Евгений Фролович Мищенко
(09.03.1922–20.07.2010)

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

КОНФЕРЕНЦИЯ

“ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ”

посвященная 90-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича МИЩЕНКО

Москва, 16–17 апреля 2012 г.

Тезисы докладов

Москва 2012

УДК 517.9
ББК 22.161
К64

Ответственный редактор
кандидат физико-математических наук К. О. Бесов

Конференция “Дифференциальные уравнения и оптимальное управление”, посвященная 90-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко, Москва, 16–17 апреля 2012 г.: Тезисы докладов. — М.: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 2012. — 157 с.
ISBN 5-98419-045-1 (978-5-98419-045-9)

Организационный комитет:

Д. В. Аносов (председатель оргкомитета, МИАН),
С. М. Асеев (заместитель председателя оргкомитета, МИАН),
А. А. Аграчев (МИАН),
К. О. Бесов (МИАН),
Р. В. Гамкрелидзе (МИАН),
Н. Л. Григоренко (МГУ),
С. П. Коновалов (МИАН),
А. В. Кряжимский (МИАН),
М. С. Никольский (МИАН),
Н. Х. Розов (МГУ),
А. Г. Сергеев (МИАН)

Конференция проводится при финансовой поддержке

Российской академии наук,
программы Президиума РАН “Динамические системы и теория управления”,
Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-06014-г)

ISBN 5-98419-045-1 (978-5-98419-045-9)

©Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

Принцип Лагранжа в экстремальных задачах с ограничениями*

Е. Р. Аваков, Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров

ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
МГТУ МИРЭА, Москва, Россия
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

eramag@mail.ru, magaril@mirea.ru, vmtikh@googlemail.com

Для гладких конечномерных задач с ограничениями типа равенств Лагранж в 1797 г. предложил метод их решения (получивший название *правила множителей Лагранжа*), заключающийся в том, что решение исходной задачи должно удовлетворять необходимым условиям экстремума функции Лагранжа. Эта идея (при чуть более расширенном ее толковании) оказалась универсальной: необходимые условия экстремума в задачах математического и выпуклого программирования, вариационного исчисления и оптимального управления соответствуют единому правилу, которое авторы книги [1] назвали *принципом Лагранжа*: *решение в задаче с ограничениями удовлетворяет необходимым условиям экстремума функции Лагранжа данной задачи.*

Здесь мы формулируем одну общую теорему, утверждающую, что принцип Лагранжа верен для так называемых *гладко аппроксимативно выпуклых задач*. Эта теорема объединяет результаты о необходимых условиях экстремума для перечисленных классов задач и вскрывает истинные причины “лагранжева единства”, в основе которого лежат гладкость и (обычно скрытая) выпуклость.

Пусть X, Y_1 и Y_2 — нормированные пространства, $\mathcal{U}$ — топологическое пространство, V — открытое подмножество X, $f\colon V\times\mathcal{U}\to\mathbb{R}$, $F\colon V\times\mathcal{U}\to Y_1$, $G\colon V\to Y_2$ и Q — непустое подмножество Y_2. Рассмотрим задачу

$$f(x,u)\to\min,\qquad F(x,u)=0,\qquad G(x)\in Q. \qquad (P)$$

Допустимая пара $(\widehat{x},\widehat{u})$ называется *сильным минимумом* в задаче (P), если найдется такое $\varepsilon>0$, что для любой допустимой пары (x,u), для которой $\|x-\widehat{x}\|_X<\varepsilon$, выполняется неравенство $f(x,u)\ge f(\widehat{x},\widehat{u})$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 10-01-00188, 11-01-00529).

Мы говорим, что задача (P) гладко аппроксимативно выпукла в точке $(\widehat{x}, \widehat{u})$, если в этой точке функционал f и отображение F гладкие по переменной x и "почти выпуклые" по переменной u. Основное содержание последнего заключается в том, что замыкания образов множества $\mathcal{U}$ при отображениях $u \mapsto f(\widehat{x}, u)$ и $u \mapsto F(\widehat{x}, u)$ выпуклы. Точные определения за недостатком места не приводим.

Функция Лагранжа задачи (P) имеет вид

$$\mathcal{L}((x,u),\overline{\lambda}) = \lambda_0 f(x,u) + \langle \lambda_1, F(x,u)\rangle + \langle \lambda_2, G(x)\rangle,$$

где $\overline{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R} \times Y_1^* \times Y_2^*$ — *набор множителей Лагранжа.*

Если Q — подмножество нормированного пространства Y и $\widehat{y} \in Q$, то множество $N_Q(\widehat{y}) = \{y^* \in Y^* \mid \langle y^*, y - \widehat{y}\rangle \le 0 \ \forall\, y \in Q\}$ называется *нормальным конусом к множеству Q в точке $\widehat{y}$.*

Теорема (принцип Лагранжа для гладко аппроксимативно выпуклых задач)**.** *Пусть $(\widehat{x}, \widehat{u})$ доставляет сильный минимум в задаче (P). Тогда если X, Y_1 и Y_2 — банаховы пространства, отображения f и F гладко аппроксимативно выпуклы в точке $(\widehat{x}, \widehat{u})$, отображение G дифференцируемо в $\widehat{x}$, $\operatorname{codim} \operatorname{Im} F_x(\widehat{x}, \widehat{u}) < \infty$, множество Q выпукло, замкнуто и $\operatorname{int} Q \ne \varnothing$, то найдется такой ненулевой набор множителей Лагранжа $\overline{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}_+ \times Y_1^* \times N_Q(G(\widehat{x}))$, что выполняются условие стационарности по x:*

$$\mathcal{L}_x((\widehat{x}, \widehat{u}), \overline{\lambda}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_0 f_x(\widehat{x}, \widehat{u}) + (F_x(\widehat{x}, \widehat{u}))^* \lambda_1 + (G'(\widehat{x}))^* \lambda_2 = 0$$

и условие минимума по u:

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{L}((\widehat{x}, u), \overline{\lambda}) = \mathcal{L}((\widehat{x}, \widehat{u}), \overline{\lambda}) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda_0 f(\widehat{x}, u) + \langle \lambda_1, F(\widehat{x}, u)\rangle \ge \lambda_0 f(\widehat{x}, \widehat{u}) + \langle \lambda_1, F(\widehat{x}, \widehat{u})\rangle \quad \forall\, u \in \mathcal{U}.$$

Полученные соотношения и включение $\lambda_2 \in N_Q(G(\widehat{x}))$ находятся в соответствии с принципом Лагранжа. Действительно, первое есть необходимое условие минимума в точке $\widehat{x}$ в гладкой задаче $\mathcal{L}((x, \widehat{u}), \overline{\lambda}) \to \min$, $x \in X$; второе есть условие минимума в точке $\widehat{u}$ в аппроксимативно выпуклой задаче $\mathcal{L}((\widehat{x}, u), \overline{\lambda}) \to \min$, $u \in \mathcal{U}$. Если включение $G(x) \in Q$ переписать как $G(x) - y = 0$, $y \in Q$, то последнее слагаемое в функции Лагранжа будет иметь вид $\langle \lambda_2, G(x) - y\rangle$ и тогда включение $\lambda_2 \in$ $\in N_Q(G(\widehat{x}))$ есть условие минимума в точке $\widehat{y} = G(\widehat{x})$ в выпуклой задаче $\langle \lambda_2, G(x) - y\rangle \to \min$, $y \in Q$.

Доказательство принципа Лагранжа для задачи (P) существенным образом опирается на новую теорему об обратной функции для отображений, описывающих ограничения в данной задаче. Отметим, что здесь впервые приводится естественное, на наш взгляд, описание фазовых ограничений на абстрактном уровне, как бесконечномерное включение. Это, в частности, позволяет, варьируя Y_2, уточнять необходимые условия минимума в различных задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями.

Список литературы

1. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

О кривизне гладких задач оптимального управления

А. А. Аграчев

SISSA/ISAS, Trieste, Italy; Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

Рассматривается стандартная задача оптимального управления с интегральным функционалом на гладком многообразии M, на отрезке времени фиксированной длины $t > 0$ и с фиксированными концами $q_0, q_1 \in M$; при этом t, q_0, q_1 являются параметрами задачи. Пусть $c_t(q_0, q_1)$ — оптимальная цена. Далее, пусть $\gamma\colon [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$ — оптимальная траектория и $\psi_\tau \in T^*_{\gamma(\tau)}M$, $|\tau| \le \varepsilon$, — соответствующая ей понтрягинская экстремаль. Предположим, что максимизированный гамильтониан задачи $h(p, q)$, $p \in T^*_q M$, $q \in M$, гладкий в окрестности точки ψ_0 и что ψ_t, $|t| \le \varepsilon$, — единственная экстремаль, дающая оптимальное решение с данными краевыми условиями. В таком случае функции $q \mapsto c_t(\gamma(-t), q)$ и $q \mapsto c_t(q, \gamma(t))$ гладкие в некоторой окрестности точки $\gamma(0)$ при $t \ne 0$.

Положим $\phi_t(q) = \frac{1}{2}\bigl(c_t(\gamma(-t), q) + c_t(q, \gamma(t))\bigr)$. Легко видеть, что функция ϕ_t достигает минимума в точке $\gamma(0)$. В частности, $d_{\gamma(0)}\phi_t = 0$ и $d^2_{\gamma(0)}\phi_t$ — корректно определенная квадратичная форма на $T_{\gamma(0)}M$.

Обозначим через Δ_0 образ линейного самосопряженного отображения $d^2_{\psi_0}\big(h|_{T^*_{\gamma(0)}M}\big)\colon T^*_{\gamma(0)}M \to T_{\gamma(0)}M$ и через $G\colon \Delta_0 \to T^*_{\gamma(0)}M$ какое-нибудь правое обратное к этому линейному отображению. Легко видеть, что квадратичная форма $\delta^2_{\psi_0}h\colon v \mapsto \langle Gv, v\rangle$, $v \in \Delta_0$, не зависит от выбора правого обратного G.

Оказывается, семейство квадратичных форм $td^2_{\gamma(0)}\phi_t\big|_{\Delta_0}$, $|t| < \varepsilon$, гладко зависит от t и представляется в виде

$$td^2_{\gamma(0)}\phi_t\big|_{\Delta_0} = \delta^2_{\psi_0}h + t^2 Q_{\psi_0} + O(t^4), \qquad t \to 0.$$

Квадратичная форма $-3Q_{\psi_0}$ называется кривизной задачи оптимального управления в точке ψ_0. Эта кривизна есть далекое обобщение секционной кривизны римановой геометрии и, подобно последней, в определенной степени отражает характер оптимального синтеза. Коэффициенты квадратичной формы Q_{ψ_0} суть рациональные функции от частных производных гамильтониана и в принципе могут быть вычислены без решения дифференциальных уравнений.

В докладе будет описана конструкция кривизны и будут приведены некоторые примеры.

