-функция, задающая зависимость между вектором капиталовложений базисного года H, параметрами ρ и суммарными объемами капиталовложений разных видов за весь плановый период ψ; $h_{kj}(\theta)$ — удельные капиталовложения k-го вида на увеличение мощности на производство j-й продукции; $R(\theta)$ — матрица удельных затрат невоспроизводимых ресурсов; $r(\theta)$ — вектор невоспроизводимых ресурсов.

Логика полудинамической стохастической модели такова. В базисном году неуправляемые параметры последнего года в силу ошибок прогнозирования известны лишь с точностью до вероятностного распределения. В последнем году эти параметры наблюдаются. Отсюда становятся понятными требования относительно измеримости переменных. Поскольку параметры ρ и капиталовложения базисного года H выбираются до последнего года, т. е. до наблюдения над состоянием природы θ, то естественно их выбирать как детерминированные величины; естественно также предположить, что объемы производства в последнем году $x_j(\theta)$, $\bar{x}_j(\theta)$ и выпуск продукции непроизводственного потребления $z(\theta)$ должны быть измеримыми относительно σ-алгебры $\mathcal{F}$ вероятностного пространства, элементом которого является θ. Запишем соотношения модели.

3. Модель VII. Необходимо выбрать такие ρ, H и $\mathcal{F}$-измеримые $x_j(\theta)$, $\bar{x}_j(\theta)$ и $z(\theta)$, чтобы

$$\mathsf{M} z(\theta) \to \max,$$

$$(E - A(\theta))(x(\theta) + \bar{x}(\theta)) \geqslant \varphi(\rho, H) + \alpha z(\theta) + q(\theta) \pmod{\mathsf{P}},$$

$$R(\theta)(x(\theta) + \bar{x}(\theta)) \leqslant r(\theta) \pmod{\mathsf{P}},$$

$$H(\theta)\bar{x}(\theta) \leqslant \psi(\rho, H) \pmod{\mathsf{P}},$$

$$x(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}, \quad \bar{x}(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}},$$

$$z(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}.$$

Модель VII является двухэтапной задачей стохастического программирования. Она характерна тем, что планы производства и потребления продукции выбираются зависимыми от состояния природы. При фиксированных ρ, H и θ модель VII является обычной детерминированной полудинамической моделью, и поэтому задача нахождения $(x^*(\theta), \bar{x}^*(\theta), z^*(\theta))$ при известных ρ^* и H^* обладает с вероятностью 1 всеми свойствами детерминированных моделей.

Для решения задачи можно применять методы стохастических квазиградиентов, причем особенно важное значение в этом случае приобретают методы решения задач линейного программирования, основанные на том, что известно решение «близкой» задачи, поскольку решение на каждой итерации задачи

$$z \to \max,$$

$$(E - A(\theta^s))(x + \bar{x}) \geqslant \varphi(\rho^s, H^s) + \alpha z + q(\theta^s),$$

$$x \geqslant 0, \quad \bar{x} \geqslant 0, \quad z \geqslant 0,$$

весьма трудоемко. Это замечание особенно справедливо для задач с несколькими способами производства одного продукта, что характерно для территориальной полудинамической модели.

4. Оценка ценности исходной информации в межотраслевом балансе. Трудности при подготовке исходной информации для межотраслевого баланса — одна из главных причин (если не самая главная), которая сдерживает широкое внедрение оптимизационных межотраслевых моделей. Эти трудности обусловлены, например, тем, что принципы классификации отраслей в ЦСУ и в межотраслевом балансе различны, что не дает возможности использовать статистику ЦСУ для подготовки информации для межотраслевых моделей. Подготовка информации для планового межотраслевого баланса в соответствии с его принципами требует больших материальных и финансовых затрат, привлечения больших коллективов экономистов и статистиков. Так, по данным монографии А. Г. Аганбегяна и А. Г. Гранберга [1], в формировании коэффициентов затрат для планового межотраслевого баланса на 1970 г. участвовало около 400 научно-исследовательских и проектных институтов. Еще более сложная проблема — формирование массивов исходной информации для моделей межотраслевого баланса, применяемых для перспективного планирования.

Естественно возникает вопрос об эффективности столь значительных затрат на подготовку информации для планового межотраслевого баланса. Если имеется метод оценки эффективности, то возникает новый вопрос: не разумнее ли в ряде случаев отказаться, полностью или частично, от дорогостоящего удовольствия по получению очень точной информации о коэффициентах прямых затрат и, может быть, применять какие-то упрощенные способы получения матрицы прямых затрат (например, экспертные оценки, частичное использование статистики ЦСУ с ее последующей корректировкой)? Сразу же заметим, что в данной работе мы не в состоянии ответить на эти вопросы в полном объеме — это тема специальных исследований, однако указать некоторые подходы к изучению данной проблематики, основанные на использовании стохастических моделей, представляется возможным.

Остановимся вкратце на оценке эффективности затрат по подготовке исходной информации для планового межотраслевого баланса. Рассмотрим следующую ситуацию. Имеется альтернатива: либо использовать для плановых расчетов матрицу коэффициентов прямых затрат, подготовленную некоторым упрощенным способом и вследствие этого имеющую случайный характер, или дополнительно затратить в определенных количествах некоторые ресурсы, но при этом получить точную информацию о матрице прямых затрат. Такую ситуацию довольно просто описать с помощью стохастических (и только стохастических) межотраслевых моделей. Первой возможности соответствует выбор плана производства полностью или частично как детерминированного вектора, второй — выбор плана как функции от случайных коэффициентов.

Предположим, что корректировка плана производства в процессе его выполнения невозможна. Тогда значение критерия эффективности для первой альтернативы будет равно оптимальному значению функционала модели без корректировки валовых выпусков:

$$
\begin{gathered}
\mathsf{M} z(\theta) \underset{(x, z(\theta))}{\longrightarrow} \max, \\
(E - A(\theta))\, x \geqslant \alpha z(\theta) \ (\mathrm{mod}\, \mathsf{P}), \qquad (6.50)\\
Rx \leqslant r, \quad x \geqslant 0, \quad z(\theta) \geqslant 0 \ (\mathrm{mod}\, \mathsf{P}),
\end{gathered}
$$

где R — матрица удельных затрат невоспроизводимых ресурсов, r — вектор запасов ресурсов.

Значение критерия эффективности для второго случая определяется оптимальным значением функционала задачи оперативного стохастического программирования

$$
\begin{gathered}
\mathsf{M} z(\theta) \underset{(x(\theta), z(\theta))}{\longrightarrow} \max, \qquad (6.51)\\
(E - A(\theta))\, x(\theta) \geqslant \alpha z(\theta) \ (\mathrm{mod}\, \mathsf{P}),
\end{gathered}
$$

$$\begin{gathered} Rx(\theta) \leqslant r \pmod{\mathsf{P}}, \\ x(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}, \quad z(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}. \end{gathered} \tag{6.51}$$

Разность $\mathsf{M} z(x^*(\theta), \theta) - \mathsf{M} z^*(\theta)$, где $\mathsf{M} z(x^*(\theta), \theta)$ и $\mathsf{M} z^*(\theta)$ — оптимальные значения функционалов задач (6.50) и (6.51), и дает значение эффекта от получения точной информации.

Нетрудно заметить, что решение задачи (6.51) с вероятностью 1 совпадает при различных θ с решением задачи

$$\begin{gathered} z \to \max, \\ (E - A(\theta))\, x \geqslant \alpha z, \quad Rx \leqslant r, \quad x \geqslant 0. \end{gathered} \tag{6.52}$$

Таким образом, для подсчета значений $\mathsf{M}(z(x^*(\theta), \theta))$ достаточно проиграть нужное количество раз задачу линейного программирования (6.52) и подсчитать величину $\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N} z(x^*(\theta^s), \theta^s)$. Эта величина приближенно совпадает с $\mathsf{M}z(x^*(\theta), \theta)$. Естественно, что при решении задач (6.52) в максимальной степени необходимо использовать специфику задачи (6.52), методы решения «близких» задач.

