ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОДУКТИВНОСТИ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ[1]

Тарасьев А.М., д.ф.-м.н., зав. сектором отдела динамических систем ИММ УрО РАН им. Н.Н. Красовского, tam@imm.uran.ru

Усова А.А., к.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной математики ИМКН УрФУ имени первого президента России Б.Н. Ельцина

anastasy.ousova@gmail.com

Аннотация

В работе рассматривается модель оптимизации потребления природных ресурсов, основанная на конструкциях теории экономического роста. Управляющим параметром модели служит доля ВВП, инвестируемая в увеличение продуктивности природных ресурсов. На основе модели формулируется задача оптимального управления, анализ которой проводится в рамках принципа максимума Понтрягина для задач с бесконечным горизонтом. Исследуются различные уровни инвестирования продуктивности ресурсов и их влияние на поведение динамической системы, в частности, на стационарное положение гамильтоновой динамики. В результате анализа задачи предлагается конструкция аппроксимирующего управления ступенчатого вида, построенного в силу условия ограниченности природных ресурсов.

Введение

Статья посвящена задаче увеличения продуктивности природных ресурсов за счет сбалансированной инвестиционной политики, направленной на дематериализацию экономики. Постановка задачи осуществлена на основе классических подходов, используемых в моделях экономического роста ([2], [6]), а также заимствует методы и подходы, предложенные в работе [7].

В модель включен механизм ценообразования, который обеспечивает

[1] Работа поддержана грантами РФФИ (11-01-00427-а, 12-01-00024-а, 12-01-31300), Программой ведущих научных школ (НШ-64508.2010.1), Программой президиума РАН (12-П-1-1002, 12-П-1-1012, 12-П-1-1038, 12-П-7-1001), Проект 13-1-НП-253 УрО РАН и Международным Институтом Прикладного Системного Анализа, IIASA (NSFC-IIASA).

рост стоимости материалов при уменьшении их запасов, что может трактоваться как естественный инструмент штрафов за нарушение фазовых ограничений в задачах оптимального управления. Дорожающие ресурсы отрицательно влияют на потребительский индекс, по которому оценивается качество процесса управления [8].

Актуальность подобных моделей значительна, поскольку опираясь на статистику [4] можно отметить стремительно растущие темпы потребления природных ресурсов.

Задача состоит в нахождении таких оптимальных инвестиционных стратегий в увеличение продуктивности ресурсов, при которых интегральный индекс потребления логарифмического типа принимает максимальное значение вдоль траекторий динамической системы. Исследование задачи осуществляется в рамках принципа максимума Понтрягина ([1], [5]). Формулируются условия, при которых существует стационарная точка гамильтоновой динамики. Опираясь на свойства системы при постоянных управлениях, строится аппроксимирующее решение и сравнивается со стабилизированными траекториями, построенными по алгоритму, описанному в работе [7].

Описание модели и постановка задачи

Основными переменными модели служат внутренний валовой продукт (ВВП) y, объемы потребления ресурсов m и общий расход ресурсов к моменту времени t

$$M = M(t) = \int_0^t m(\tau)d\tau, \quad M_0 = \int_0^{+\infty} m(t)dt. \qquad (1), (2)$$

Начальный уровень потребления m_0 и общий запас ресурсов M_0 известны. Продуктивность ресурсов $z(t)$ в момент времени t задается равенством

$$z(t) = y(t)/m(t) \qquad (3)$$

В силу ограниченности природных ресурсов логично предполагать, что при уменьшении запасов материалов цены $p(t)$ на них будут расти. Указанная взаимосвязь описывается пропорцией:

$$p(t)/p_0 = M_0/\big(M_0 - M(t)\big) \qquad (4)$$

В силу замкнутости экономической системы можно выписать следующее **балансовое соотношение** в относительных величинах

$$c(t)/y(t) = 1 - p(t)m(t)/y(t) - u(t), \qquad (5)$$

которое говорит о том, что текущий объем ВВП $y(t)$ расходуется на потребление $c(t)$, закупку материалов по цене $p(t)$ в объеме $m(t)$ и инвестиции $u(t)$ в увеличение продуктивности $z(t)$ природных ресурсов.