Аналог метода погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла в случае, когда невозмущенное уравнение имеет полюс целого порядка в регулярной особой точке

К. Алымкулов

Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан

keldibay@mail.ru

Обычно сингулярно возмущенные уравнения делятся на два класса. В первый класс можно отнести сингулярно возмущенные уравнения с малым параметром при старшей производной. Ко второму классу относятся сингулярно возмущенные уравнения типа Лайтхилла, т.е. соответствующие невозмущенные уравнения (при нулевом значении малого параметра) имеют особые точки на рассматриваемом отрезке. Однако

такое деление является условным, так как иногда в некоторой области изменения независимой переменной первый класс может переходить ко второму классу. Например, сингулярно возмущенное уравнение Ван дер Поля первого типа в окрестности точки срыва переходит ко второму классу.

Сингулярно возмущенные уравнения второго класса впервые начал изучать Лайтхилл [1]. Методом униформизации в работе [2] было получено параметрическое представление решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой. В работах [3, 4] асимптотика решения этого уравнения была получена методом структурного сращивания.

Метод погранфункций для сингулярно возмущенных уравнений с малым параметром при старшей производной был разработан Вишиком, Люстерником, Васильевой, Иманалиевым [5–9].

Здесь доказана возможность применения метода, который аналогичен методу погранфункций для построения равномерной асимптотики решения модельного уравнения Лайтхилла, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет полюс целого порядка в особой точке.

Рассмотрим задачу Коши для модельного уравнения Лайтхилла [1]:

$$(x + \varepsilon u(x))u'(x) = q(x)u(x) + r(x), \qquad u(1) = u^0, \tag{1}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, u^0 — заданная постоянная, $x \in [0,1]$, $u'(x) = du/dx$. На известные функции накладывается следующее условие

U: $q(x), r(x) \in C^{(\infty)}[0,1]$, $q_0 = -m$, $b = u^0 - u_0(1) > 0$, где

$$u_0(1) = \int_0^1 s^{m-1} q(s) \exp\left\{\int_0^1 \frac{m + q(s)}{s}\, ds\right\} ds.$$

Отметим, что случай $q_0 = -1$ рассмотрен в [10].

Теорема. *Если выполнено условие* U, *то существует единственное решение задачи* (1) *и его асимптотическое разложение представимо в виде*

$$u(x) = \mu^{-m}\pi_{-m}(t) + \mu^{-m+1}\pi_{-m+1}(t) + \ldots + \mu^{-1}\pi_{-1}(t) + \\ + \sum_{k=0}^{\infty}(\pi_k(t) + u_k(x))\mu^k, \tag{2}$$

где $t = x/\mu$, $\varepsilon = \mu^{m+1}$, $u_k(x) \in C^\infty[0,1]$, $\pi_\nu(t) \in C^\infty[0,\mu_0]$, $\mu_0 = 1/\mu$, $\pi_{-m}(\mu_0) = \mu^m(b - \mu u_1(1) - \mu^2 u_2(1) - \ldots)$, $\pi_{-m+k}(\mu_0) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Список литературы

1. *Lighthill M.G.* A technique for rendering approximate solution to physical problems uniformly valid // Phil. Mag. 1949. V. 40. P. 1179–1201.
2. *Алымкулов К.* Возмущенные дифференциальные уравнения с особыми точками и некоторые проблемы бифуркационных задач. Бишкек: Илим, 1992.
3. *Алымкулов К., Жээнтаева Ж.К.* Метод структурного сращивания решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой // ДАН. 2004. Т. 398, №6. С. 727–730.
4. *Алымкулов К., Жээнтаева Ж.К.* Метод структурного сращивания для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой // Мат. заметки. 2006. Т. 79, №5. С. 643–652.
5. *Иманалиев М.И.* Асимптотические методы в теории интегро-дифференциальных систем. Бишкек: Илим, 1972.
6. *Треногин В.А.* Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника–Вишика // УМН. 1970. Т. 25, №4. С. 123–156.
7. *O'Malley R.E.* Singular perturbation methods for ordinary differential equations. Springer, 1991.
8. *Wasow W.* Asymptotic expansions for ordinary differential equations. New York: Dover Publ., 1987.
9. *Vasil'eva A.B., Butuzov V.F., Kalachev L.V.* The boundary function method for singular perturbed problem. SIAM (Cambridje Univ. Press), 1987.
10. *Алымкулов К., Халматов А.А.* Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой // Мат. заметки. 2012. В печати.

Накрывающие отображения и их приложения в теории дифференциальных уравнений*

А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

arutun@orc.ru, s-e-zhuk@yandex.ru

Пусть (X,ρ_X), (Y,ρ_Y) — метрические пространства, $M\subseteq X$, $N\subseteq Y$, даны число $\alpha>0$ и отображения $\Psi,\Phi\colon X\to Y$. Всюду далее замкнутый шар с центром в точке $x\in X$ радиуса $r\ge 0$ в пространстве X будем обозначать через $B_X(x,r)$.

Определение 1. Отображение Ψ называется *α-накрывающим*, если

$$B(\Psi(x_0),\alpha r)\subseteq \Psi(B_X(x_0,r)) \qquad \forall r\ge 0,\quad x_0\in X.$$

Отображение Ψ называется *α-накрывающим относительно множеств M и N*, если

$$B_X(x_0,r)\subseteq M \quad\Rightarrow\quad B(\Psi(x_0),\alpha r)\cup N\subseteq \Psi(B_X(x_0,r)).$$

В [1] получены следующие достаточные условия существования точек совпадения отображений в терминах накрывающих отображений.

Теорема 1. *Пусть пространство X полно, отображение Ψ является α-накрывающим и непрерывным, а Φ — липшицевым с константой $\beta<\alpha$. Тогда*

$$\forall\, x_0\in X\quad \exists\,\xi\in X\colon\quad \Psi(\xi)=\Phi(\xi)\quad \text{и}\quad \rho_X(x_0,\xi)\le\frac{\rho_Y(\Psi(x_0),\Phi(x_0))}{\alpha-\beta}.$$

В [1] приведенная теорема была обобщена на многозначные отображения, а в [2] была построена соответствующая локальная теория.

Традиционно накрывающие отображения использовались для получения необходимых условий минимума в экстремальных задачах. Однако теорию накрывающих отображений можно использовать и для исследования дифференциальных уравнений. Проиллюстрируем возможности этой теории на примере задачи о локальной разрешимости обыкновенного дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной неизвестной функции.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-01-00427, 12-01-00506).

Пусть заданы $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0, u_0 \in \mathbb{R}^n$, $\delta, R, M > 0$, функция $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. Предположим, что f удовлетворяет условиям Каратеодори: $f(\cdot, x, u)$ измерима на $[t_0, t_0+\delta]$ для любых $x \in B_{\mathbb{R}^n}(x_0,\delta)$, $u \in B_{\mathbb{R}^n}(u_0, R)$; $f(t,\cdot,\cdot)$ непрерывна на $B_{\mathbb{R}^n}(x_0,\delta) \times B_{\mathbb{R}^n}(u_0,R)$ для п.в. $t \in [t_0, t_0+\delta)$; $|f(t,x,u)| \le M$ для п.в. $t \in [t_0, t_0+\delta)$, для любых $x \in B_{\mathbb{R}^n}(x_0,\delta)$, $u \in \in B_{\mathbb{R}^n}(u_0,R)$.

Рассмотрим задачу Коши

$$f(t, x, \dot{x}) = 0, \qquad x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

Решение ищется в классе абсолютно непрерывных функций.

Теорема 2. *Предположим, что*

- *существует* $\alpha > 0$ *такое, что для п.в.* $t \in [t_0, t_0+\delta]$ *и любых* $x \in B_{\mathbb{R}^n}(x_0,\delta)$ *отображение* $f(t,x,\cdot)$ *является* α*-накрывающим относительно* $B_{\mathbb{R}^n}(u_0,R)$, $B_{\mathbb{R}^k}(f(t,x,u_0),\alpha R)$;
- *существует* $L > 0$ *такое, что для п.в.* $t \in [t_0, t_0+\delta]$ *и любых* $u \in B_{\mathbb{R}^n}(u_0,R)$ *отображение* $f(t,\cdot,u)$ *является* L*-липшицевым на* $B_{\mathbb{R}^n}(x_0,\delta)$;
- *выполнено неравенство* $\operatorname{vrai\,sup}_{t\in[t_0,t_0+\delta]} |f(t,x_0,u_0)| < \alpha R$.

Тогда существует $\tau > 0$ *такое, что задача* (1) *разрешима на* $[t_0, t_0+\tau]$.

В общем случае эта теорема была получена в [3], где изучались также вопросы глобальной разрешимости задачи Коши и другие близкие вопросы. Доказательство теоремы 2 основано на теореме 1 из [3], являющейся модификацией теоремы 1 о точках совпадения.

Список литературы

1. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // ДАН. 2007. Т. 416, №2. С. 151–155.
2. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Point Theory Appl. 2009. V. 5, N 1. P. 105–127.
3. *Арутюнов А.В., Аваков Е.Р., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Диф. уравнения. 2009. Т. 45, №5. С. 613–634.

Принцип максимума Понтрягина для “обгоняющего” оптимального управления*

С. М. Асеев, В. М. Вельев

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия; International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria

Vienna University of Technology, Vienna, Austria

`aseev@mi.ras.ru, veliov@tuwien.ac.at`

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления (P):

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-\rho t} g(t, x(t), u(t))\,dt \to \max,$$
$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \qquad u(t) \in U,$$
$$x(0) = x_0.$$

Здесь $x_0 \in G$, где G — непустое выпуклое открытое множество из R^n, U — произвольное непустое множество из R^n и $\rho \in R^1$.

(A1) Функции $f\colon [0,\infty) \times G \times U \to R^n$, $g\colon [0,\infty) \times G \times U \to R^1$, $f_x\colon [0,\infty) \times G \times U \to R^{n\times n}$ и $g_x\colon [0,\infty) \times G \times U \to R^n$ непрерывны по (x,u) на $G \times U$ при п.в. $t \in [0,\infty)$ и измеримы и локально ограничены по t равномерно по (x,u) на любом ограниченном множестве $Z \subset G \times U$.

(A2) Существуют такие постоянные $\mu \ge 0$, $r \ge 0$, $\kappa \ge 0$, $\beta > 0$ и $c_1 \ge 0$, что для любого $t \ge 0$ имеем

  (i) $\|x_*(t)\| \le c_1 e^{\mu t}$;

  (ii) для любого такого допустимого управления $u(\cdot)$, что мера $\operatorname{meas}\{t \ge 0\colon u(t) \ne u_*(t)\} \le \beta$, соответствующая $u(\cdot)$ допустимая траектория $x(\cdot)$ продолжима на весь бесконечный интервал $[0,\infty)$ в G и, кроме того,

$$\|g_x(t, y, u_*(t))\| \le \kappa(1 + \|y\|^r) \qquad \text{для любого} \quad y \in \operatorname{conv}\{x(t), x_*(t)\}.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 10-01-91004-АНФ-а, 11-01-12112-офи-м).