Показатель $\mathsf{M}z(x^*(\theta), \theta) - \mathsf{M}z^*(\theta)$ определяет эффект от получения точной информации в случае, когда план производства валовой продукции не корректируется по мере поступления информации о θ. Представляет интерес вычисление аналогичного показателя для моделей с корректировкой валовых выпусков и установление экспериментальным путем зависимости между ценностью информации и моментом наблюдения коэффициентов прямых затрат. Этот вопрос в теоретическом аспекте частично изучался в предыдущем параграфе.

Заметим, что если такие показатели, как план производства, дефицитность продукции, структура цены можно определить, пусть даже грубо, с помощью детерминированных моделей, то подсчет ценности информации может производиться лишь с помощью стохастических моделей. Нам представляется, что на решение именно таких задач первоначально должно ориентироваться применение стохастических моделей в межотраслевых исследованиях.

ГЛАВА VII

ПРОБЛЕМА КРИТЕРИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ И ДИАЛОГОВЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

В настоящей главе рассмотрены задачи, которые представляют большой интерес и в детерминированной постановке. Однако предмет изучения главы лежит в русле общей проблематики, поскольку для решения подобных задач целесообразно применять методы стохастического программирования.

§ 1. Проблема критерия оптимальности в экономико-математических моделях

1. Введение. Одной из наиболее важных и сложных проблем в экономико-математических исследованиях является проблема критерия оптимальности — проблема критерия выбора наилучшего решения из множества допустимых. Будем различать проблему критерия оптимальности в узком смысле и в широком. В узком смысле проблему критерия можно сформулировать следующим образом. Если изучаемая экономическая система описывается экстремальной задачей вида

$$u(x) \to \max, \quad x \in D, \tag{7.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — план, D — множество допустимых планов, то что собой должна представлять функция $u(x)$ (каков ее экономический смысл) и как определить вид этой функции и ее параметры?

Естественно задать следующий вопрос: а можно ли вообще описывать экономические системы с помощью задачи типа (7.1), и если можно, то в каких случаях? Этот вопрос и составляет сущность проблемы критерия оптимальности в широком смысле. Функцию $u(x)$ будем называть *критерием оптимальности* или *целевой функцией*.

Проблема критерия оптимальности, проблемы математического описания цели, определения эффективности функционирования экономической системы находятся в центре внимания экономистов и математиков. Несмотря на это, решение данного круга проблем далеко от завершения, и в литературе, посвященной данным вопросам, имеются разные, иногда противоречивые, точки зрения. Иногда противоречивость разных точек зрения мнимая, поскольку она вызвана неточностью терминологии. Смешение терминов иногда приводит также к видимому единству мнений. В этом отношении показательна ситуация, в которой оказалась проблема критерия оптимальности в работах некоторых авторов в связи со смешением понятий цель и целевая функция, а также в связи с тем, что каждое из этих понятий зачастую употребляется в разных смыслах.

Так, например, для многих публикаций характерно следующее рассуждение: поскольку перед управляемой экономической системой (будь то отрасль, народное хозяйство или предприятие) стоит несколько целей, то экстремальная задача, описывающая эту систему, содержит несколько целевых функций. Среди целей социалистической экономики в целом называются такие показатели, как темпы роста средств производства и предметов потребления, рост культурного уровня, улучшение условий труда, обеспечение обороноспособности страны и т. д. Недостаток рассуждений подобного рода состоит в том, что в них точно не указывается, что понимается под термином «цель». Если под целью понимать достижение некоторого уровня по некоторому показателю в заданный срок, то тогда цель не имеет никакого отношения к целевой функции; цель в таком случае формализуется с помощью ограничения, которое входит в множество D. Не понятно также, почему каждая цель должна индуцировать целевую функцию, если под целью понимать некоторый показатель, увеличение которого желательно, а уменьшение— нет. На наш взгляд, математические задачи с несколькими целевыми функциями скорее возникают не вследствие того, что имеется несколько целей у лица, принимающего решение (обычно в этом случае можно сформулировать одну или несколько взаимосвязанных однокритериальных задач), а потому, что в общем случае в экономической системе имеется несколько участников с несовпадающими интересами.

Особую сложность и актуальность приобретает проблема критерия оптимальности на макроэкономическом уровне, т. е. при моделировании всего народного хозяйства в целом. В свое время была высказана гипотеза о том, что плановую экономику можно описать с помощью задачи вида (7.1), причем в качестве функции $u(x)$ фигурировала, так называемая функция потребления, которая соизмеряет потребительский эффект разных видов продукции, идущей на непроизводственное потребление. При решении частных задач эта гипотеза может оказаться оправданным допущением, особенно, если степень детализации в модели не настолько велика, чтобы выделять различные группы потребителей. Такая ситуация характерна для точечных моделей, т. е. моделей, не учитывающих территориальный фактор.

Сделаем некоторые замечания относительно функции $u(y)$. Заметим, что целевая функция потребления зависит не от всего вектора x, а лишь от его части, подвектора фонда потребления. Однако чисто формально можно считать, что функция зависит от всего вектора x.

В простейшем случае задача (7.1) конкретизируется в следующую модель. Предположим, что условия производства на макроуровне описываются следующей системой ограничений:

$$x = Ax + y + q, \quad Rx \leqslant r, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \qquad (7.2)$$

где A — матрица прямых затрат; q — фиксированная часть конечной продукции; R — матрица удельных затрат невоспроизводимых ресурсов; r — вектор, компоненты которого показывают количество невоспроизводимых ресурсов; x — вектор валовых выпусков; y — вектор фонда потребления. Задача ставится следующим образом: найти такие x и y, удовлетворяющие (7.2), чтобы максимизировать потребительский эффект от вектора потребляемой продукции, который выражается с помощью целевой функции потребления

$$u(y) \to \max.$$

Можно построить и более сложные модели с целевой функцией потребления.

Проблематике целевой функции потребления посвящено большое количество работ, среди которых следует отметить работы В. А. Волконского, А. Г. Гранберга [2], В. Ф. Пугачева. В работах этих авторов предложены интересные способы нахождения вида и параметров функции $u(x)$, которые основаны на использовании статистики о поведении потребителя.

Следует отметить, что практическая реализация различных способов построения целевой функции потребления наталкивается на серьезные трудности вычислительного и, особенно, информационного характера. В связи с этим представляется перспективным подход, основанный на идеях ординальной измеримости полезности.

Под *ординальной измеримостью* будем понимать установление отношения между векторами потребительских благ типа: x «не хуже» y. Численную измеримость полезности с помощью аналитической функции будем называть *кардинальной измеримостью*. На наш взгляд, в настоящее время существенным тормозом в развитии экономико-математических методов вообще и в решении проблемы критерия в частности, является чрезмерная приверженность большинства исследователей к концепции кардинальной измеримости, между тем как в широком классе задач более естественно и удобно использовать ординальную измеримость *).

2. Модель выбора наиболее предпочтительного плана. Приступим к постановке достаточно общей модели, в которой используется ординальная измеримость полезности. Постановка модели большой степени общности имеет смысл с точки зрения развития общих подходов к разработке численных методов решения подобных задач.

Условимся различать субъект планирования и объект планирования. На макроэкономическом уровне объектом планирования является все народное хозяйство в целом, субъектом планирования — высшие плановые органы, которые призваны отражать интересы собственников средств производства (при социализме — трудящихся масс). Субъект планирования обладает некоторым отношением к планам (не обязательно допустимым), которое формализуется с помощью бинарного отношения типа $x \succsim y$ (план x

*) Большую распространенность концепции кардинальной измеримости в экономико-математических исследованиях, по всей видимости, можно объяснить тем, что до настоящего времени усилия операционалистов были в основном направлены на разработку методов решения задач математического программирования, в которых в явном виде заданы целевая функция и ограничения.

не хуже плана y). Естественно в качестве искомого плана выбирать некоторый план $x^* \in D$, такой, что $x^* \succsim x$ для всех $x \in D$. Задачу нахождения x^* будем обозначать следующим образом:

$$x \to \text{pref}, \quad x \in D. \tag{7.3}$$

План x^* будем называть *наиболее предпочтительным планом*.

Необходимо отметить, что постановка задач типа (7.3) имеются в литературе. Например, в монографии X. Никайдо изучаются равновесные модели, описывающие поведение потребителей и производителей, причем поведение потребителей описывается с помощью отношения $\succsim$. Постановка типа (7.3), где D—дискретное множество, изучается Г. С. Поспеловым и В. А. Ириковым.