В виду соотношения (5) можно указать такую положительную величину $\bar{u}$, которая ограничивает уровни инвестиций сверху: $0 \le u(t) \le \bar{u} < 1$.

В модели используется **производственная функция** Кобба-Дугласа

$$y(t) = ae^{bt}m^{\alpha}(t), \;\; a > 0, b \ge 0, 0 \le \alpha < 1, \tag{6}$$

где параметр a – коэффициент масштаба, символ b определяет процесс роста выпуска $y(t)$ за счет развития производственных факторов (здесь потребление ресурсов $m(t)$), величина α – коэффициент эластичности.

Замечание. Параметры модели удовлетворяют неравенству $m_0/M_0 < b/\alpha$, которое выполняется в статистических данных для большинства стран.

Задача оптимального управления

Предполагается, что относительный темп изменения продуктивности $z(t)$ ресурсов пропорционален доле ВВП $u(t)$, инвестируемой в технологические разработки и направленной на повышение продуктивности ресурсов (см. [2]):

$$\dot{z}(t) = \beta u(t) z(t), \;\; \beta \ge 0, \tag{7}$$

где параметр β определяет эффективность инвестиционного процесса $u(t)$. Из равенства (7), в силу соотношений (3) и (6), определяется закон изменения потребления природных ресурсов

$$\dot{m}(t) = \big(b - \beta u(t)\big) m(t)/(1 - \alpha). \tag{8}$$

Для приведения задачи оптимального управления к классическому виду вводятся фазовые переменные

$$x_1(t) = m(t)/\big(M_0 - M(t)\big), \quad x_2(t) = p(t)m(t)/y(t). \tag{9}$$

Первая переменная $x_1(t)$ - это отношение текущего потребления ресурсов $m(t)$ к общему объему их оставшейся части $M_0 - M(t)$. Вторая переменная $x_2(t)$ есть доля расходов на потребляемые ресурсы $p(t)m(t)$ в общем объеме выпуска $y(t)$ в текущий момент времени.

Отметим, что введение таких переменных необходимо в силу метода разрешения особенностей для величин, принимающих бесконечно большие (малые) значения в системах дифференциальных уравнений [3]. Для получения динамики введенных переменных $x(\cdot) = \big(x_1(\cdot), x_2(\cdot)\big)$ используются соотношения (1), (3), (6) - (8).

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1\big(x(t), u(t)\big) = x_1(t)\left(x_1(t) + \frac{b - \beta u(t)}{1 - \alpha}\right), & x_1^0 &= \frac{m_0}{M_0} \\ \dot{x}_2(t) &= f_2\big(x(t), u(t)\big) = x_2(t)\big(x_1(t) - \beta u(t)\big), & x_2^0 &= \frac{p_0 m_0^{\alpha}}{a} \end{aligned} \tag{10}$$

Управление $u(t)$ в уравнениях (10) удовлетворяет ограничениям

$$0 \leq u(t) \leq \bar{u} < 1, \tag{11}$$

В переменных $x(t) = \big(x_1(t),\ x_2(t)\big)$ логарифмический индекс потребления (6) записывается следующим образом:

$$\ln c(t) = \ln\frac{x_1(t)}{x_2(t)} + \ln\big(1 - u(t) - x_2(t)\big) + \ln(p_0 M_0) = \omega(x,u) + \ln(p_0 M_0)$$

Функционал качества процесса управления определяется как интегральный логарифмический индекс потребления, дисконтированный на бесконечном промежутке времени (ρ – дисконтирующий множитель).

$$J\big(x(\cdot),u(\cdot)\big) = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t}\omega\big(x(t),u(t)\big)dt, \tag{12}$$

Задача оптимального управления состоит в максимизации функционала качества (12) вдоль траекторий $\big(x(t),\ u(t)\big)$ динамической системы (10), удовлетворяющей начальным условиям $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ и ограничениям (11) по переменной управления $u(t)$.