(A3) Существуют такие постоянные $\lambda \in R^1$, $\gamma > 0$ и $c_2 \geq 0$, что для любого такого вектора $\zeta \in G$, что $\|\zeta - x_0\| < \gamma$, решение $x(\zeta;\cdot)$ задачи Коши $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_*(t))$, $x(0) = \zeta$ определено в G на $[0,\infty)$ и

$$x(\zeta;t) - x_*(t)\| \leq c_2 \|\zeta - x_0\|\, e^{\lambda t}.$$

(A4) Выполняется неравенство $\rho > \lambda + r \max\{\lambda, \mu\}$.

Определение. Допустимое управление $u_*(\cdot)$ называется *локально слабо обгоняющим в задаче* (P) (см. [4, Sect. 1.5]), если соответствующая $u_*(\cdot)$ траектория $x_*(\cdot)$ определена в G на $[0,\infty)$ и существует такое $\delta > 0$, что для любого допустимого управления $u(\cdot)$, удовлетворяющего условию $\operatorname{meas}\{t \geq 0 \colon u(t) \neq u_*(t)\} \leq \delta$, и для любых $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ существует такое $T' \geq T$, что либо соответствующая $u(\cdot)$ траектория $x(\cdot)$ непродолжима в G на интервал $[0, T']$, либо

$$\int_0^{T'} e^{-\rho t} g(t, x_*(t), u_*(t))\, dt \geq \int_0^{T'} e^{-\rho t} g(t, x(t), u(t))\, dt - \varepsilon.$$

Функцию Гамильтона–Понтрягина $H \colon [0,\infty) \times G \times U \times R^n \to R^1$ в нормальной форме определим стандартным образом:

$$H(t,x,u,\psi) = \langle f(t,x,u), \psi \rangle + e^{-\rho t} g(t,x,u),$$
$$t \in [0,\infty), \quad x \in G, \quad u \in U, \quad \psi \in R^n.$$

Теорема. *Пусть выполняются условия* (A1)–(A4), $u_*(\cdot)$ — *локально слабо обгоняющее управление в* (P), *а* $x_*(\cdot)$ — *соответствующая* $u_*(\cdot)$ *допустимая траектория. Тогда*

(i) *для любого* $t \geq 0$ *интеграл*

$$I_*(t) = \int_t^{\infty} e^{-\rho s} [Z_*(s)]^{-1} g_x(s, x_*(s), u_*(s))\, ds$$

сходится абсолютно, где $Z_*(t)$, $t \geq 0$, — *нормированная фундаментальная матрица линейной системы* $\dot{z}(t) = -[f_x(t, x_*(t), u_*(t))]^* z(t)$;

(ii) *функция* $\psi(t) = Z_*(t) I_*(t)$, $t \geq 0$, *локально абсолютно непрерывна на* $[0,\infty)$ *и удовлетворяет вместе с допустимой парой* $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ *основным соотношениям принципа максимума Понтрягина в нормальной форме, т.е.* $\psi(\cdot)$ — *решение сопряженной системы*

$$\dot{\psi}(t) \overset{\text{п.в.}}{=} -H_x(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t))$$

и выполняется условие максимума

$$H(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)) \overset{\text{п.в.}}{=} \sup_{u \in U} H(t, x_*(t), u, \psi(t)).$$

Основное отличие сформулированного результата от варианта принципа максимума Понтрягина [2] для задачи (P), полученного в [1] при аналогичном (A4) условии доминирования дисконтирующего множителя, состоит в том, что здесь интегральный функционал полезности, вообще говоря, может расходиться к ∞. Доказательство данного результата см. в [3].

Список литературы

1. *Асеев С.М., Кряжимский А.В.* Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста. М.: Наука, 2007. (Тр. МИАН; Т. 257).
2. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
3. *Aseev S.M., Veliov V.M.* Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems with dominating discount // Dyn. Contin. Discrete Impulsive Syst. B: Appl. Algorithms. 2012. V. 19. P. 43–63.
4. *Carlson D.A., Haurie A.B., Leizarowitz A.* Infinite horizon optimal control: Deterministic and stochastic systems. Berlin: Springer, 1991.

Принцип максимума Понтрягина для задач оптимального экономического роста с некомпактным множеством допустимых управлений*

К. О. Бесов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

kbesov@mi.ras.ru

Рассматривается следующая задача оптимального управления (P):

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \qquad u(t) \in U, \tag{1}$$

$$x(0) = x_0,$$

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-\rho t} g(x(t), u(t))\, dt \to \max. \tag{2}$$

Здесь $x_0, x(t) \in \mathbb{R}^n$; U — непустое ограниченное множество из $\mathbb{R}^m$, открытое в своем замыкании; $\rho \geq 0$ — параметр дисконтирования. Предполагается, что $x_0 \in G$, где G — заданное открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Вектор-функция $f\colon G \times U \to \mathbb{R}^n$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ предполагаются равномерно непрерывными на любом множестве вида $\Pi \times U$, где Π — компактное подмножество G. Скалярная функция $g\colon G \times U \to \mathbb{R}^1$ и ее частная производная $\frac{\partial g}{\partial x}$ предполагаются непрерывными на множестве $G \times U$.

Интеграл в (2) понимается как несобственный. Класс допустимых управлений для системы (1) состоит из всех измеримых (по Лебегу) вектор-функций $u\colon [0, \infty) \to U$.

Наряду с системой (1) будем также рассматривать систему

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \qquad u(t) \in \overline{U}, \qquad x(0) = x_0, \tag{3}$$

где функция $f(\cdot, \cdot)$ доопределена в точках $(x, u) \in G \times (\overline{U} \setminus U)$ по непрерывности. Будем называть (3) *расширенной системой.*

Будем считать выполненными следующие условия.

- Все допустимые траектории $x(\cdot)$ расширенной системы (3) имеют интервал $[0, \infty)$ своим максимальным интервалом существования.
- Для любого $x \in G$ множество
$$Q(x) = \{(z^0, z) \in \mathbb{R}^{n+1}\colon\ z^0 \leq g(x, u),\ z = f(x, u),\ u \in U\}$$
является выпуклым.
- Существует такая положительная функция $\omega(\cdot)$ на $[0, \infty)$, что $\omega(t) \to +0$ при $t \to \infty$ и для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$
$$\int_T^{T'} e^{-\rho t} g(x(t), u(t))\, dt \leq \omega(T), \qquad 0 \leq T \leq T'.$$
- $g(x, u) \to -\infty$, как только $G \times U \ni (x, u) \to (\bar{x}, \bar{u}) \in G \times (\overline{U} \setminus U)$.
- Существует непрерывная функция $c\colon G \to \mathbb{R}_+$ такая, что
$$\left\| \frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \right\| \leq c(x)(|g(x, u)| + 1), \qquad (x, u) \in G \times U.$$

При выполнении указанных условий для задачи (P) получен вариант принципа максимума Понтрягина, аналогичный соответствующим теоремам в [1, 2] (в которых U — компакт) и усиливающий их.

Типичными примерами задач вида (P) служат задачи, в которых функция мгновенной полезности g содержит, например, член $\ln u^0$ (в качестве слагаемого или более сложным образом) и при этом $u = (u^0, \tilde{u}) \in U = (0, a] \times \widetilde{U}$, $a > 0$, $\widetilde{U} \subset \mathbb{R}^{m-1}$.

Ряд содержательных экономических задач, приводящих к постановкам вида (P), разобран в [1–4]. Отметим, что к этим задачам вариант принципа максимума из [1, 2] напрямую неприменим — его применение требует дополнительных приемов и построений (в частности, компактификации задачи), каждый раз разных.

Список литературы

1. *Асеев С.М., Кряжимский А.В.* Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста. М.: Наука, 2007. (Тр. МИАН; Т. 257).
2. *Асеев С.М., Бесов К.О., Кряжимский А.В.* Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике // УМН. 2012. Т. 67, №2. С. 3–64.
3. *Aseev S., Besov K., Ollus S.-E., Palokangas T.* Optimal growth in a two-sector economy facing an expected random shock // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, №2. С. 271–299.
4. *Aseev S., Besov K., Kaniovski S.* Optimal endogenous growth with exhaustible resources: Interim Report IR-10-011, IIASA, Laxenburg (Austria), 2010.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ.

Об устойчивости в существенно нелинейных гамильтоновых системах с двумя степенями свободы*

Ю. Н. Бибиков

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия

Bibicoff@yandex.ru

Рассматривается вопрос об устойчивости положения равновесия в начале координат вещественно аналитической гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Предполагается, что гамильтониан представляет собой малое возмущение гамильтониана с неквадратичной правой частью. Такие гамильтонианы возникают при исследовании консервативных возмущений осцилляторов с нелинейными восстанавливающими силами нечетных степеней $2m-1$ и $2n-1$ соответственно.

Теорема 1. *Если n отлично от m, то положение равновесия устойчиво по Ляпунову.*

Теорема 2. *Если $n=m$, то положение равновесия устойчиво для начальных значений, не принадлежащих поверхности уровня гамильтониана, содержащей положения равновесия.*

Редукция системы на эту поверхность показывает, что положение равновесия устойчиво в случае общего положения.

Случаи, когда хотя бы одно из чисел m или n равно 1, изучены в работах В.И. Арнольда, Ю. Мозера (см. [1]) и А.Г. Сокольского [2].

Список литературы

1. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
2. *Сокольский А.Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка // ПММ. 1977. Т. 41, №1. С. 24–33.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00734-а).

Теория управления, слабо диссипативная теория Колмогорова–Арнольда–Мозера и смежные проблемы

Р. И. Богданов, М. Р. Богданов

НИИЯФ МГУ, Москва, Россия
МГУИЭ, Москва, Россия

bogdanov@bogdan.sinp.msu.ru

Теория оптимального управления, которой Е.Ф. Мищенко отдал много сил (см. [4, 5]), оформилась в самостоятельную область математики во второй половине XX столетия, предоставив альтернативу задачам вариационного исчисления. Одним из примеров полезности альтернативы является утверждение о реализации динамики, определяемой векторным полем в конечномерном фазовом пространстве, в классе гамильтоновых систем с повышением размерности (примерно вдвое) фазового пространства. Следовательно, механические системы, состоящие из взаимодействующих материальных тел, с ростом их числа передают сложность динамики общих динамических систем в более низких размерностях. Возрастание сложности динамики с ростом размерности фазового пространства проявляется на топологическом уровне в связи с появлением странных аттракторов в случае общего положения, что впервые показано Д.В. Аносовым в случае гамильтоновых систем (см. [1]).