3. Предположения. Для обоснования алгоритма решения задачи (7.3) нам понадобятся некоторые предположения. Эти предположения типичны для математической экономики и в реальных задачах, как правило, выполняются. Отношение предпочтения $\succsim$ будем считать рефлексивным, транзитивным, полным, непрерывным и выпуклым, а множество D — выпуклым и компактным. Доказано (см., например, X. Никайдо), что при этих предположениях наиболее предпочтительный план существует и, кроме того, с отношением $\succsim$ можно связать функцию $u(x)$ — индекс полезности, которая непрерывна, выпукла вверх и $u(x) \geqslant u(y)$, если $x \succsim y$. Заметим, что индекс полезности задается с точностью до монотонного преобразования, или, другими словами, если $u(x)$ — индекс полезности, то $\varphi(u(x))$, где $\varphi(u)$ — строго возрастающая функция,— также индекс полезности, индуцированный тем же отношением предпочтения, что и $u(x)$. Будем предполагать также, что отношение $\succsim$ достаточно гладко, так что $u(x)$ дифференцируема, и монотонно. Сформулируем условие монотонности, так как непосредственно к нему придется обращаться в наших выкладках. Для этого удобно использовать отношение $\succ$ («лучше»), которое вводится следующим образом: $x \succ y$, если $x \succsim y$, но не $y \succsim x$. Отношение $\succ$ называется *монотонным*, если из того, что $x \geqslant y$ и $x_i > y_i$ для некоторого i, следует $x \succ y$.

Заметим, что при сделанных предположениях из ординальной измеримости следует кардинальная измеримость полезности планов. Очевидно, что задача (7.3) эквивалентна задаче

$$u(x) \to \max, \quad x \in D.$$

Однако, как мы отмечали выше, нахождение в явном виде функции $u(x)$ в ряде случаев не представляется возможным, поэтому представляет интерес разработка методов нахождения наиболее предпочтительного плана, в которых используется информация лишь об отношении предпочтения $\succsim$. Перейдем к описанию одного из таких методов.

§ 2. Стохастический диалоговый метод нахождения наиболее предпочтительного плана

1 Формальный алгоритм. Рассмотрим случайную последовательность $\{x^s\}_{s=0,1\ldots}$, порожденную рекуррентным соотношением

$$x^{s+1} = \pi_D(x^s + \rho_s \xi^s), \tag{7.4}$$

где x^0 — произвольный вектор;

$$\xi^s = \begin{cases} \theta^s, & \text{если } x^s + \gamma_s\theta^s \succsim x^s, \\ -\theta^s, & \text{если } x^s + \gamma_s\theta^s \prec x^s, \end{cases} \tag{7.5}$$

θ^s — независимое наблюдение в s-й итерации над n-мерным случайным вектором θ, равномерно распределенным на n-мерной единичной сфере; $\pi_D(\cdot)$ — оператор проектирования на множество D; ρ_s — шаг итерации. Величина γ_s определяется с помощью последовательности $\{\gamma_{s\nu}\}_{\nu=0,1,\ldots}$, которая задается следующим образом: γ_{s0} — произвольное положительное число,

$$\gamma_{s,\nu+1} = \begin{cases} \gamma_{s\nu}, & \text{если } x^s + \gamma_{s\nu}\theta^s \succsim x^s \text{ или } x^s - \gamma_{s\nu}\theta^s \succsim x^s, \\ \alpha\gamma_{s\nu} & \text{— в противном случае, } 0 < \alpha < 1, \end{cases} \tag{7.6}$$

γ_s полагается равной $\gamma_{s\nu(s)}$, где

$$\nu(s) = \min_{\nu \in \Gamma(s)} \nu, \quad \Gamma(s) = \{\nu\colon \gamma_{s,\nu+1} = \gamma_{s\nu}\}. \tag{7.7}$$

Для обоснования корректности определения алгоритма и его сходимости к наиболее предпочтительному плану понадобятся две леммы.

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 7.1. *С вероятностью* 1 $\nu(s)<\infty$ $(s=0, 1, \ldots)$.

Доказательство. Рассмотрим события $A=(\nu(s)<<\infty)$ и $B=((u_x(x^s), \theta^s)=0)$. Докажем, что $\bar{A}\subseteq B$. Отсюда будет следовать справедливость леммы, поскольку, в силу определения θ^s, $\mathsf{P}(B)=0$. Пусть произошло событие $\bar{A}=(\nu(s)=\infty)$. Отсюда и из (7.6), (7.7) следует, что для сколь угодно большого ν $\gamma_{s,\nu+1}=\alpha\gamma_{s\nu}$, $x^s+\gamma_{s\nu}\theta^s \precsim x^s$ и $x^s-\gamma_{s\nu}\theta^s\precsim x^s$. Последние два соотношения запишем с помощью индекса полезности:

$$u(x^s+\gamma_{s\nu}\theta^s)<u(x^s),$$

$$u(x^s-\gamma_{s\nu}\theta^s)<u(x^s).$$

Используя дифференцируемость $u(x)$, из последних неравенств получаем

$$\begin{aligned}&\gamma_{s\nu}(u_x(x^s), \theta^s)+o(\gamma_{s\nu})<0,\\ &\gamma_{s\nu}(u_x(x^s), \theta^s)+\varepsilon(\gamma_{s\nu})>0,\end{aligned}\tag{7.8}$$

где $o(\gamma_{s\nu})\gamma_{s\nu}^{-1}\to 0$ и $\varepsilon(\gamma_{s\nu})\gamma_{s\nu}^{-1}\to 0$ при $\gamma_{s\nu}\to 0$. Устремив ν к ∞ в (7.8), получаем, что $(u_x(x^s), \theta^s)=0$. Лемма доказана.

Из леммы следует, что с вероятностью 1 на каждой большой итерации за конечное число шагов можно найти γ_s, фигурирующее в описании алгоритма.

Лемма 7.2.

$$\mathsf{P}((x^s+\gamma_s\theta^s\succsim x^s)\neq((u_x(x^s), \theta^s)\geqslant 0))=0.$$

Доказательство. Пусть $x^s+\gamma_s\theta^s\succsim x^s$, т. е. $u(x^s+\gamma_s\theta^s)\geqslant u(x^s)$. Используя выпуклость $u(x)$, получаем

$$0\leqslant u(x^s+\gamma_s\theta^s)-u(x^s)\leqslant\gamma_s(u_x(x^s), \theta^s).\tag{7.9}$$

Таким образом, из того, что $x^s+\gamma_s\theta^s\succsim x^s$, следует $(u_x(x^s), \theta^s)\geqslant 0$. Докажем, что из $(u_x(x^s), \theta^s)>0$ следует, что $x^s+\gamma_s\theta^s\succsim x^s$. Предположим противное: $(u_x(x^s), \theta^s)>0$ и $x^s+\gamma_s\theta^s\precsim x^s$. Из (7.6), (7.7) следует, что $x^s-\gamma_s\theta^s\succsim x^s$.

Заменяя в соотношении (7.9) θ^s на $-\theta^s$, имеем: $(u_x(x^s), \theta^s) \leqslant \leqslant 0$. Полученное противоречие и доказывает лемму, поскольку $\mathsf{P}(B) = 0$.

Основную роль в обосновании сходимости алгоритма (7.4)—(7.7) к наиболее предпочтительному плану играет

Теорема 7.1.

$$\mathsf{M}(\xi^s/x^0, \ldots, x^s) = a \frac{u_x(x^s)}{\| u_x(x^s) \|}, \tag{7.10}$$

где $\mathsf{M}(\xi^s/x^0, \ldots, x^s)$ — математическое ожидание вектора ξ^s при условии, что реализовалась случайная последовательность $x^0, \ldots, x^s$; $u_x(x)$ — градиент функции $u(x)$; a — положительная константа.