Исследование задачи

Анализ задачи оптимального управления проводится в рамках принципа максимума Понтрягина [5] при наличии особенностей бесконечного промежутка времени [1].

Гамильтониан и области его определения

Стационарная гамильтонова функция задачи управления имеет вид

$$\hat{H}(x,\psi,u) = \omega\big(x(t),u(t)\big) + \langle\psi, f(x,u)\rangle, \qquad f(x,u) = \begin{pmatrix} f_1(x,u) \\ f_2(x,u) \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ – вектор сопряженных переменных, $f(x,u)$ – вектор-функция, определяющая правые части динамической системы (10).

Вычисляя максимум функции $\hat{H}(x,\psi,u)$ (14) по переменной u, находим структуру управления u^0 (см. таблицу 1).

Управление, u^0	**Ограничение**
0	$x \in D_1 = \{x :\ v(x_3,x_4) \geq 1 - x_2\}$
$1 - x_2 - v(x_3,x_4)$	$x \in D_2 = \{x : 1 - \bar{u} - x_2 \leq v(x_3,x_4) \leq 1 - x_2\}$
$\bar{u}$	$x \in D_3 = \{x :\ v(x_3,x_4) \leq 1 - \bar{u} - x_2\}$

Таблица 1: Структура управления

Здесь введены сопряженные переменные $x_3 = \psi_1 x_1,\ x_4 = \psi_2 x_2$, функция

$v(x_3, x_4) = -\frac{1-\alpha}{\beta}\frac{1}{x_3+(1-\alpha)x_4}$, а вектор (x_1, x_2, x_3, x_4) обозначен символом x.

Стационарная точка и область ее существования

Анализируя гамильтонову динамику, полученную из принципа максимума Понтрягина [1], [5], исследуется вопрос существования стационарных точек гамильтоновой.

Утверждение. В области D_2 переменного управления существует стационарная точка $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$, если параметры модели лежат внутри эллиптической области Ω, изображенной на рисунке 1. При этом координаты стационарной точки находятся в явном виде

$$x_1^* = b/\alpha\,, \qquad x_2^* = (\alpha\rho - b)\big((1-\alpha)\rho + \alpha\beta - b\big)/(\alpha\beta\rho),$$
$$x_3^* = (1-\alpha)\left(1 - \frac{\alpha\rho}{\alpha\beta - b}\right)x_4^*, \qquad x_4^* = \frac{\alpha\beta - b}{\alpha\rho(1-\alpha)(\beta-\rho) + b\,(\alpha\beta - b)} \tag{14}$$

Управление в стационарной точке вычисляется по формуле:

$$u^* = b/(\alpha\beta) \tag{15}$$

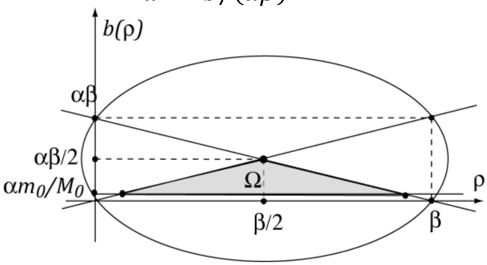

Рисунок 1: Область существования стационарной точки

Замечание. Стационарный режим управления лежит в области D_2 переменного управления, если выполнено неравенство $u^* \le \bar{u} < 1$.

Аппроксимирующее управление

Для построения аппроксимирующего управления мы исходим из того, что изначально запасы ресурсов ограничены величиной M_0 (2). Значит можно ожидать, что $M(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} M_0$.

Момент смены управления

Возьмем любое постоянное начальное управление $u_1 \ge 0$. Зная закон изменения потребляемых в период t ресурсов (8), найдем текущий уровень использования материалов $m_1(t, u_1)$.