Возникновение сложных структур, содержащих наряду со странным аттрактором асимптотически (не)устойчивые орбиты в большом количестве (~ 1000), показало численное исследование примеров слабо диссипативной версии теории Колмогорова–Арнольда–Мозера (см. [3]). Пример, рассматриваемый в [3], включен ($\theta=0$) в семейство вида

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \theta y_n + [1-\theta] y_{n+1}, \\ y_{n+1} = y_n + k(x_n - 1)x_n + (\varepsilon + \mu x_n) y_n, \end{cases} \tag{1}$$

где θ меняется в окрестности отрезка $[0,1]$ на вещественной прямой, $k \in [0.2, 4.0]$, а ε и μ — малые параметры.

Система (1) является дискретизацией системы в непрерывном времени (после подходящей ренормализации)

$$\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} + f(x)\dot{x}, \tag{2}$$

где $U(x) = x^2/2 - x^3/3$, $f(x) = \tilde{\varepsilon} + \tilde{\mu}x$, а ε и μ — малые вещественные параметры.

Дискретизация является простейшей схемой Эйлера 1-го порядка; при $\theta = 1$ — явной, при $\theta = 0$ — полуявной (изучена в [3]), при $\theta \in (0,1)$ — схемой предикатор–корректор. В ряде задач математической физики допустимы значения вне отрезка $[0,1]$, в его подходящей окрестности. Исследования системы (1) интересно выполнять в окрестности D прямоугольника $(x,\dot{x}) \in [-0.5,1] \times [-0.5,0.5]$. Для контроля вычислений полезна

Лемма. *Отображение* (1) *обратимо в указанной выше области D для параметров k, ε и μ, изменяющихся в пределах, указанных выше. При этом обратное к* (1) *отображение в области D дробно-рациональное при $\theta = 0$, а при $\theta \neq 0$ определено на подходящем листе двулистного накрытия над областью D.*

Оказывается, при шевелении θ от нуля на несколько процентов (мы обнаружили значения $\sim 2 \div 4\%$) периодические орбиты исчезают и остается единственное состояние равновесия $x = \dot{x} = 0$.

Гипотеза. *В пространстве параметров ε, μ, θ существует аналог "языка Арнольда"* (см. [2]) *у точки $\varepsilon = \mu = 0$, $\theta = 1$, вне которого единственная асимптотическая* (*не*)*устойчивая периодическая орбита совпадает с неподвижной точкой отображения* (2) $x = \dot{x} = 0$.

Система (2) привлекала при определенных модификациях внимание многих исследователей, начиная от Ланжевена, который рассматривал $U = \lambda x^2$ и вместо $f(x)\dot{x}$ стохастический аддитивный добавок. Исследования с дискретизацией во времени продолжили Ито, Стратанович, Н.Н. Боголюбов, а также модификация другого вида известна как уравнение Ван дер Поля и соответственно теория релаксационных колебаний, которой занимался Е.Ф. Мищенко с коллегами [1]. Перечисление указанных выше проблем показывает, что исследования в этом направлении актуальны и сегодня. Актуальность вырастает в связи с тем фактом, что периодические орбиты дают оценку числа частиц в соответствующих механических приложениях порядка $10^7 \div 10^{14}$, что отвечает ряду задач в области нанотехнологий.

Список литературы

1. *Аносов Д.В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. М.: Наука, 1967. (Тр. МИАН; Т. 90).
2. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

3. *Богданов Р.И.* Фазовые портреты динамических систем на плоскости и их инварианты. М.: Вузовская книга, 2008.
4. *Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Розов Н.Х., Колесов А.Ю.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2010.
5. *Мищенко Е.Ф., Понтрягин Л.С.* Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным // ДАН СССР. 1955. Т. 102, №5. С. 889–891.

Задача минимизации энергозатрат в модели биологической очистки сточных вод

Н. В. Бондаренко, Э. В. Григорьева, Е. Н. Хайлов

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
Техасский женский университет, Дентон, США
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

nataliabonda@mail.ru, egrigorieva@mail.twu.edu,
khailov@cs.msu.su

На заданном отрезке времени $[0,T]$ рассматривается модель процесса биологической очистки сточных вод, описывающаяся системой дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t)y(t)z(t) + u(t)(m - x(t)), \quad x(0) = x_0 \in (0,m), \\ \dot{y}(t) = -x(t)y(t)z(t), \quad y(0) = y_0 > 0, \\ \dot{z}(t) = x(t)y(t)z(t) - bz(t), \quad z(0) = z_0 > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t)$ — концентрация кислорода, $y(t)$ — концентрация загрязнений, $z(t)$ — концентрация биомассы, $u(t)$ — скорость аэрации и одновременно управляющая функция. Множеством допустимых управлений $D(T)$ являются всевозможные измеримые по Лебегу функции $u(t)$, которые при почти всех $t \in [0,T]$ удовлетворяют неравенствам $0 \leq u(t) \leq u_{\max}$.

Можно показать, что при произвольном управлении $u(\cdot) \in D(T)$ соответствующие решения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ системы (1) определены на всем отрезке $[0,T]$ и удовлетворяют неравенствам

$$0 < x(t) < m, \quad 0 < y(t) < y_0, \quad 0 < z(t) < z_0 e^{my_0T}, \quad t \in (0,T].$$

Для системы (1) рассматривается задача

$$J(u) = 0.5 \int_0^T u^2(t)\,dt \to \min_{u(\cdot)\in D(T)} \tag{2}$$

при наличии ограничения

$$y(T) \le y_1, \tag{3}$$

где y_1 — заданная величина, $y_1 < y_0$. Функционал (2) имеет смысл суммарных энергозатрат в рассматриваемом процессе.

Пусть $x^0(t)$, $y^0(t)$, $z^0(t)$ — решения системы (1), отвечающие управлению $u_0(t) = 0$, $t \in [0, T]$. В случае $y^0(T) \le y_1$ эти функции образуют оптимальное решение исследуемой задачи. Далее рассматривается случай $y^0(T) > y_1$. Предполагается, что определены управление $\widehat{u}(\cdot) \in D(T)$ и соответствующие ему решения $\widehat{x}(t)$, $\widehat{y}(t)$, $\widehat{z}(t)$ системы (1), для которых $\widehat{y}(T) \le y_1$. Тогда в задаче (1)–(3) существуют оптимальное управление $u_*(t)$ и отвечающие ему оптимальные решения $x_*(t)$, $y_*(t)$, $z_*(t)$ системы (1), подчиненные ограничению (3). Для их анализа используется принцип максимума Понтрягина. Согласно ему существуют величина $\lambda \ge 0$ и решения $\psi(t)$, $\phi(t)$, $\chi(t)$ преобразованной сопряженной системы

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = y_*(t)z_*(t)\big(m(m - x_*(t))^{-1}\psi(t) + (m - x_*(t))\phi(t)\big), \\ \dot{\phi}(t) = x_*(t)(z_*(t) - y_*(t))\big((m - x_*(t))^{-1}\psi(t) + \phi(t)\big) + b\chi(t), \\ \dot{\chi}(t) = -x_*(t)y_*(t)\big((m - x_*(t))^{-1}\psi(t) + \phi(t)\big) + b\chi(t), \\ \psi(T) = 0, \quad \phi(T) = -1, \quad \chi(T) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

для которых при всех $t \in [0, T]$ справедливо условие максимума

$$-0.5\lambda u_*^2(t) + \psi(t)u_*(t) = \max_{v\in[0,u_{\max}]}\big(-0.5\lambda v^2 + \psi(t)v\big), \tag{5}$$

и выполняется условие дополняющей нежесткости

$$y_*(T) = y_1. \tag{6}$$

При $\lambda = 0$ анализ системы (4) и соотношения (5) приводит к следующему виду оптимального управления:

$$u_*(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le t \le \theta_*, \\ u_{\max}, & \text{если } \theta_* < t \le T, \end{cases} \tag{7}$$

где $\theta_* \in (0, T)$ — момент переключения, при котором имеет место равенство (6).

При $\lambda > 0$ из соотношения (5) определяется непрерывное управление

$$u_*(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda^{-1}\psi(t) < 0, \\ \lambda^{-1}\psi(t), & \text{если } 0 \le \lambda^{-1}\psi(t) \le u_{\max}, \\ u_{\max}, & \text{если } \lambda^{-1}\psi(t) > u_{\max}. \end{cases}$$

Анализ этого выражения и системы (4) приводит к следующему виду оптимального управления:

$$u_*(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le t \le \theta_1^*, \\ \lambda^{-1}\psi(t), & \text{если } \theta_1^* < t \le \theta_2^*, \\ u_{\max}, & \text{если } \theta_2^* < t \le \theta_3^*, \\ \lambda^{-1}\psi(t), & \text{если } \theta_3^* < t \le T, \end{cases} \tag{8}$$

где $\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^* \in [0, T)$ — моменты переключения, при которых справедливо ограничение (6).

Для приближенного решения исследуемой задачи разработан численный алгоритм, который после соответствующих вычислений сравнивает значения функционала (2), найденные для управлений, заданных формулами (7) и (8). Приводятся результаты численных расчетов.

Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущенных задачах с кратным корнем вырожденного уравнения*

В. Ф. Бутузов

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon^2 u'' = f(u, x, \varepsilon), \qquad 0 < x < 1; \qquad u'(0, \varepsilon) = u'(1, \varepsilon) = 0. \tag{1}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $f(u, x, \varepsilon)$ — достаточно гладкая функция. При $\varepsilon = 0$ из (1) получается вырожденное уравнение

$$f(u, x, 0) = 0. \tag{2}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00319).

Известно [1], что если уравнение (2) имеет простой корень $u = \varphi(x)$ и $f_u(\varphi(x), x, 0) > 0$ на отрезке $[0, 1]$, то для достаточно малых ε существует решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (1), имеющее асимптотическое представление

$$u(x,\varepsilon) = \varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i \bigl(\overline{u}_i(x) + Q_i(\xi) + \widetilde{Q}_i(\widetilde{\xi})\bigr) + o(\varepsilon^n), \tag{3}$$

где $\xi = x/\varepsilon$ и $\widetilde{\xi} = (1-x)/\varepsilon$ — погранслойные переменные, $Q_i(\xi)$ и $\widetilde{Q}_i(\widetilde{\xi})$ — пограничные функции, имеющие экспоненциальные оценки вида $|Q_i(\xi)| \le c \exp(-\varkappa\xi)$.

Если вместо условий Неймана заданы условия Дирихле $u(0,\varepsilon) = u^0$, $u(1,\varepsilon) = u^1$, то при некоторых требованиях к u^0 и u^1 задача Дирихле также имеет решение с асимптотикой вида (3), причем пограничные функции начинаются теперь с номера $i = 0$ и имеют экспоненциальные оценки.

Обратимся к случаю, когда уравнение (2) имеет двукратный корень.

A1. Пусть функция $f(u, x, \varepsilon)$ имеет вид

$$f(u,x,\varepsilon) = h(u,x)\bigl(u - \varphi(x)\bigr)^2 - \varepsilon f_1(u,x,\varepsilon)$$

и $\overline{h}(x) := h(\varphi(x), x) > 0$ на $[0, 1]$.