Убедимся, что формула (7.10) корректна. Заметим прежде всего, что для произвольного индекса полезности $u(x)$, индуцированного отношением предпочтения $\underset{\sim}{\succ}$, величина $\dfrac{u_x(x)}{\| u_x(x) \|}$ постоянна. Помимо этого, для корректности (7.10) необходимо, чтобы $\| u_x(x) \| \neq 0$ для всех $x \in E^n$. Рассмотрим вектор $x + \gamma e^j$, где e^j — j-й орт, γ — положительная величина В силу монотонности и выпуклости $u(x)$ справедливо соотношение

$$0 < u(x + \gamma e^j) - u(x) \leqslant \gamma \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}.$$

Отсюда следует, что $\| u_x(x) \| \neq 0$.

Приступим непосредственно к доказательству теоремы. Обозначим через H^s событие, состоящее в том, что $x^s + \gamma_s\theta^s \underset{\sim}{\succ} x^s$; через $\mathsf{P}(H^s)$ — вероятность H^s при условии, что реализовалась последовательность $x^0, \ldots, x^s$; через $\mathsf{M}(\theta^s/H^s)$ — условное математическое ожидание вектора θ^s при условии, что реализовалась последовательность $x^0, \ldots$ $\ldots, x^s$ и произошло событие H^s. Тогда

$$\mathsf{M}(\xi^s/x^0, \ldots, x^s) = \mathsf{P}(H^s)\,\mathsf{M}(\theta^s/H^s) + \mathsf{P}(\bar{H}^s)\,\mathsf{M}(-\theta^s/H^s),$$

где $\bar{H}^s$ — событие, противоположное H^s.

Событие H^s можно переписать с помощью индекса полезности:

$$H^s = (u(x^s + \gamma_s\theta^s) \geqslant u(x^s)).$$

Отсюда и из леммы 7.2 получаем

$$\mathsf{P}(H^s) = \frac{1}{v} \overbrace{\int \ldots \int}^{n}_{\substack{(u_x(x^s),\theta^s)\geqslant 0\\ \|x\|^2\leqslant 1}} dx_1 \ldots dx_n,$$

$$\mathsf{M}(\theta_k^s/H^s) = \frac{1}{v} \overbrace{\int \ldots \int}^{n}_{\substack{(u_x(x^s),x)\geqslant 0\\ \|x\|^2\leqslant 1}} x_k dx_1 \ldots dx_n,$$

где v — объем сферы $\|x\|^2 \leqslant 1$. Нетрудно заметить, что $\mathsf{P}(H^s) = \mathsf{P}(\bar{H}^s)$ и $\mathsf{M}(\theta^s/H^s) = \mathsf{M}(-\theta^s/\bar{H}^s)$. Отсюда следует

$$\mathsf{M}(\xi_k^s/x^0, \ldots, x^s) = \frac{1}{v} \overbrace{\int \ldots \int}^{n}_{\substack{(u_x(x^s),x)\geqslant 0\\ \|x\|^2\leqslant 1}} x_k dx_1 \ldots dx_n. \tag{7.11}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\frac{\partial u(x^s)}{\partial x_1} \neq 0$. Сделаем замену переменных в интеграле (7.11): $x = Ay$, где в матрице A по столбцам записаны координаты ортонормированного базиса, в котором первым вектором является вектор $\frac{u_x(x^s)}{\|u_x(x^s)\|}$. Такой базис можно действительно получить, ортонормируя методом Грамма — Шмидта систему линейно-независимых векторов $(u_x(x^s), e^2, \ldots, e^n)$. Поскольку A — матрица ортогонального преобразования, то $\|Ay\|^2 = \|y\|^2$. Отсюда формула (7.11) после указанной замены переменных примет вид

$$\mathsf{M}(\xi_k^s/x^0, \ldots, x^s) = \frac{1}{v} \overbrace{\int \ldots \int}^{n}_{\substack{y_1\geqslant 0\\ \|y\|^2\leqslant 1}} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} y_j \, |A| \, dy_1 \ldots dy_n =$$

$$= \frac{|A|}{v} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \overbrace{\int \ldots \int}^{n}_{\substack{x_1\geqslant 0\\ \|x\|^2\leqslant 1}} x_j dx_1 \ldots dx_n,$$

Нетрудно заметить, что интеграл

$$\overbrace{\int \dots \int}^{n}_{\substack{x_1 \geqslant 0 \\ \|x\|^2 \leqslant 1}} x_j dx_1 \dots dx_n,$$

отличен от нуля, только при $j = 1$. Таким образом,

$$\mathsf{M}\,(\xi_k/x^0, \dots, x^s) = \frac{|A|}{v}\, a_{k1}\alpha, \tag{7.12}$$

где

$$\alpha = \overbrace{\int \dots \int}^{n}_{\substack{x_1 \geqslant 0 \\ \|x\|^2 \leqslant 1}} x_1 dx_1 \dots dx_n.$$

Используя определение матрицы A, (7.12) переписывается следующим образом:

$$\mathsf{M}\,(\xi^s/x^0, \dots, x^s) = \frac{\alpha\,|A|}{v}\, \frac{u_x(x^s)}{\|u_x(x^s)\|}. \tag{7.13}$$

Поскольку $\alpha > 0$, то для доказательства теоремы достаточно показать, что $|A| = 1$. Предположим противное: $|A| = -1$. Непосредственно по определению ξ^s имеем

$$u\,(x^s + \gamma_s \xi^s) \geqslant u\,(x^s) \pmod{\mathsf{P}},$$

или, используя лемму 7.2,

$$(u_x(x^s), \xi^s) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}}.$$

Подействуем оператором $\mathsf{M}\,(\cdot/x^0, \dots, x^s)$ на последнее неравенство и применим формулу (7.13). С учетом того, что $|A| = -1$, имеем

$$-\left(\frac{\alpha}{v\,\|u_x(x^s)\|}\, u_x(x^s), u_x(x^s)\right) = -\frac{\alpha\,\|u_x(x^s)\|}{v} \geqslant 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что $|A| = 1$, а следовательно, и всю теорему.

Доказательство сходимости метода (7.4)—(7.7) аналогично доказательству сходимости метода проекций стохастических квазиградиентов (см. Ю. М. Ермольев [2], стр. 99, теорема 4). В указанной теореме свойство субградиента $\hat{F}_x(x^s)$ использовалось в неравенстве

$$(\hat{F}_x(x^s),\ x^* - x^s) \leqslant 0. \tag{7.14}$$

Очевидно, что это неравенство выполняется и для нормированного субградиента вида (7.10).

При доказательстве сходимости к оптимальному решению применяется неравенство

$$0 \geqslant F(x^*) - F(x^{s_t}) \geqslant (\hat{F}_x(x^{s_t}),\ x^* - x^{s_t}). \tag{7.15}$$

При этом предварительно, без использования свойства субградиента, доказывается, что

$$(\hat{F}_x(x^{s_t}),\ x^* - x^{s_t}) \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

Поэтому и для нормированного градиента произвольной функции $u(x)$ должно выполняться соотношение

$$\left(\frac{u_x(x^{s_t})}{\| u_x(x^{s_t}) \|},\ x^* - x^{s_t}\right) \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

Отсюда, для произвольной функции $u(x)$ из множества функций, индуцированных отношением $\succsim$, выполняется соотношение

$$(u_x(x^{s_t}),\ x^* - x^{s_t}) \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

Поскольку произвольная функция $u(x)$ выпукла, то для нее выполняется соотношение (7.15), где вместо F стоит u. И, наконец, для произвольной функции u:

$$u(x^{s_t}) \to u(x^*) \text{ при } t \to \infty.$$

3. Формальный алгоритм — модель реального диалога субъекта планирования с ЭВМ. Мощным инструментом использования сильных сторон интеллекта человека при решении экономико-математических задач является оптимизация в режиме диалога специалиста и ЭВМ. Диалоговые методы в последнее время привлекают все большее внимание экономистов-математиков. Среди работ этого направления следует отметить монографию В. М. Глушкова [2], где предложен диалоговый метод последовательной оптимизации, в котором множество допустимых планов может изменяться в результате предложений экономистов и технологов по усовершенствованию существующих производственных процессов.