Предположим, что найденная функция описывает потребление ресурсов вплоть до некоторого момента времени $T = T(u_1)$, после которого происходит смена управления на стационарный режим u^* (15), и потребление ресурсов подчиняется закону $m_2(t,u^*)$. Следовательно, текущее потребление материалов описывается функцией

$$m(t,u_1)=\begin{cases} m_0 e^{\frac{b-\beta u_1}{1-\alpha}t}, & t \le T = T(u_1) \\ m_0 e^{\frac{b-\beta u_1}{1-\alpha}T} e^{-\frac{b}{\alpha}(t-T)}, & t \ge T = T(u_1) \end{cases} \qquad (16)$$

Полученные соотношения (16) подставим в условие ограниченности ресурсов (2), откуда найдем момент времени $T=T(u_1)$ смены управления

$$T(u_1)=\begin{cases} \dfrac{1-\alpha}{b-\beta u_1}\ln\left(\dfrac{bM_0(\hat{u}-u_1)}{m_0\alpha(u^*-u_1)}\right), & \beta u_1 \ne b \\ \dfrac{M_0}{m_0}-\dfrac{\alpha}{b}, & \beta u_1 = b \end{cases} \qquad (17)$$

Замечание. Существует такой уровень управления $\hat{u}=\frac{1}{\beta}\left(b+(1-\alpha)\frac{m_0}{M_0}\right)$, что $\lim_{u_1\uparrow\hat{u}} T(u_1)=+\infty$, а при $u_1 > \hat{u}$ указанного момента времени $T(u_1)$ не существует, т.е. условие ограниченности ресурсов будет выполнено, если только начальное управление u_1 не превышает уровня $\hat{u}$.

Выбор начального управления

Начальное управление u_1 выбирается из того условия, что при достижении фазовыми траекториями $\left(x_1(t),x_2(t)\right)$ момента времени $T=T(u_1)$ (17), они оказываются на стационарном уровне (x_1^*,x_2^*).

Используя соотношения (4), (6), (9), найдем $x_i(T(u_1),u_1)=x_i(u_1), i=1,2$.

$$x_1(u_1)=\frac{b}{\alpha}\equiv x_1^*, \qquad x_2(u_1)=\frac{p_0M_0}{a\alpha}m_0^{\alpha}\left(\frac{bM_0}{\alpha m_0}\frac{\hat{u}-u_1}{u^*-u_1}\right)^{-\alpha\beta\frac{u^*-u_1}{b-u_1}}=x_2^*$$

Первое равенство выполнено при всех u_1. Таким образом, для нахождения управления u_1 используется второе соотношение.

Замечание. Численные эксперименты показывают, что то начальное управление u_1^0, которое находится из второго равенства $x_2(u_1)=x_2^*$, удовлетворяет ограничениям $0\le u_1^0<\hat{u}$.

Анализ модели при логистическом управлении

Описанная аппроксимационная схема предполагает рост объема инвестиций, направленных в увеличение продуктивности природных ресурсов, с начального уровня u_1^0 вплоть до стационарного u^*. Данное предположение неслучайно. Выполненный статистический анализ данных показывает, что в случае, когда объем инвестиций, выделяемых на увеличение продуктивности ресурсов, подчиняются логистическому закону, модельные траектории с высокой точностью предсказывают поведение реальных данных.

В качестве инвестиционной стратегии была выбрана следующая функция [9]

$$\tilde{u}(t) = \frac{u^*}{1 + \theta\, e^{-rt}}, \qquad \theta = 48.45, \qquad r = 0.07095,$$

где параметры θ и r были вычислены по статистическим данным экономики Китая. Зная закон управления, были получены соответствующие траектории модельных переменных, в частности, ВВП $y(t)$, общего объема потребленных ресурсов $M(t)$ и др. Графики полученных решений и их сравнение со статистическими данными представлены на рисунках 2 – 7.

Общий выпуск $y(t)$ достигает своего стационарного уровня $y^* = 1.0236 \cdot 10^6$ на бесконечности.