При условии A1 корень $u = \varphi(x)$ уравнения (2) является двукратным и, как оказывается, важную роль играет теперь функция $\overline{f}_1(x) := f_1(\varphi(x), x, 0)$. Рассмотрим два случая, которые связаны соответственно со следующими условиями.

A2. $\overline{f}_1(x) > 0$ на отрезке $[0, 1]$.

A2′. $f_1(u, x, 0) = g(u, x)(u - \varphi(x))$, причем $\overline{g}(x) := g(\varphi(x), x) > 0$ на отрезке $[0, 1]$.

В этом случае $\overline{f}_1(x) \equiv 0$ на $[0, 1]$.

Если выполнены условия A1, A2, то регулярная часть асимптотики решения задачи (1) является рядом по степеням $\varepsilon^{1/2}$ (а не по степеням ε):

$$\varphi(x) + \varepsilon^{1/2}\overline{u}_1(x) + \varepsilon\overline{u}_2(x) + \dots,$$

причем $\overline{u}_1(x) = [\bar{h}^{-1}(x)\overline{f}_1(x)]^{1/2}$. Погранслойные переменные имеют теперь другой масштаб: $\xi = x/\varepsilon^{3/4}$, $\widetilde{\xi} = (1-x)/\varepsilon^{3/4}$, левый погранслойный ряд имеет вид

$$\varepsilon^{3/4}\bigl[Q_0(\xi) + \varepsilon^{1/4}Q_1(\xi) + \varepsilon^{1/2}Q_2(\xi) + \dots\bigr],$$

причем функции $Q_i(\xi)$ определяются как решения простых линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Все Q-функции имеют экспоненциальные оценки. Правый погранслойный ряд строится аналогично.

Теорема 1. *Если выполнены условия* A1, A2, *то для достаточно малых ε задача* (1) *имеет решение $u(x,\varepsilon)$ с асимптотическим разложением*

$$u(x,\varepsilon) = \varphi(x) + \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon^{i/2}\overline{u}_i(x) + \varepsilon^{3/4} \sum_{i=0}^{4n-3} \varepsilon^{i/4}\bigl[Q_i(\xi) + Q_i(\widetilde{\xi})\bigr] + o(\varepsilon^n).$$

Если выполнены условия A1, A2′, то регулярная часть асимптотики решения задачи (1) оказывается рядом по целым степеням ε, а пограничные слои имеют более сложный характер. Левый погранслойный ряд имеет вид

$$\varepsilon^{2/3}\bigl[Q_0(\xi,\varepsilon) + \varepsilon^{1/3}Q_1(\xi,\varepsilon) + \varepsilon^{2/3}Q_2(\xi,\varepsilon) + \dots\bigr], \qquad \xi = \frac{x}{\varepsilon^{2/3}}.$$

Функция $Q_0(\xi,\varepsilon)$ является решением задачи

$$\frac{d^2Q_0}{d\xi^2} = h(0)(Q_0^2 + \varepsilon^{1/3}aQ_0), \quad \xi > 0; \qquad \frac{dQ_0}{d\xi}(0) = -\varphi'(0), \quad Q_0(\infty) = 0,$$

где $a > 0$ — известное число. Решение находится в явном виде, и его анализ показывает, что при $0 \le \xi \le c\varepsilon^{-\gamma}$ (γ — любое число из интервала $(0, 1/6)$) функция $Q_0(\xi,\varepsilon)$ убывает степенным образом, как $O((1+\xi)^{-2})$, а при $\xi \ge c\varepsilon^{-1/6}$ функция $Q_0(\xi,\varepsilon)$ имеет экспоненциальную оценку $|Q_0(\xi,\varepsilon)| \le c_0\varepsilon^{1/3}\exp(-kx/\sqrt{\varepsilon})$. Функции $Q_i(\xi,\varepsilon)$ обладают такими же свойствами. Таким образом, возникают две зоны пограничного слоя с различным поведением пограничных функций в этих зонах. Аналогично строится правый погранслойный ряд. Для задачи (1) имеет место теорема, аналогичная теореме 1.

Для задачи Дирихле в случаях A2, A2′ пограничные слои также имеют две зоны, аналогичные описанным выше, причем масштабы погранслойных переменных отличаются от масштабов в задаче Неймана. Для каждого случая справедливы теоремы типа теоремы 1. Доказательства теорем проводятся с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств.

Список литературы

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.

Об одном численном методе построения множеств достижимости нелинейных управляемых систем

Е. В. Винников

МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия

evinnikov@gmail.com

В теории оптимального управления важную роль играют множества достижимости (МД) управляемой системы $X(T) = \bigcup_{u(\cdot)} x(T, u(\cdot))$ с множеством допустимых управлений P из класса измеримых по Лебегу функций и с множеством фазовых ограничений F:

$$\begin{gathered} \dot{x} = f(t, x, u), \qquad u \in P \subset \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, T], \\ x(0) \in X_0 \subset \mathbb{R}^n, \qquad x(t) \in F. \end{gathered} \tag{1}$$

Одним из универсальных численных методов построения МД нелинейных управляемых систем является метод пикселей [1–3], основанный на введении разбиения фазового пространства на n-мерные кубы и дискретизации по времени с использованием численных методов решения дифференциальных уравнений. Данный метод позволяет строить множества достижимости, управляемости и интегральные воронки для нелинейных управляемых систем, описываемых системой дифференциальных уравнений с управляемыми параметрами, как с фазовыми ограничениями, так и без них.

Для аппроксимации МД исследуются две схемы численного построения МД, основанные на схеме Эйлера и Рунге–Кутта второго порядка аппроксимации. При выполнении условий, гарантирующих существование и единственность решения задачи Коши (1), получены оценки для расстояния Хаусдорфа между истинным МД $X(T)$ и его дискретной аппроксимацией $\tilde{X}(T, X_0)$ для каждой из схем.

В среде `Matlab` разработана программа `PixelSet` для построения множеств достижимости, управляемости и интегральных воронок для задачи (1) с фазовыми ограничениями и ограничениями на управление в виде неравенств, содержащая библиотеку из более чем 60 задач. Разработанная программа позволяет строить МД двумерных и трехмерных управляемых систем. В программе реализована эффективная фильтрация граничных точек, которая позволяет сократить время построения границы МД при выполнении условия попадания на границу МД в каждый момент времени только из граничной точки МД в предыдущий момент времени.

Список литературы

1. *Никольский М.С.* Об аппроксимации множества достижимости для управляемого процесса // Мат. заметки. 1987. Т. 41, №1. С. 71–76.
2. *Гусейнов Х.Г., Моисеев А.Н., Ушаков В.Н.* Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем // ПММ. 1998. Т. 62, №2. С. 179–187.
3. *Винников Е.В.* Численное построение множества достижимости нелинейных управляемых систем // Обозр. прикл. и промышл. математики. 2009. Т. 16, №5. С. 824–825.

О разрешимости в квадратурах фуксовых систем некоторого типа

И. В. Вьюгин, Р. Р. Гонцов

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия

vyugin@gmail.com, rgontsov@inbox.ru

Рассмотрим на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ *фуксову систему* из p линейных дифференциальных уравнений с особыми точками $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, т.е. систему вида

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{z - a_i} \right) y, \tag{1}$$

где $y(z)$ — вектор в $\mathbb{C}^p$, $B_1, \ldots, B_n$ — комплексные $(p \times p)$-матрицы. Говорят, что она *разрешима в квадратурах*, если любое решение содержится в некотором расширении F поля $\mathbb{C}(z)$ рациональных функций, полученном при помощи присоединения экспонент и интегралов:

$$\mathbb{C}(z) = F_1 \subseteq \ldots \subseteq F_m = F,$$

где поле $F_{i+1} = F_i \langle x_i \rangle$ получается присоединением к полю F_i элемента x_i, являющегося экспонентой или интегралом некоторого элемента поля F_i.

Необходимым и достаточным условием разрешимости в квадратурах фуксовой системы (1) является разрешимость ее группы монодромии, т.е. группы, порожденной матрицами монодромии $G_1, \dots, G_n$ в особых точках $a_1, \dots, a_n$ (см. [1, гл. 6, теорема 1.12]). В случае, когда коэффициенты B_i фуксовой системы (1) малы, Ю.С. Ильяшенко и А.Г. Хованский [2] получили явный критерий разрешимости такой системы. А именно, справедливо следующее утверждение.

Существует $\varepsilon = \varepsilon(n,p) > 0$ *такое, что условие разрешимости в квадратурах для фуксовой системы* (1) *с* $\|B_i\| < \varepsilon$ *принимает явный вид*: *система решается в квадратурах, если и только если все матрицы* B_i (*в некотором базисе*) *треугольны.*

Заметим, что в доказательстве данного утверждения авторы использовали соображения И.А. Лаппо-Данилевского [3], относящиеся к проблеме Римана–Гильберта с матрицами монодромии, близкими к единичной. В книге [1, с. 221] А.Г. Хованский указывает на предположение А.А. Болибруха о том, что в условии критерия разрешимости требование малости матриц B_i можно ослабить. *Достаточно лишь требовать, чтобы были малы собственные числа этих матриц.* В данной работе мы уточняем формулировку этого предположения. А именно, имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Пусть собственные значения* β_i^j *матриц-вычетов* B_i *фуксовой системы* (1) *удовлетворяют условию*

$$\operatorname{Re}\beta_i^j > -\frac{1}{n(p-1)}, \qquad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, p,$$

а также для каждой пары $\beta_i^j \neq \beta_i^k$ *собственных значений матрицы* B_i $(i = 1, \dots, n)$ *выполнено одно из двух условий*:

1) $\operatorname{Re}\beta_i^j - \operatorname{Re}\beta_i^k \notin \mathbb{Q}$;

2) $\operatorname{Im}\beta_i^j \neq \operatorname{Im}\beta_i^k$.

Тогда разрешимость фуксовой системы (1) *в квадратурах эквивалентна треугольности* (*в некотором базисе*) *всех матриц* B_i.

Доказательство данной теоремы основано на несколько ином подходе, нежели в [2]. Мы используем геометрическую интерпретацию (подробно изложенную в книге А.А. Болибруха [4]), согласно которой фуксовой системе (1) соответствует голоморфно тривиальное векторное расслоение ранга p над сферой Римана, снабженное логарифмической (фуксовой)

связностью. Это позволяет (помимо замены малости матриц B_i малостью их собственных значений β_i^j) сформулировать требования малости в виде явных неравенств. Заметим также, что хотя в условии теоремы требуется только ограниченность снизу действительных частей чисел β_i^j, их ограниченность сверху при этом следует из классического соотношения Фукса $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \beta_i^j = 0$.