Метод нахождения наиболее предпочтительного плана, изложенный выше, с практической точки зрения представляет интерес, поскольку позволяет использовать в диалоговом режиме непосредственно реальные предпочтения субъекта планирования. Решение задачи (7.3) с помощью метода (7.4) — (7.5) в режиме диалога происходит следующим образом. Пусть имеется некоторое приближение x^s к наиболее предпочтительному плану. ЭВМ моделирует независимое наблюдение θ^s над вектором θ и высвечивает на экран дисплея два вектора: $x^s+\gamma_{s0}\theta^s$ и x^s. Субъект планирования посылает с пульта дисплея информацию в ЭВМ о том, считает ли он план $x^s+\gamma_{s0}\theta^s$ не хуже плана x^s. Если это так, то найденное значение $\gamma_s=\gamma_{s0}$. В противном случае субъект планирования отвечает на вопрос: $x^s-\gamma_{s0}\theta^s \succsim x^s$? Если ответ утвердительный, то $\gamma_s=\gamma_{s0}$, в противном случае γ_s полагается равным $\alpha\gamma_{s0}$. Продолжая диалог аналогичным образом, можно за конечное число шагов найти γ_s. После вычисления γ_s субъект планирования отвечает на вопрос: $x^s+\gamma_s\theta^s \succsim x^s$? В зависимости от ответа, ЭВМ вычисляет приближение x^{s+1} к наиболее предпочтительному плану по формулам (7.5) и (7.4). Если отношение предпочтения субъекта планирования удовлетворяет требованиям, предъявляемым к нему при доказательстве сходимости $\{x^s\}_{s=0,1,\dots}$ к x^*, то за достаточно большое количество шагов x^s будет как угодно мало отличаться от x^*.

Подчеркнем три важные особенности и преимущества диалогового стохастического метода нахождения наиболее предпочтительного плана. Во-первых, в методе предъявляются минимальные требования к субъекту планирования т. е. к лицу, ведущему диалог с ЭВМ с помощью дисплея. Это лицо не обязательно должно при диалоге выявлять свои творческие способности; главная его задача — передавать через дисплей информацию в ЭВМ о своей системе взглядов на предпочтительность того или иного плана. Во-вторых, количество информации, которое передает субъект планирования в ЭВМ, при каждом запросе с ее стороны минимально — один бит; лицо, ведущее диалог, должно сказать ЭВМ «да» или «нет», нажав при этом одну из двух кнопок. В-третьих, и по-видимому это главное преимущество, у реального диалога имеется теоретическая модель, которая записывается с помощью соотношений (7.4)—(7.7), и исходя из свойств этой модели, можно говорить о сходимости к наиболее предпочтительному плану, естественно, при условии выполнения предпосылок об отношении предпочтения.

4. **Некоторые вопросы практической реализации стохастического диалогового метода.** Одним из наиболее ответственных моментов при организации реального диалога, формальную модель которого мы уже исследовали, является выбор лица, которое было бы в состоянии выражать волю субъекта планирования. В идеальном случае лицо, ведущее диалог, должно быть ответственно за решения по управлению объекта планирования, т. е. являлось бы руководителем данной производственно-экономической системы. По-видимому, в недалекой перспективе при широком внедрении вычислительной техники в практику выработки управленческих решений, при возрастании доверия к ней со стороны управленческих кадров, это действительно окажется возможным. Однако в настоящее время во многих случаях привлечение руководящих кадров, особенно высших рангов, к непосредственному «разговору» с ЭВМ представляется весьма затруднительным. На наш взгляд, на первых порах в качестве «собеседника» с ЭВМ может выступать либо высококвалифицированный специалист, ясно представляющий себе, что такое «хорошо» или «плохо» для моделируемой экономической системы, или, в некоторых случаях, сам разработчик модели, который заинтересован во внедрении результатов решения по модели, и который представляет, какие требования к плану предъявляет заказчик. Проблема выбора и привлечения эксперта, ведущего диалог с ЭВМ, не проста, однако, на наш взгляд, в большинстве случаев она может быть решена.

Большое значение для успешной организации диалога имеет вопрос о форме представления информации, о двух вариантах плана, из которых субъекту планирования необходимо выбрать более предпочтительный. Поскольку реальные задачи имеют, как правило, большую размерность, то на первый взгляд возникает вполне законное сомнение в том, сможет ли субъект планирования «переварить» информацию о двух вариантах плана и решить, какая из них лучше. Однако оказывается, что подвектор показателей плана, имеющих прямую полезность для субъекта планирования, имеет размерность гораздо меньшую, чем весь вектор плана. Например, общество в целом в конечном итоге заинтересовано лишь в соответствующих темпах и структуре фонда потребления, показатели же фонда накопления, валового продукта, капиталовложений и др. сами по себе являются лишь средством для получения наиболее предпочтительного фонда потребления по величине, структуре и динамике. Поэтому при решении оптимизационных задач на макроуровне субъекту планирования достаточно иметь непосредственный контакт лишь с вектором продукции, идущей на потребление.

В отдельных случаях план характеризуется 2—4 показателями. Например, по мнению О. М. Онищенко качество плана сельскохозяйственных предприятий достаточно полно характеризуется показателями объема товарной продукции и прибыли. Иногда к этим показателям добавляются еще два-три.

Учитывая сделанное замечание, можно существенно рационализировать алгоритм стохастического диалогового метода, разделив переменные на две части: те, которые имеют прямую полезность и те, которые таковой не имеют. Обозначим вектор, содержащий компоненты переменных, относящихся к первой части, через y; подвектор переменных, относящихся ко второй части,— через x. Тогда задача выбора наиболее предпочтительного плана может быть конкретизирована следующим образом:

$$y \to \mathrm{pref}, \quad (x, y) \in D. \tag{7.16}$$

Общий алгоритм применительно к задаче (7.16) может быть записан в виде

$$\begin{pmatrix} x^{s+1} \\ y^{s+1} \end{pmatrix} = \pi_D \begin{pmatrix} x^s \\ y^s + \rho_s \xi^s \end{pmatrix}, \tag{7.17}$$

где

$$\xi^s = \begin{cases} \theta^s, & \text{если } y^s + \gamma_s \theta^s \succsim y^s, \\ -\theta^s, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{7.18}$$

θ^s — независимое наблюдение в s-й итерации над случайным вектором (размерность которого совпадает с размерностью вектора y), равномерно распределенным на шаре $\|y\| \leqslant 1$. В алгоритме (7.17), (7.18) γ_s и ρ_s определяются как и в общем алгоритме.

Рассмотрим вектор $\begin{pmatrix} \bar{0} \\ \xi^s \end{pmatrix}$, где $\bar{0}$ — нулевой вектор, размерность которого совпадает с размерностью вектора x. Убедимся, что

$$M \left(\begin{pmatrix} \bar{0} \\ \xi^s \end{pmatrix} / x^0, \ldots, x^s \right) = a \frac{u_{xy}(x^s, y^s)}{\| u_{xy}(x^s, y^s) \|}, \tag{7.19}$$

где $u(x,y)$ — индекс полезности, индуцированный отношением предпочтения, заданным на векторах плана. Поскольку прямой полезностью обладают лишь показатели плана, относящиеся к вектору y, т. е. увеличение произвольной компоненты вектора приводит к более предпочтительному плану, а изменение вектора x не приводит к изменению предпочтительности, то нетрудно сообразить, что

$$u(x, y) = u(y)$$

Отсюда следует справедливость (7.19) и сходимость метода (7.17), (7.18) к наиболее предпочтительному плану.

По сравнению с общим алгоритмом метода (7.17), метод (7.18) имеет двойное преимущество: уменьшает размерность случайного вектора, который необходимо моделировать на каждой итерации, и уменьшает размерность вектора, который оценивает субъект планирования.

В условиях большой размерности иногда проектировать на множество D на каждой итерации не представляется возможным. Если, например, D описывается системой линейных уравнений и неравенств, то на каждой итерации для методов (7.4) —(7.7) и (7.17), (7.18) необходимо решать задачу квадратичного программирования. Базируясь на основной теореме этой главы и на стохастическом методе линеаризации, разработанном А. М. Гупалом и Л. Г. Баженовым [1], можно предложить метод решения задачи

$$x \to \mathrm{pref}, \quad x \in D,$$

в котором операция проектирования заменена решением задачи линейного программирования.