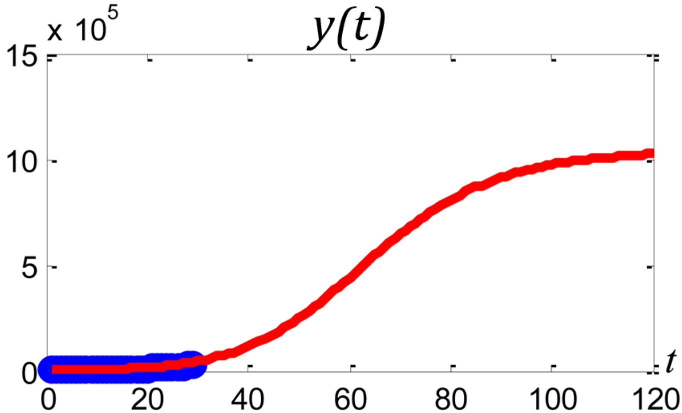

Рисунок 2. Общий выпуск, $y(t)$

Потребление материалов при логистическом управлении подчиняется закону

$$m(t) = \frac{6.8106 \cdot 10^9 e^{0.1161t}}{(e^{rt} + \theta)^{3.9986}}$$

и на бесконечности снижается до нуля.

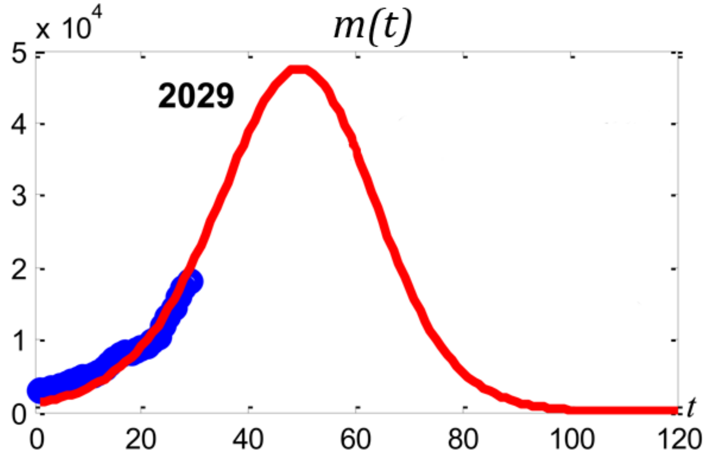

Рисунок 3. Текущее потребление материалов, $m(t)$

Общий объем $M(t)$ потребленных материалов имеет вид, представленный на рисунке 4, и на бесконечности достигает изначально заданного лимита

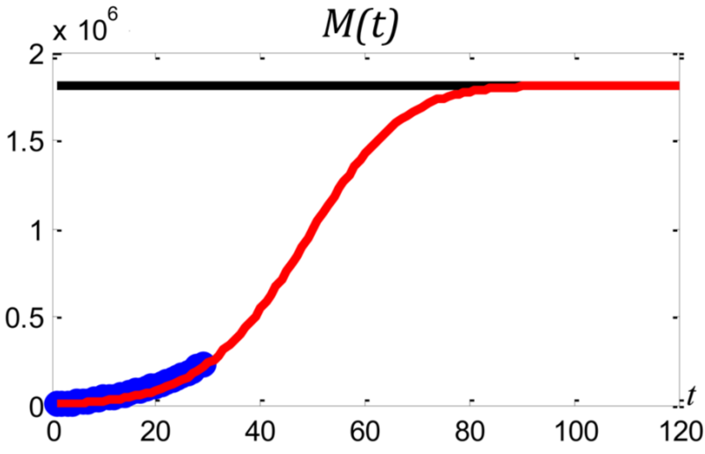

Рисунок 4. Общий объем потребленных материалов, $M(t)$

запасов природных ресурсов $M_0 = 1.8121 \cdot 10^6$.