Список литературы

1. *Хованский А.Г.* Топологическая теория Галуа. Разрешимость и неразрешимость уравнений в конечном виде. М.: МЦНМО, 2008.
2. *Ильяшенко Ю.С., Хованский А.Г.* Теория Галуа систем дифференциальных уравнений типа Фукса с малыми коэффициентами: Препринт. ИПМ АН СССР, 1974. №117.
3. *Лаппо-Данилевский И.А.* Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Техтеорлит, 1957.
4. *Болибрух А.А.* Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: МЦНМО, 2009.

Инвариантное представление принципа максимума*

Р. В. Гамкрелидзе

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

gam@ipsun.ras.ru

1. В докладе обсуждается специфическое свойство принципа максимума — его универсальная гамильтонова форма, канонически присущая принципу независимо от того, регулярна рассматриваемая задача или сколь угодно вырождена, например линейна.

2. Как следствие этого обстоятельства, принцип максимума допускает инвариантно-геометрическую формулировку, хотя в первоначальном виде он имел чисто аналитический характер. Соответствующая

*Работа выполнена при финансовой поддержке по проекту “Геометрическая теория управления” программы Президиума РАН “Математическая теория управления”.

геометрия (первого порядка) оказывается простейшей инфинитезимальной геометрией конфигурационного пространства задачи, непосредственно сгенерированной рассматриваемой оптимальной задачей.

3. В докладе дана инвариантная формулировка принципа максимума в первом порядке. Она опубликована вместе с соответствующими результатами второго порядка в моей совместной с А.А. Аграчевым работе [1].

Список литературы

1. *Аграчев А.А., Гамкрелидзе Р.В.* Геометрия принципа максимума // Тр. МИАН. 2011. Т. 273. С. 5–27.

Линии переключения оптимального управления в дифференциальной игре с двумя догоняющими и одним убегающим*

С. А. Ганебный, С. С. Кумков, В. С. Пацко

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

patsko@imm.uran.ru

С. Ле Менек

EADS/MBDA, Paris, France

stephane.le-menec@mbda-systems.com

Рассматривается модельная дифференциальная игра с двумя догоняющими и одним убегающим, в которой все три объекта передвигаются по одной прямой. Динамика преследователей P_1 и P_2 описывается соотношениями

$$\begin{aligned} &\ddot z_{P_1} = a_{P_1}, && \ddot z_{P_2} = a_{P_2}, \\ &\dot a_{P_1} = (u_1 - a_{P_1})/l_{P_1}, && \dot a_{P_2} = (u_2 - a_{P_2})/l_{P_2}, \\ &|u_1| \leqslant \mu_1, \quad a_{P_1}(t_0) = 0, && |u_2| \leqslant \mu_2, \quad a_{P_2}(t_0) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 10-01-96006, 11-01-12088).

Здесь z_{P_1} и z_{P_2} — геометрические координаты преследователей, a_{P_1} и a_{P_2} — их ускорения, вызываемые управлениями u_1 и u_2. Постоянные времени l_{P_1} и l_{P_2} определяют инерционность отработки управляющих воздействий.

Динамика убегающего E описывается аналогичными соотношениями:

$$\begin{aligned} &\ddot z_E = a_E, && \dot a_E = (v - a_E)/l_E, \\ &|v| \leqslant \nu, && a_E(t_0) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Зафиксируем два момента T_1 и T_2. В момент T_1 подсчитывается промах первого преследователя относительно убегающего, а в момент T_2 — промах второго преследователя:

$$r_{P_1,E}(T_1) = |z_E(T_1) - z_{P_1,E}(T_1)|, \quad r_{P_2,E}(T_2) = |z_E(T_2) - z_{P_2,E}(T_2)|. \tag{3}$$

Предположим, что преследователи действуют координированно. Это означает, что мы можем объединить их в одного игрока, который распоряжается векторным управлением $u = (u_1, u_2)^{\mathrm{T}}$. Назовем его *первым игроком*, а убегающего E *вторым игроком*. Результирующий промах подсчитывается в виде

$$\varphi = \min\{r_{P_1,E}(T_1), r_{P_2,E}(T_2)\}. \tag{4}$$

В любой текущий момент времени оба игрока точно знают фазовые координаты z_{P_1}, $\dot z_{P_1}$, a_{P_1}, z_{P_2}, $\dot z_{P_2}$, a_{P_2}, z_E, $\dot z_E$, a_E. Первый игрок, строя свое управление по принципу обратной связи, минимизирует промах φ, второй игрок максимизирует его.

Таким образом, мы рассматриваем игру (1)–(3) как стандартную антагонистическую дифференциальную игру [1]. Ее также можно отнести к специальному виду антагонистических дифференциальных игр — играм группового преследования [2–5].

Описанная модельная дифференциальная игра возникает [6, 7] при исследовании проблемы преследования двумя слабо маневрирующими объектами третьего в горизонтальной плоскости в предположении, что скорости номинальных движений весьма велики и разумно подсчитывать индивидуальные промахи каждого из преследователей в соответствующий момент номинальной встречи.

Основная цель доклада — показать, как на основе предварительного построения множеств уровня функции цены можно построить зависящие от текущего момента времени линии переключения первого игрока для управлений u_1, u_2 и линии переключения управления v второго игрока, определяющие оптимальные способы управления по принципу обратной связи. Строгие доказательства пока проделаны только для случая "сильных" преследователей. Обсуждаются трудности, возникающие при анализе оптимальных способов поведения в других случаях. Приводятся результаты численного моделирования.

Список литературы

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. *Петросян Л.А.* Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.
3. *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.
4. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992.
5. *Благодатских А.И., Петров Н.Н.* Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Удмуртский ун-т, 2009.
6. *Shinar J., Shima T.* Non-orthodox guidance law development approach for the interception of maneuvering anti-surface missiles // J. Guid. Control Dyn. 2002. V. 25, N 4. P. 658–666.
7. *Le Ménec S.* Linear differential game with two pursuers and one evader // Advances in dynamic games: Theory, applications, and numerical methods for differential and stochastic games / Ed. by M. Breton, K. Szajowski. Boston: Birkhäuser, 2011. P. 209–226. (Ann. Int. Soc. Dyn. Games; V. 11).

О четырехугольных орбитах в плоских бильярдах

А. Глуцюк

Лаборатория Понселе Независимого московского университета, Москва, Россия

Гипотеза В.Я. Иврия (1980) утверждает, что во всяком бильярде в евклидовом пространстве с кусочно бесконечно гладкой границей множество периодических орбит (или периодических начальных условий) имеет меру нуль. Эта гипотеза тесно связана с гипотезой Г. Вейля из спектральной теории оператора Лапласа. Частные случаи гипотезы Иврия были доказаны для треугольных орбит многими авторами, в

первую очередь М. Рыхликом (1989, в размерности 2) и Я.Б. Воробцом (1991, в любой размерности). Частный случай для четырехугольных орбит в размерности 2 доказан в совместной работе Ю. Кудряшова и докладчика.

В докладе будет рассказано о частных результатах исследования двумерной комплексно-алгебраической версии гипотезы Иврия для отражений относительно плоских проективных комплексных алгебраических кривых. В частности, оказывается, что в этом контексте уже в случае четырехугольных орбит гипотеза Иврия неверна. Однако в этом случае удается описать контрпримеры. Нетривиальные контрпримеры суть бильярды, образованные парами конфокальных коник.

Метод большого параметра в задачах с запаздыванием из нейродинамики

С. Д. Глызин

ЯрГУ им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

glyzin@uniyar.ac.ru

Рассматривается дифференциально-разностное уравнение вида

$$\dot{u} = \lambda\bigl[-1 + f_{\mathrm{K}}(u(t-1)) - f_{\mathrm{Na}}(u)\bigr]u, \tag{1}$$

моделирующее электрическую активность нервной клетки (см. [1]). Здесь $u(t)$ — мембранный потенциал, функции $f_{\mathrm{K}}(u)$ и $f_{\mathrm{Na}}(u)$ отвечают за проводимости калиевых и натриевых ионных каналов, единицей измерения времени выбрано запаздывание в калиевом канале, $0 < h < 1$ — запаздывание в натриевом канале. Предполагается, что параметр λ, пропорциональный скорости протекания процессов в клетке, велик. Введем обозначения $f_{\mathrm{K}}(u) = \alpha f(u)$, $f_{\mathrm{Na}}(u) = \beta g(u)$ и относительно функций $f(u), g(u) \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R}\colon u \geq 0\}$, будем предполагать, что $f(0) = g(0) = 1$, $0 < \beta g(u) + 1 < \alpha\ \forall u \in \mathbb{R}_+$; $f(u), g(u), uf'(u), ug'(u) = O(1/u)$ при $u \to +\infty$.

Наряду с парциальной моделью (1) будем рассматривать систему

$$\dot{u}_j = d(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \lambda\bigl[-1 + \alpha f(u_j(t-1)) - \beta g(u_j)\bigr]u_j, \quad j = \overline{1,m}, \tag{2}$$

которая описывает поведение цепочки ($u_{m+1} = u_m$, $u_0 = u_1$) идентичных электрически связанных нервных клеток.

Исследование уравнения (1) и системы (2) связано с переносом на уравнения с запаздыванием известных асимптотических методов Л.С. Понтрягина и Е.Ф. Мищенко [2, 3]. К настоящему времени проведена целая серия исследований (см. [4–6]) в этом направлении.

В процессе применения метода большого параметра основной проблемой является выбор подходящего предельного объекта, достаточно сложного для того, чтобы иметь относительно богатую динамику, и вместе с тем относительно простого и доступного для анализа. Другой важной задачей является обоснование того, что при достаточно больших значениях параметра λ некоторые решения уравнения (1) или системы (2) в каком-то смысле близки к соответствующим решениям предельной задачи. С помощью замен $u = \exp(-x/\varepsilon)$, $\varepsilon = 1/\lambda$ уравнение (1) сводится к соотношению $\dot{x} = -1 + \alpha f(\exp(x(t-1)/\varepsilon)) - \beta g(\exp(x/\varepsilon))$, которое в пределе при $\varepsilon \to 0$ дает релейное уравнение вида

$$\dot{x} = -1 + \alpha R(x(t-1)) - \beta R(x), \qquad \text{где} \quad R(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Для уравнения (3) удается найти устойчивый периодический режим и при достаточно малых ε обосновать его C^1-близость орбитально асимптотически устойчивому циклу исходной системы.

Рассмотрим теперь систему (2) и перейдем в ней к новым переменным $x, y_1, \ldots, y_{N-1}$, где $u_1 = \exp(x/\varepsilon)$, $u_j = \exp\big(x/\varepsilon + \sum_{k=1}^{j-1} y_k\big)$, $j = \overline{2, m}$.