Рассмотрим случайные итерационные последовательности, задаваемые формулами

$$\begin{aligned} x^{s+1} &= x^s + \rho_s(\bar{x}^s - x^s), \\ \bar{z}^{s+1} &= z^s + \delta_s(\xi^s - z^s), \end{aligned} \tag{7.20}$$

где

$$z^s = \begin{cases} \bar{z}^s, & \|\bar{z}^s\| < C, \quad C > 0, \\ \dfrac{C\bar{z}^s}{\|\bar{z}^s\|}, & \|\bar{z}^s\| > C, \end{cases} \tag{7.20^1}$$

$\bar{x}^s$ — решение задачи

$$(\bar{z}^s, x) \to \max, \quad x \in D,$$

C — большое число; ρ_s, δ_s — шаговые множители; ξ^s — вектор, вычисляемый по формулам (7.5) — (7.7).

Анализ теоремы о сходимости метода стохастической линеаризации показывает, что если вместо вектора стохастического градиента, фигурирующего в методе, подставить вектор ξ^s, вычисленный по формулам (7.5)—(7.7), то последовательность $\{x^s\}$ с вероятностью 1 также будет сходиться к решению задачи $x \to \mathrm{pref}$, $x \in D$. При этом должно выполняться условие Липшица для индекса полезности, индуцированного отношением $\succsim$ и, кроме того,

$$\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s^2 < \infty, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \delta_s^2 < \infty, \quad 0 \leqslant \rho_s \leqslant 1,$$

для некоторых чисел λ_s

$$\rho_s - \lambda_s\delta_s \leqslant -\rho_s, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_s\rho_s < \infty, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty.$$

Таким образом, в методе (7.20) на каждой итерации необходимо решать задачу линейного программирования, что гораздо менее трудоемко, чем решение задачи квадратичного программирования.

Существенным достоинством метода (7.20) является то, что от итерации к итерации в задаче

$$(z^{s}, x) \to \max, \quad x \in D, \tag{7.21}$$

меняется лишь целевая функция, причем с ростом s все меньше, поскольку $\delta_s \to \infty$ при $s \to \infty$. Поэтому для решения задачи (7.21) на $s+1$-й итерации целесообразно использовать симплекс-таблицу задачи (7.21) на s-й итерации.

Важным свойством метода (7.20), (7.20¹) является и то, что в случае невыпуклости отношения предпочтения, можно тем не менее гарантировать сходимость метода к локальному наиболее предпочтительному плану, т. е. к плану x^*, для которого существует окрестность $U(x^*, \varepsilon)$ такая, что

$$x^* \succsim x \text{ для } x \in U(x^*, \varepsilon) \cap D.$$

Это следует из сходимости к локальному минимуму стохастического метода линеаризации, доказанной в монографии Ю. М. Ермольева [2].

Метод (7.20) для решения задачи $x \to \mathrm{pref}$, $x \in D$ можно также рационально конкретизировать для решения задачи

$$y \to \mathrm{pref}, \quad (x, y) \in D,$$

как и метод (7.4)—(7.5).

§ 3. Применения диалогового стохастического метода

В настоящем параграфе рассматриваются некоторые приложения стохастического диалогового метода. Формулировка некоторых экономических проблем в виде задачи нахождения наиболее предпочтительного плана представляется весьма естественной и позволяет наметить конструктивные подходы к их решению.

1. Проблема оптимального соотношения между накоплением и потреблением. Одной из наиболее трудных проблем экономической теории является проблема оптимального соотношения между накоплением и потреблением. Поскольку накопление не есть самоцель, а лишь средство к расширению производства и повышения уровня потребления в будущем, то эта проблема сводится к соизмерению полезности настоящих и будущих благ. Чтобы глубже разобраться в существе проблемы, попытаемся ее сформулировать в наиболее «чистом» виде, отвлекаясь от второстепенных деталей, которые могут быть в дальнейшем учтены, при условии прогресса в изучении проблемы в «чистом» виде.

Будем рассматривать экономику в наиболее агрегированном виде, т. е. будем оперировать наиболее общими характеристиками народного хозяйства — валовой продукт, фонды накопления и потребления,— не подразделяя эти показатели по отраслям. Введем обозначения: $x(\tau)$ — валовой продукт в году τ, $y(\tau)$ — фонд потребления в году τ, a — материалоемкость валового продукта, b — приростная капиталоемкость валового продукта. Предположив, что материалоемкость и приростная капиталоемкость не зависит от величины валового продукта, можно записать

$$x(\tau) = ax(\tau) + b(x(\tau+1) - x(\tau)) + y(\tau) \quad (\tau = \overline{0, T}). \tag{7.22}$$

Соотношения (7.22) является упрощенным вариантом (в смысле предельного агрегирования) известной динамической межотраслевой модели Леонтьева. К уравнениям (7.22) необходимо добавить дополнительные ограничения на начальный уровень валового продукта и на неотрицательность переменных

$$\begin{gathered} x(0) = x^0, \quad x(\tau) \geqslant 0, \quad (\tau = \overline{0, T+1}), \\ y(\tau) \geqslant 0 \quad (\tau = \overline{0, T}). \end{gathered} \tag{7.23}$$

Попытаемся сформулировать задачу оптимального соотношения между накоплением и потреблением в виде оптимизационной задачи. В связи с этим возникает вопрос о выборе критерия оптимальности для этой задачи. Существует точка зрения, что основному закону социализма хорошо соответствует критерий максимизации интегрального (суммарного) фонда потребления за ряд лет, т. е. в наиболее простом виде критерий имеет вид

$$\sum_{\tau=0}^{T} y(\tau) \to \max. \tag{7.24}$$

При постановке задачи оптимизации соотношения накопления и потребления в виде (7.22)—(7.24) возникает проблема обоснованного выбора величины планового горизонта, что может привести к бесконечномерной задаче математического программирования и в лучшем случае даст возможность лишь теоретического изучения модели. Получение же численного результата о траекториях $x(\tau)$ и $y(\tau)$ становится в этом случае весьма проблематичным.

К сожалению, модель (7.22)—(7.24) обладает свойством релейности, которое делает ее малопригодной для обоснования темпов и пропорций валового продукта, фондов потребления и накопления. Понятно, что релейная динамика фонда потребления, несмотря на то, что она соответствует формальному оптимуму, неприемлема.

Не меняет положения и введение в модель дополнительных ограничений на минимальный уровень потребления в каждом году:

$$y(\tau) \geqslant c(\tau),$$

поскольку, во-первых, остается открытым вопрос о выборе величин $c(\tau)$; во-вторых, сохраняется релейность управления $y(\tau)$.

Релейность управлений не устраняется введением в целевую функцию коэффициентов дисконтирования $\alpha(\tau)$ $(\alpha(\tau+1) < \alpha(\tau))$, которые придают больший вес потреблению в более близкие моменты времени. Целевая функция в этом случае имеет вид

$$\sum_{\tau=0}^{T} \alpha(\tau)\, y(\tau) \to \max. \tag{7.25}$$

Релейность управлений также сохраняется, если в целевую функцию ввести значения $x(\tau)$ и $y(\tau)$ при некоторых $\tau \geqslant T$, которые приближенно учитывают развитие экономики в забалансовый период.

Релейность оптимальных траекторий развития экономики в линейных моделях имеет глубокие корни. Для линейных задач общего вида теории оптимального управления (как для дискретного, так и для непрерывного времени) доказано, что оптимальное управление имеет релейный характер.

Содержательная же причина непригодности подобных моделей для обоснования темпов и пропорций общественного производства, на наш взгляд, состоит в неадекватном отображении интересов плановых органов с помощью критериев вида (7.24), (7.25).

Среди множества подходов к указанной проблеме можно выделить два основных, к которым примыкают, в большей или меньшей степени, остальные.

Первый подход состоит в искусственном сужении области выбора траекторий, причем в суженном множестве решений находятся лишь некоторые «разумные» траектории. Например, К. А. Багриновским предложен интересный подход, который заключается в том, что управление в динамической межотраслевой модели с непрерывным временем выбирается из множества гладких функций. К сожалению, этот подход неприменим к моделям с дискретным временем, поскольку в этом случае не имеет смысла говорить о дифференциальных свойствах управления. Это во-первых. Во-вторых, требование гладкости может существенно сузить область допустимых решений. Весьма возможно, что наличие небольшого скачка в траектории может привести к существенному увеличению интегрального фонда потребления, а поэтому такую траекторию с небольшим дефектом в смысле скачкообразности можно считать более предпочтительной.