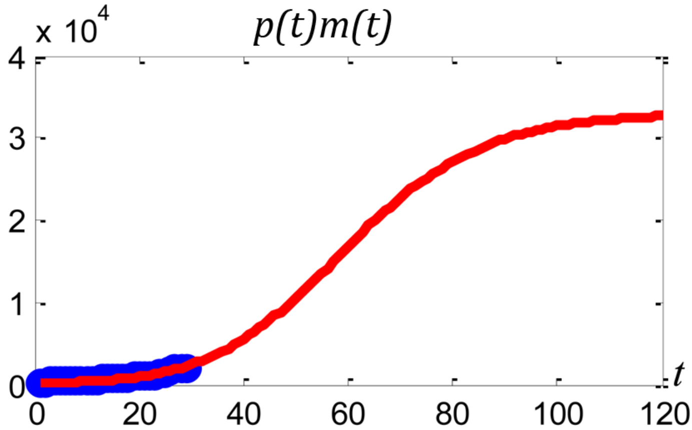

Рисунок 5. Расходы на природные ресурсы, $p(t)m(t)$

Расходы на природные ресурсы $p(t)m(t)$ при логистическом параметре управления обладают уровнем насыщения (см. рис. 5) и не превышают величины $\lim_{t\uparrow+\infty} p(t)m(t) = 3.0386 \cdot 10^4$.

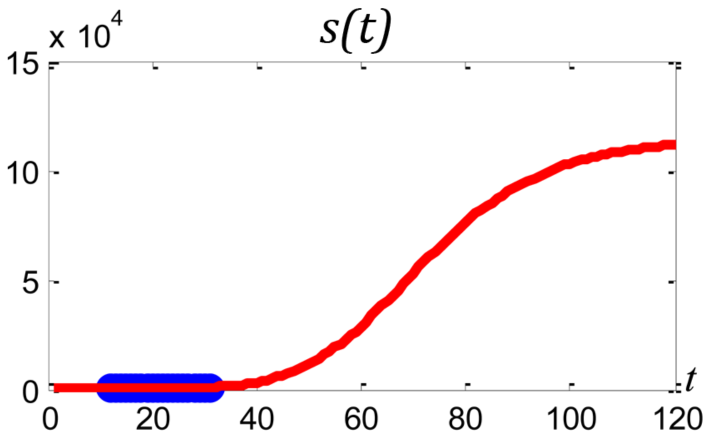

Рисунок 6. Инвестиции, направленные в увеличение продуктивности природных ресурсов, $s(t)$

Инвестиции, направленные в увеличение продуктивности природных ресурсов $s(t) = u(t)y(t)$, изображены на рисунке 6. Как видно из графика, общий объем средств, затраченных на оптимизацию потребления материалов не превышает величины $1.1273 \cdot 10^5$.

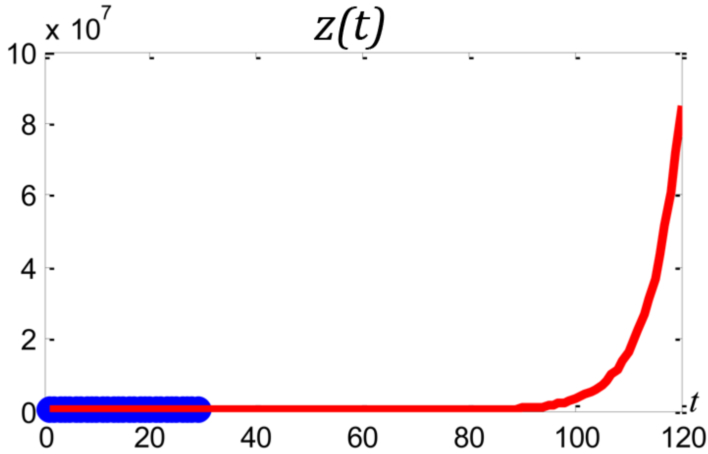

Рисунок 7. Продуктивность природных ресурсов, $z(t)$

Продуктивность природных ресурсов $z(t)$ при логистическом управлении изменяется сообразно закону $z(t) = 0.152(e^{rt} + \theta)^{2.3628}$ и обладает свойством неограниченного роста (см. рис. 7), то есть $\lim_{t\uparrow+\infty} z(t) = +\infty$.

Сравнение аппроксимирующего и стабилизированного решений

Стабилизированное решение гамильтоновой системы строится в соответствии с алгоритмом, предложенным в работе [7]. Для этого требуется, в частности, чтобы стационарная точка была седлового типа.