В этом случае (2) сводится к релаксационной системе

$$\dot{x} = \varepsilon d(\exp y_1 - 1) - 1 + \alpha f\big(\exp\big(x(t-1)/\varepsilon\big)\big) - \beta g\big(\exp\big(x/\varepsilon\big)\big),$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_j &= d\big(\exp(y_{j+1}) + \exp(-y_j) - \exp(y_j) - \exp(y_{j-1})\big) + \\ &+ \frac{\alpha}{\varepsilon}\left[f\left(\exp\left(\frac{x(t-1)}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j} y_k(t-1)\right)\right) - f\left(\exp\left(\frac{x(t-1)}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} y_k(t-1)\right)\right)\right] + \\ &\quad + \frac{\beta}{\varepsilon}\left[g\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} y_k\right)\right) - g\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j} y_k\right)\right)\right], \qquad j = \overline{1, m-1}. \end{aligned}$$

Полученная система при $\varepsilon \to 0$ сводится к задаче

$$\dot{y}_j = d\big[\exp y_{j+1} + \exp(-y_j) - \exp y_j - \exp(-y_{j-1})\big] \tag{4}$$

с импульсным воздействием

$$\begin{gathered} y_j(+0) = \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1}\, y_j(-0), \\ y_j(1+0) = y_j(1-0) - \frac{\alpha}{\alpha - 1}\, y_j(+0), \\ y_j(\alpha+0) = (1+\beta) y_j(\alpha - 0), \\ y_j(\alpha+1+0) = y_j(\alpha+1-0) - \frac{\alpha}{1+\beta}\, y_j(\alpha+0), \\ j = \overline{1, m-1}, \qquad y_0 = y_m = 0 \end{gathered}$$

и начальными условиями $(y_1, \ldots, y_{m-1})|_{t=-\sigma_0} = (z_1, \ldots, z_{m-1})$.

Рассмотрим отображение $z \to \Phi(z) \stackrel{\text{def}}{=} (y_1^0(t,z), \ldots, y_{m-1}^0(t,z))|_{t=T_0-\sigma_0}$, действующее из $\mathbb{R}^{m-1}$ в $\mathbb{R}^{m-1}$, где T_0 — период цикла уравнения (3). Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Любой неподвижной точке $z = z_*$ отображения $\Phi(z)$, экспоненциально устойчивой или дихотомичной, при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ соответствует релаксационный цикл с теми же свойствами устойчивости.*

Список литературы

1. *Кащенко С.А., Майоров В.В.* Модели волновой памяти. М.: Либроком, 2009.
2. *Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975.
3. *Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Физматлит, 1995.
4. *Колесов Ю.С., Колесов А.Ю.* Релаксационные колебания в математических моделях экологии. М.: Наука, 1993. (Тр. МИАН; Т. 199).
5. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Экстремальная динамика обобщенного уравнения Хатчинсона // ЖВМиМФ. 2009. Т. 49, №1. С. 76–89.
6. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Релаксационные автоколебания в нейронных системах. I // Диф. уравнения. 2011. Т. 47, №7. С. 919–932.

Фуксова редукция и нелинейные волны*

В. А. Голубева, Д. В. Артамонов

Московский авиационный институт, Москва, Россия
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Метод фуксовой редукции заключается в приведении уравнений к фуксову виду. Это позволяет применить для исследования уравнений, записанных теперь в фуксовом виде, существующие мощные методы аналитической теории дифференциальных уравнений.

Один из первых примеров фуксовой редукции принадлежит одному из авторов — В.А. Голубевой, которая получила фуксовы уравнения для фейнмановских интегралов [2].

В последнее время метод фуксовой редукции получил многочисленные приложения в астрономии, общей теории относительности, дифференциальной геометрии [1].

В докладе пойдет речь о применении методов фуксовой редукции к гиперболическим уравнениям, в частности к нелинейным волнам, солитонам.

Метод фуксовой редукции позволит получать разложения решений уравнений.

Список литературы

1. *Kichenassamy S.* Fuchsian reduction. Birkhäuser, 2007.
2. *Голубева В.А.* Некоторые вопросы аналитической теории фейнмановских интегралов // УМН. 1976. Т. 36, №2. С. 135–202.

*Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Президента РФ (проекты НШ-8508.2010.1, МК-4270.2011.1).

Класс решений ОДУ, охватываемых плоской степенной геометрией*

И. В. Горючкина

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН;
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

igoryuchkina@gmail.com

У обыкновенного дифференциального уравнения

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

где функция $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ — это многочлен своих переменных, ищутся решения при $x \to 0$ $(\omega = -1)$ и при $x \to \infty$ $(\omega = 1)$.

Определим порядок p_ω функции $\varphi(x)$ формулами

$$p_\omega = \limsup_{x^\omega \to \infty} \frac{\ln|\varphi(x)|}{\omega \ln|x|}, \tag{2}$$

где $\arg x = \mathrm{const} \in [0, 2\pi)$.

Пусть при $|x|^\omega \to \infty$, $\arg x \in [0, 2\pi)$ уравнение (1) имеет формальное решение

$$y = c_r(x)x^r + \sum_{s \in \mathbb{K}} c_s(x)x^s, \tag{3}$$

где показатели степени $r, s \in \mathbb{R}$, $\omega r > \omega s$, ωs убывают, коэффициенты $c_r(x)$ и $c_s(x)$ — это либо константы, либо функции, обладающие свойствами $p_\pm(c_r(x)) = p_\pm(c_s(x)) = 0$, $p_\pm(c_r^{(l)}(x)) = p_\pm(c_s^{(l)}(x)) = -l$, $l \le n$.

Запишем уравнение (1) в виде

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} a_i(x, y) = 0, \tag{4}$$

где $a_i(x, y)$ — дифференциальные мономы, т.е. произведения обычных мономов $bx^{q_1}y^{q_2}$ и конечного числа производных $d^l y/dx^l$ [1].

В плоской степенной геометрии [1] каждому дифференциальному моному $a_i(x, y)$ ставится в соответствие его векторный показатель степени

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00023).

$Q_i = Q(a_i) = (q_1, q_2)$ по правилам

$$Q(bx^{q_1}y^{q_2}) = (q_1, q_2), \quad Q(d^l y/dx^l) = (-l, 1), \quad Q(a_1 a_2) = Q(a_1) + Q(a_2). \tag{5}$$

Множество показателей степени всех дифференциальных мономов уравнения (4) называется носителем уравнения $\mathbf{S}(f) = \{Q_i,\ i = 1, \ldots, m\}$. Он изображается на плоскости (q_1, q_2). Выпуклая оболочка $\Gamma(f)$ носителя $\mathbf{S}(f)$ называется многоугольником уравнения (4). Его граница $\partial\Gamma$ состоит из ребер $\Gamma_k^{(1)}$ и вершин $\Gamma_k^{(0)}$. Каждой обобщенной грани $\Gamma_k^{(d)}$ ставятся в соответствие укороченное уравнение

$$\hat{f}_k^{(d)}(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum a_i(x, y) = 0, \qquad Q(a_i) \in \Gamma_k^{(d)}, \tag{6}$$

и нормальный конус $U_k^{(d)}$ — множество внешних нормалей к $\Gamma_k^{(d)}$. Для ребра $\Gamma_k^{(1)}$ нормальный конус $U_k^{(1)}$ — это луч $U_k^{(1)} = \{\lambda N_k,\ \lambda \in \mathbb{R}_+\}$, где N_k — это внешняя нормаль к ребру. Для вершины $\Gamma_k^{(0)}$ нормальный конус $U_k^{(0)}$ — это угол $U_k^{(0)} = \{\lambda N_k + \mu N_{k-1},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+\}$, где N_k и N_{k-1} — это внешние нормали примыкающих к вершине ребер.

Теорема. *Если уравнение* (1) *имеет решение* (3) *с* $\omega(1, r) \in U_k^{(d)}$, *то укороченное уравнение* (6) *имеет решение* $y = c_r(x)x^r$.

Вид (3) имеют следующие типы разложений: 1) степенные и степенно-логарифмические; 2) экзотические; 3) сложные. Для шестого уравнения Пенлеве такие разложения найдены в [2].

Трехмерная степенная геометрия [3, 4] позволяет находить решения другого класса.

Список литературы

1. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН. 2004. Т. 59, № 3. С. 31–80.
2. *Брюно А.Д., Горючкина И.В.* Асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве // Тр. Моск. мат. о-ва. 2010. Т. 71. С. 6–118.
3. *Bruno A.D.* Space power geometry for an ODE and Painlevé equations // Painlevé equations and related topics: Proc. Int. Conf. Euler International Mathematical Institute, St. Petersburg, June 17–23, 2011. P. 36–41.
4. *Брюно А.Д.* Степенно-эллиптические разложения решений ОДУ: Препринт. Ин-т прикл. мат. им. М.В. Келдыша РАН, 2011. № 60.

Игровая задача управления с заданными моментами окончания*

Н. Л. Григоренко

МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия

grigor@cs.msu.su

Рассматривается игра двух преследователей и одного убегающего, в которой преследователи обладают динамическим превосходством над убегающим. Заданы два фиксированных момента времени. Игра оканчивается, если либо в первый момент времени первый преследователь ловит убегающего, либо во второй момент времени второй преследователь ловит убегающего. Изучается ситуация, когда начальные позиции игры таковы, что ни один из преследователей, действуя в одиночку, в заданные моменты времени поймать убегающего не может. Предложены достаточные условия на параметры игры, при которых существует решение игры преследования в заданные моменты времени. Приведены результаты расчетов модельного примера. Работа продолжает исследования [1–4].

Постановка задачи. Пусть движение конфликтно управляемых векторов $z_i \in R^{n_i}$, $i = 1, 2$, описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\dot{z}_i(t) = A_i z_i + B_i u_i(t) + C_i v(t), \qquad z_i(0) = z_i^0, \quad i = 1, 2, \quad t \in [0, T_i], \tag{1}$$

где $z_i \in R^{n_i}$, $u_i(t) \in P_i \subset R^{p_i}$, $v(t) \in Q \subset R^q$; P_i, Q — непустые компактные множества, A_i, B_i, C_i — постоянные $(n_i \times n_i)$-, $(n_i \times p_i)$-, $(n_i \times q)$-матрицы, $0 < T_1 \leq T_2$ — заданные константы. Вектор u_i находится в распоряжении i-го преследователя, вектор v находится в распоряжении убегающего. Движение начинается при $t = 0$ из начального состояния $z_0 = (z_1^0, z_2^0)$ и протекает под воздействием измеримых по Лебегу функций $u_i(t) \in P_i$, $v(t) \in Q$. В R^{n_i} выделены непустые замкнутые множества $M_i = M_i^1 + M_i^2$, которые называются терминальными. Здесь M_i^1 — линейное подпространство из R^{n_i}, которое аналитически описывается следующим образом: $M_i^1 = \{z_i \in R^{n_i} : \pi_i z_i = 0\}$, π_i — некоторая ненулевая матрица размерности $\beta \times n_i$ $(\beta \geq 1)$; M_i^2 — непустое множество

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-12112-офи-м) и программы Президиума РАН № 14 (проект 208).