Второй подход основан на вариантных расчетах моделей и на неформальном выборе из просчитанных вариантов наиболее предпочтительного с точки зрения исследователя. Сильной стороной этого подхода является непосредственное использование предпочтения, которое сформировалось у субъекта планирования. Слабая сторона подхода состоит в том, что обозревается лишь небольшое число вариантов, причем формирование этих вариантов происходит на субъективной основе, а поэтому нет гарантии, что не будет упущен вариант, который является наиболее предпочтительным.

Нам представляется, что для решения проблемы оптимального соотношения накопления и потребления целесообразно применять диалоговые методы. Поскольку очень трудно найти форму и параметры критерия, являющегося адекватной моделью интересов субъекта планирования, связанных с динамикой основных народнохозяйственных пропорций, а простые критерии приводят к парадоксальным результатам, то необходимо в данном случае отказаться от использования традиционных оптимизационных моделей и перейти к моделям, в которых непосредственно используются субъективные предпочтения плановика (но порожденные объективными условиями), т. е. задачу оптимизации экономической системы в динамике рассматривать как задачу выбора наиболее предпочтительного плана. Преимущества такого подхода состоит в следующем: во-первых, непосредственно используются предпочтения субъекта планирования, во-вторых, при выполнении некоторых предпосылок можно ставить вопрос о выборе наиболее предпочтительного плана, для чего можно использовать методы, предложенные в начале настоящей главы.

Например, простейшую задачу оптимизации соотношения накопления и потребления можно представить в виде

$$(y(0), y(1), \ldots, y(T),\ x(T+1)) \to \mathrm{pref}, \tag{7.26}$$

$$x(\tau) = ax(\tau) + b(x(\tau+1) - x(\tau)) + y(\tau) \quad (\tau = \overline{0, T}),$$

$$x(0) = x^0, \tag{7.27}$$

$$x(\tau) \geqslant 0 \quad (\tau = \overline{1, T+1}), \qquad y(\tau) \geqslant 0 \quad (\tau = \overline{0, T})$$

Компонента $x(T+1)$ показывает возможности экономики в забалансовом периоде и является приближенной оценкой потребления после года T.

Для решения задачи (7.26), (7.27) целесообразно пользоваться модификацией (7.17), (7.18) общего алгоритма проекций стохастического квазиградиента или аналогичной модификацией метода стохастической линеаризации. При проектировании на множество, высекаемое ограничениями (7.27), в методе (7.17), (7.18) или при решении задачи $(z^s, x) \to \max,\ x \in D$ в методе (7.20), (7.20^1) имеет смысл пользоваться экономными алгоритмами решения задач с ограничениями в виде конечно-разностных уравнений.

2. Многомерные динамические задачи. Сказанное в предыдущем пункте об одномерной динамической модели во многом справедливо и для многомерных (многопродуктовых) динамических оптимизационных моделей. Резкие годовые изменения объемов производства, потребления, накопления делают неприемлемым для практического применения обычные динамические оптимизационные модели. Поэтому и в многопродуктовом случае целесообразна постановка модели в виде задачи нахождения наиболее предпочтительного плана. Простейшим примером динамической многопродуктовой модели выбора наиболее предпочтительного плана является задача:

$$(y(0), y(1), \ldots, y(T), x(T+1)) \underset{x,y}{\to} \mathrm{pref},$$

$$x(\tau) = Ax(\tau) + B(x(\tau+1) - x(\tau)) + y(\tau) \quad (\tau = \overline{0, T}),$$

$$x(0) = x^0,$$

$$x(\tau) \geqslant 0 \quad (\tau = \overline{1, T+1}), \qquad y(\tau) \geqslant 0 \quad (\tau = \overline{0, T}),$$

где $y(\tau)$ — вектор потребляемых продуктов в году τ; $x(\tau)$ — вектор валовых выпусков в году τ; A — матрица прямых затрат; B — матрица приростной капиталоемкости (матрицы A и B могут зависеть от τ).

Так же как и в однопродуктовой модели, вектор $x(T+1)$ служит для приближенного описания возможных траекторий в забалансовом периоде.

3. Проблема соизмерения потребительских полезностей. Актуальной проблемой современной экономико-математической науки является проблема соизмерения потребительских стоимостей. При соизмерении потребительских стоимостей, на наш взгляд, гораздо проще оперировать отношением предпочтения, заданным на множестве векторов потребляемых продуктов, чем кардинально измерять полезность потребляемой продукции. Задача выбора наиболее предпочтительного вектора фонда потребления на макроуровне в простейшем виде может быть записана следующим образом:

$$
\begin{gathered}
y \underset{x,y}{\rightarrow} \text{pref}, \\
x = Ax + y + q, \quad Rx \leqslant r, \quad x, y \geqslant 0.
\end{gathered} \tag{7.28}
$$

При условии, что множество потребителей однородно, в качестве отношения предпочтения, в смысле которого понимается задача (7.28), можно было бы выбрать отношение предпочтения произвольного потребителя. В этом случае задача нахождения наиболее предпочтительной структуры потребления была бы довольно естественной и легко интерпретируемой, поскольку выбор тех или иных потребительских товаров в определенных количествах индивидуальный потребитель осуществляет не в связи с максимизацией некоторой функции, а потому, что потребитель обладает некоторой системой предпочтений, которые сформировались под влиянием моды, природно-географической среды и др. Безусловно, потребителю легче сообщить (а плановым органам легче получить) информацию о своей системе предпочтений, причем в той форме, которая необходима для проведения диалога по методам настоящей главы, чем описывать эту систему в виде явно заданной функции.

К сожалению, возникают трудности, связанные с большой разнородностью потребителей. В связи с этим возникает проблема агрегирования отношений предпочтений, выбора наиболее типичных, «средних» потребителей с нормальными интересами. Несмотря на эти трудности, представляет интерес хотя бы простейший эксперимент по реализации модели (7.28) в диалоге.

С целью изучения поведения индивидуальных потребителей, экспериментальной проверки стохастических диалоговых методов представляет интерес решение задачи

$$x \rightarrow \text{pref}, \quad (p, x) \leqslant M, \quad x \geqslant 0,$$

где x — вектор потребительских товаров, p — вектор цен на эти товары, M — наличный запас денег у потребителя. Смысл задачи состоит в выборе наиболее предпочтительного плана покупок, удовлетворяющего бюджетному ограничению.

4. Задача о диете. Широкую известность в свое время получила так называемая задача о диете. Известность задачи о диете обусловлена скорее не большой практической пользой, которая была получена от ее внедрения, хотя в дальнейшем было и это, а теми парадоксальными и весьма поучительными результатами, которые получались при решении этой задачи.

Простейший вариант постановки задачи о диете таков: заданы потребности человеческого организма в питательных веществах (белки, жиры, углеводы, витамины и т. д.), задано содержание этих веществ в различных продуктах и заданы цены на эти продукты. Необходимо определить такое «меню», чтобы потребность в веществах полностью удовлетворялась, а суммарная стоимость продуктов была бы минимальна. Математическая запись задачи о диете имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i \qquad (i = \overline{1, m}), \tag{7.29}$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad (j = \overline{1, n}),$$

где p_j — цена на j-й продукт; a_{ij} — удельное содержание i-го вещества в j-м продукте; b_i — потребность в i-м продукте.

Существенным недостатком модели (7.29) является то, что в ней не учитываются вкусовые качества продуктов, что, кстати, используя традиционный аппарат математического программирования, очень трудно сделать, а поэтому оптимальный набор продуктов может быть весьма «неаппетитным» и следовательно, неприменимым, несмотря на свою экономичность. Это неоднократно подтверждалось экспериментальными расчетами. Указанный недостаток можно устранить, введя в модель дополнительное ограничение

$$x \succsim z, \tag{7.30}$$

где z — некоторый набор продуктов; $\alpha \succsim \beta$ означает, что набор α по своим вкусовым качествам не уступает набору β.

Смысл задачи (7.29), (7.30) заключается в выборе наиболее экономного рациона питания, который был бы полноценным по содержанию питательных веществ и по вкусовым качествам. В качестве набора z может быть выбран традиционно сложившийся набор продуктов.