По данным экономики Китая эконометрическая калибровка параметров модели дает следующие результаты: $M_0 = 1.81 \cdot 10^6$, $\bar{u} = 0.12$, $\rho = 0.18$, $a = 64.34$, $b = 0.069$, $\alpha = 0.4091$, $\beta = 1.523$, $p_0 = 100$. Стационарная точка имеет координаты $x^* = (0.17, 0.03, 6.21, -2.22)$, $u^* = 0.11$. Собственные числа якобиана, вычисленного в стационарной точке, равны: $\lambda_1 = -1.832$, $\lambda_2 = -0.011$, $\lambda_3 = 0.203$, $\lambda_4 = 2.000$.

Известно [7], что вблизи установившегося состояния x^* стабилизированные траектории достаточно точно описывают поведение оптимальных решений. Этот факт позволяет оценить качество аппроксимационной схемы в окрестности стационарной точки.

Сравнивая результаты, полученные (см. рисунок 8) при помощи стабилизатора и аппроксимирующего управления, можно отметить, что в целом поведение траекторий схоже, но качество приближения не очень высокое. Поэтому в дальнейшем планируется строить аппроксимирующее управление ступенчатого вида, с большим количеством промежуточных ступеней, роль которых в данной схеме играло начальное управление u_1.

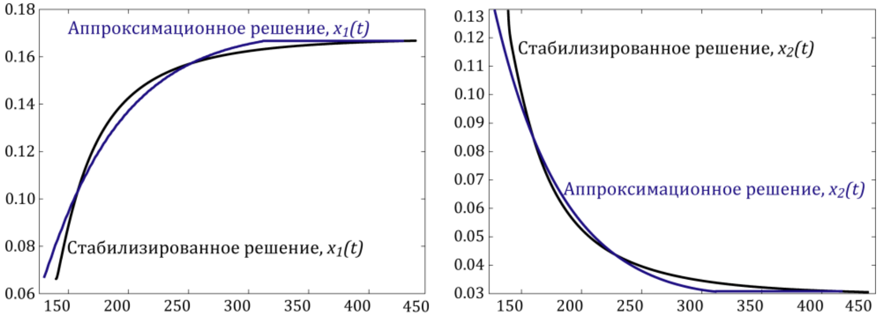

Рисунок 8: Сравнение стабилизированных (черная линия) и аппроксимирующих (синяя линия) решений.

Литература

1. Aseev, S.M., Kryazhimskiy, A.V. The Pontryagin Maximum Principle and Optimal Economic Growth Problems // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Pleiades Publishing, 2007, Vol. 257.
2. Grossman, G.M., Helpman, E. Innovation and Growth in the Global Economy. MIT. Press, Cambridge, Massachusetts, 1991.
3. Hartman, Ph. Ordinary Differential Equations. J. Wiley & Sons, NY, 1964.
4. OECD Synthesis Report: Measuring Material Flows and Resource Productivity // OECD Publishing, 2008.
5. Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V., Mishchenko, E.F. The Mathematical Theory of Optimal Processes. Interscience, NY, 1962.
6. Solow, R.M. Growth Theory: An Exposition. NY, Oxford Univ.Press, 1970.
7. Tarasyev, A. M., Usova, A.A. Stabilizing the Hamiltonian System for Constructing Optimal Trajectories // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Vol. 277, pp. 248-265, 2012.
8. Tarasyev, A., Zhu, B. Optimal Proportions in Growth Trends of Resource Productivity // Proceedings of the 15th IFAC Workshop “Control Applications of Optimization” CAO’12, 2012.
9. Tarasyev, A., Yadong Yu, Optimal Control Model of Resource Productivity for Sustainable Economic Development // Proceedings of the YSSP Late Summer Workshop 2012, p. 21. http://www.iiasa.ac.at/web/home/education/yssp/PreviousSummerYSSP/Proceedings_YSSP_Late_Summer_Workshop_2012.pdf