Можно также рассматривать следующую задачу:

$$x \to \mathrm{pref},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i \qquad (i = \overline{1, m}), \tag{7.31}$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leqslant M, \quad x_j \geqslant 0 \qquad (j = \overline{1, n}).$$

Имеет смысл также постановка моделей, являющихся симбиозом задач о диете и межотраслевых моделей.

ЛИТЕРАТУРА

Аганбегян А. Г. О внедрении экономико-математических методов и электронно-вычислительных машин в разработку перспективных планов развития и размещения отрасли.— В кн. Оптимальное отраслевое планирование в промышленности, Новосибирск, Наука, 1970.

Аганбегян А. Г., Багриновский К. А., Гранберг А. Г. Система моделей народнохозяйственного планирования.— М.: Мысль, 1972.

Аганбегян А. Г., Гранберг А. Г. Экономико-математический анализ межотраслевого баланса СССР.— М.: Мысль, 1968.

Аллен Р. Математическая экономика.— М.: ИЛ, 1963.

Арбузова Н. И., Вересков А. И., Николаева Н. Д. Некоторые задачи стохастического программирования (Обзор).— Экономика и матем. методы, 1969, V, вып. 3.

Багриновский К. А. О гладких решениях некоторых задач планирования.— В кн.: Проблемы народнохозяйственного оптимума, вып. 2, Новосибирск, Наука, 1969.

Бочварова Ц. Е. Об одной стохастической модели сельскохозяйственного производства.— Экономика и матем. методы, 1975, XI, вып. 4.

Волконский В. А. Об объективной математической характеристике народного потребления.— В кн.: Народнохозяйственные модели. Теоретические вопросы потребления, М., Изд. АН СССР, 1968.

Гирко В. Л. Случайные матрицы.— Киев: Наукова думка, 1976.

Глушков В. М.

1. Введение в АСУ.— Киев: Техніка, 1974.
2. Макроэкономические модели и проблемы построения ОГАС. — М.: Статистика, 1975.

Глушков В. М., Ермольев Ю. М. Задачи синхронизации производства. — Кибернетика, 1976, № 5.

Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения.— М.: Наука, 1971.

Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Новые направления в линейном программировании.—М.: Сов. радио, 1966.

Гранберг А. Г.

1. Анализ некоторых моделей оптимизации межотраслевых связей.— Экономика и матем. методы, 1969, V, вып. 3.
2. Математические модели социалистической экономики.— М.: Экономика, 1978.

Гупал А. М. Стохастические методы решения негладких экстремальных задач.— Киев : Наукова думка, 1979.

Гупал А. М., Баженов Л. Г. Стохастический метод линеаризации.— Кибернетика, 1972, № 3.

Ермольев Ю. М.

1. Об одной общей задаче стохастического программирования.— Кибернетика, 1971, № 1.
2. Методы стохастического программирования.— М.: Наука, 1976.
3. Об одной задаче программного управления случайным процессом.— Кибернетика, 1972, № 1.

Ермольев Ю. М., Гупал А. М. Аналог метода линеаризации в задачах минимизации недифференцируемых функций.— Кибернетика, 1978, № 1.

Ермольев Ю. М., Мирзоахмедов Ф. Прямые методы стохастического программирования в задачах планирования запасов.— Кибернетика, 1976, № 6.

Ершов Э. Б. Неопределенность информации и устойчивость решения статистической модели планового межотраслевого баланса В кн.: Проблемы народнохозяйственного оптимума, вып. 2, Новосибирск, Наука, 1969.

Ефимов В. М. Некоторые теоретические вопросы построения моделей оптимального планирования в условиях неопределенности.— М.: Изд-во МГУ, 1971.— Автореферат канд. дисс.

Ефимов В. М., Спивак В. А. О неопределенности и вероятности.— Экономика и матем. методы, 1972, VIII, вып. 5.

Зейлигер А. Н., Макаров А. А., Санеев Б. Г. Принципы и эвристические методы адаптации экономических систем в условиях неопределенности (на примере энергетики).— Экономика и матем. методы, 1974, X, вып. 3.

Канторович Л. В.

1. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов.— М.: Изд-во АН СССР, 1959.
2. Динамическая модель оптимального планирования.— В кн.: Планирование и экономико-математические методы, М. Наука, 1964.

Канторович Л. В., Горстко А. Б. Оптимальные решения в экономике,— М.: Наука, 1972.

Коссов В. В. Межотраслевой баланс.— М.: Экономика, 1966.

Льюс Р. Д., Райфа Х. Игры и решения.— М.: ИЛ, 1961.

Макаров В. Л.

1. Линейные динамические модели производства.— В кн.: Оптимальное планирование, № 5, Новосибирск, Наука, 1966.

2. Модели оптимального роста экономики.— Экономика и математические методы, 1969, V, вып. 4.

Макаров В. Л., Рубинов А. М. Математическая теория экономической динамики и равновесия.— М.: Наука, 1973.

Матряшин Н. П. О применении экономико-математических моделей стохастического программирования.— Киев: 1970. — Автореферат канд. дисс.

Моррис У. Т. Наука об управлении, Байесовский подход.— М.: Мир, 1971.

Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика.— М.: Мир, 1972.

Онищенко О. М. Оптимізація галузевої структури сільськогосподарських підприємств.— Киев: Урожай, 1972.

Поспелов Г. С., Ириков В. А. Программно-целевое планирование и управление.— М.: Сов. радио, 1976.

Пугачев В. Ф. Оптимизация планирования.— М.: Экономика, 1968.

Пшеничный Б. Н. Необходимые условия экстремума.— М.: Наука, 1969.

Рыжиков Ю. И. Управление запасами.— М.: Наука, 1969.

Сатанова Э. А. Экспериментальное исследование вероятностной полудинамической модели межотраслевого баланса производственных мощностей.— В кн.: Проблемы моделирования народного хозяйства, III, Новосибирск, 1973.

Соболев В. И. Лекции по дополнительным главам математического анализа.— М.: Наука, 1968.

Соколовский Л. Х. Стимулирование напряженных планов в условиях неопределенности.— Экономика и матем. методы, 1974, X, вып. 4.

Шатилов Н. Ф. Моделирование расширенного воспроизводства.— М.: Экономика, 1967.

Хэнесменн Ф. Применение математических методов в управлении производством и запасами.— М.: Прогресс, 1966.

Юдин Д. Б.

1. Математические методы управления в условиях неполной информации.— М.: Сов. радио, 1974.
2. Новые подходы к стохастическому программированию.— Экономика и матем. методы, 1968, IV, вып. 6.

Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование.— М.: Физматгиз, 1963.

Ястремский А. И.

1. Стохастические модели производства. I—III.—В кн.: Исследование операций и АСУ, №№ 12—14, Киев, Вища школа, 1978—1979.
2. Темпы роста и норма эффективности в оптимальном плане динамической стохастической модели производства.— Кибернетика, 1976, № 3.
3. О простейшей оптимизационной стохастической межотраслевой модели.— Кибернетика, 1973, № 5.

Dantzig G. B., Madansky A. On the solution of twostage linear programs under uncertainty.— Proc. 4 Berkeley Symposium on Math. Statistics and Prob. 1961, 1.

Courtillot M. On varying all the Parametres in a Linear Programming Problems and Sequential Solution of a Linear Programming Problem.— Operat. Res., 1962, 10, № 4.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Юрий Михайлович
Ермольев
Александр Иванович
Ястремский

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ
В ЭКОНОМИЧЕСКОМ ПЛАНИРОВАНИИ

(Серия : «Экономико-
математическая библиотека»)

М., 1979 г., 256 стр. с илл.

Редакторы Ю. А. Флёров, Е. Ю. Ходан
Технический редактор В. Н. Кондакова
Корректоры Е. А. Белицкая, А. Л. Ипатова

ИБ № 11246

Сдано в набор 14.2.79. Подписано к печати 13.11.79. Т-18661. Бумага 84×108 1/32, тип. № 1. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 13,44. Уч.-изд. л. 12,82. Тираж 6000 экз. Заказ № 9-250. Цена книги 1 р. 10 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Киевская книжная типография научной книги Республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР, 252004, Киев-4, Репина 4.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15