из R^{n_i}, причем $\pi_i M_i^2$ — замкнутое множество в R^β. Цель догоняющих — добиться выполнения включения $z_i(T_i) \in M_i$ при некотором $i \in \{1, 2\}$. В момент первого попадания точки $z_i(T_i)$ на M_i преследование считается законченным. Убегающий стремится сделать как можно большим момент T_i первого попадания $z_i(T_i)$ на M_i или, если это возможно, обеспечить при всех $i \in \{1, 2\}$ условие $z_i(T_i) \notin M_i$.

Задача преследования с фиксированными моментами окончания. Найти начальные состояния z_i^0, $i = 1, 2$, и параметры игры (1), для которых существуют контрстратегии [4] догоняющих, обеспечивающие окончание игры преследования с фиксированными моментами окончания для произвольной измеримой по Лебегу функции $v(t) \in Q$.

Гипотеза 1. *Множества* $W_i(t) = \pi_i e^{tA_i} B_i P_i \overset{*}{-} \pi_i e^{tA_i} C_i Q$ *содержат нулевой вектор для* $t \geq 0$, $i = 1, 2$.

Обозначим через $\Gamma_i = \{\gamma_i(\cdot)\colon \gamma_i(t) \in W_i(t),\ t \geq 0\}$ совокупность борелевских селекторов многозначного отображения $W_i(t)$. Зафиксируем некоторый элемент $\gamma_i(\cdot) \in \Gamma_i$ и положим

$$\xi_i(T_i, z_i, \gamma_i(\cdot)) = \pi_i e^{A_i T_i} z_i + \int_0^{T_i} \gamma_i(\tau)\, d\tau.$$

Определим функции

$$\alpha(i, T_i, \tau, v, \gamma_i(\cdot), z_i^0) = \sup\bigl\{\alpha\colon \alpha \geq 0,\ \alpha\bigl(\pi_i M_i^2 - \xi_i(T_i, z_i, \gamma_i(\cdot))\bigr) \cap$$
$$\cap \bigl(\pi_i e^{(T_i - \tau)A_i} B_i P_i - \pi_i e^{(T_i - \tau)A_i} C_i v\bigr) \neq \varnothing\bigr\}, \quad \tau \in [0, T_i],$$

$$\delta_1(t, v(\cdot)) = 1 - \int_0^t \alpha(1, T_1, \tau, v(\tau), \gamma_1(\cdot), z_1^0)\, d\tau, \quad t \in [0, T_1],$$

и подмножества $\Omega_1(0, T_1) = \{v(s)\colon s \in [0, T_1],\ v(s) \in Q,\ \delta_1(T_1, v(\cdot) \leq 0)\}$, $\Omega_2(0, T_1) = \{v(s)\colon s \in [0, T_1],\ v(s) \in Q,\ \delta_1(T_1, v(\cdot) > 0)\}$ множества измеримых по Лебегу функций $v(s) \in Q$, $s \in [0, T_1]$.

Гипотеза 2. *Параметры* z_1^0, T_1, P, Q *игры* (1) *таковы, что существует селектор* $\gamma_1(\tau)$, $\tau \in [0, T_1]$, *такой, что* $\Omega_1(0, T_1) \neq \varnothing$.

Обозначим через $\bar{v}(s)$, $s \in [0, T_2]$, функции следующего вида:

$$\bar{v}(s) = \bigl\{v(s) \in \Omega_2(0, T_1),\ s \in [0, T_1);\ v(s) \in Q,\ s \in [T_1, T_2]\bigr\},$$

где $v(s)$, $s \in [T_1, T_2]$, — измеримая на интервале $[T_1, T_2]$ функция, принимающая значения из множества Q.

Определим функции

$$\delta_2(t, \bar{v}(\cdot)) = 1 - \int_0^t \alpha(2, T_2, \tau, \bar{v}(\tau), \gamma_2(\cdot), z_2^0)\, d\tau, \qquad t \in [0, T_2],$$
$$\beta(t, z^0) = \sup_{\bar{v}(\cdot)} \delta_2(t, \bar{v}(\cdot)).$$

Гипотеза 3. *Для позиции* z^0 *выполнено неравенство* $\beta(T_2, z^0) \leq 0$.

Теорема. *Пусть для игры* (1) *в позиции* $z^0 = (z_1^0, z_2^0)$ *существуют такие борелевские селекторы* $\gamma_i^0(\cdot) \in \Gamma_i$, $i = 1, 2$, *что выполнены гипотезы* 1–3. *Тогда для позиции* z^0 *разрешима задача преследования с фиксированными моментами окончания для игры* (1).

Список литературы

1. *Мищенко Е.Ф., Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры // ДАН СССР. 1967. Т. 174, №1. С. 27–29.
2. *Мищенко Е.Ф., Никольский М.С., Сатимов Н.Ю.* Задача уклонения от встречи в дифференциальных играх многих лиц // Тр. МИАН. 1977. Т. 143. С. 105–129.
3. *Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф.* Задача уклонения от встречи в линейных дифференциальных играх // Диф. уравнения. 1971. Т. 7, №3. С. 436–445.
4. *Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.* К теории дифференциальных игр с неполной информацией // ДАН СССР. 1974. Т. 215, №4. С. 780–783.

Энергетическая функция и связь динамики каскадов Морса–Смейла с топологией фазового пространства*

В. З. Гринес

ННГУ, Нижний Новгород, Россия

vgrines@yandex.ru

Следуя идеям А.М. Ляпунова, К. Конли ввел понятие *функции Ляпунова* для динамической системы.

Определение 1. Функцией Ляпунова для динамической системы f^t (f), заданной на многообразии M^n, называется непрерывная функция $\varphi\colon M^n \to \mathbb{R}$ такая, что

1) $\varphi(f^t(x)) < \varphi(x)$ $(\varphi(f(x)) < \varphi(x))$ для любой точки $x \notin R_{f^t}$ $(x \notin R_f)$ и любого $t > 0$;
2) φ является константой c_j на каждой цепной компоненте K_j и $c_i \neq c_j$, если $i \neq j$;
3) $\bigcup_{j\in J} c_j$ — компактное нигде не плотное подмножество $\mathbb{R}$.

К. Конли [2] в 1978 г. доказал существование непрерывной функции Ляпунова у любой динамической системы, и этот результат получил название фундаментальной теоремы динамических систем.

Определение 2. Гладкая функция Ляпунова φ называется энергетической функцией для динамической системы f^t (f), если множество критических точек функции φ совпадает с цепно рекуррентным множеством R_{f^t} (R_f).

Первые результаты по построению энергетической функции принадлежат С. Смейлу [8], который в 1961 г. доказал существование энергетической функции, являющейся функцией Морса, у *градиентно-подобного потока* (потока Морса–Смейла без замкнутых траекторий). К. Мейер [6] в 1968 г. обобщил этот результат и построил энергетическую функцию, являющуюся функцией Морса–Ботта, для потока Морса–Смейла. Первый результат для диффеоморфизмов в этом направлении принадлежит Д. Пикстону [7], который в 1977 г. установил существование

*Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства РФ (проект 11.G34.31.0039) и РФФИ (проект 11-01-12056).

энергетической функции, являющейся функцией Морса, для диффеоморфизмов Морса–Смейла на поверхностях. Кроме того, он построил диффеоморфизм на 3-сфере, не обладающий энергетической функцией, и объяснил, что этот эффект связан с диким вложением сепаратрис седловых точек.

В настоящем докладе представлены условия существования энергетической функции для произвольного диффеоморфизма Морса–Смейла трехмерного многообразия, полученные в недавнее время (см. [3, 4]). Вводится понятие динамически упорядоченной функции Морса–Ляпунова, свойства которой тесно связаны с динамикой диффеоморфизма. Показывается, что необходимые и достаточные условия существования энергетической функции с такими свойствами определяются типом вложения одномерных аттракторов (репеллеров), каждый из которых является объединением нульмерных и одномерных неустойчивых (устойчивых) многообразий периодических орбит диффеоморфизма.

Кроме того, в докладе представлены соотношения, связывающие топологию объемлющего многообразия M^3 с динамикой заданного на нем диффеоморфизма Морса–Смейла $f\colon M^3 \to M^3$ (см. [1, 5]). Эти соотношения связаны с числом $g_f = (r_f - l_f + 2)/2$, где r_f — число седловых и l_f — число узловых периодических точек диффеоморфизма f. Приводится топологическая классификация трехмерных замкнутых ориентируемых многообразий, допускающих диффеоморфизмы Морса–Смейла без гетероклинических кривых. Эти многообразия являются либо трехмерной сферой, если $g_f = 0$, либо связной суммой g_f копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Еще одно соотношение между числом g_f и топологией многообразия M^3 обнаруживается в том случае, когда диффеоморфизм f является градиентно-подобным и имеет ручно вложенные пучки одномерных сепаратрис. В этом случае объемлющее многообразие M^3 допускает разбиения Хегора рода g_f.

Список литературы

1. *Bonatti C., Grines V., Medvedev V., Pecou E.* Three-manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves // Topol. Appl. 2002. V. 117. P. 335–344.
2. *Conley C.* Isolated invariant sets and the Morse index. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1978. (CBMS Reg. Conf. Ser. Math.; No. 38).
3. *Grines V., Laudenbach F., Pochinka O.* Self-indexing function for Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds // Moscow Math. J. 2009. V. 9, N 4. P. 801–821.

4. *Гринес В.З., Лауденбах Ф., Починка О.В.* О существовании энергетической функции для диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразиях // ДАН. 2011. Т. 440, №1. С. 7–10.
5. *Гринес В.З., Жужома Е.В., Медведев В.С.* Новые соотношения для систем Морса–Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами // Мат. сб. 2003. Т. 194, №7. С. 25–56.
6. *Meyer K.R.* Energy functions for Morse–Smale systems // Amer. J. Math. 1968. V. 90. P. 1031–1040.
7. *Pixton D.* Wild unstable manifolds // Topology. 1977. V. 16, N 2. P. 167–172.
8. *Smale S.* On gradient dynamical systems // Ann. Math. 1961. V. 74. P. 199–206.

О нормальных формах типичных однопараметрических семейств медленных движений уравнений релаксационного типа*

А. А. Давыдов

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Россия

davydov@vlsu.ru

Для типичных однопараметрических семейств уравнений релаксационного типа с одной быстрой и двумя медленными переменными получены гладкие или конечно гладкие локальные орбитальные нормальные формы их медленных движений вблизи нерезонансных сложенных особых точек и точек вырождения соответствующей контактной структуры.

Список полученных нормальных форм включает, в частности, бифуркацию, которая в конструкции Б. Брюса доставляет рождение двух сложенных зонтиков Уитни [1] и гладкая орбитальная нормальная форма которой имеет вид $(dy/dx)^2 = x(\epsilon + x \pm y^2)^2$, где ϵ — параметр.

Изученные особенности встречаются и в ряде других задач [2–4].

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00960-а) и АВЦП РНПВШ.

Список литературы

1. *Davydov A.A.* Whitney umbrella and slow-motion bifurcations of relaxation-type equations // J. Math. Sci. 2005. V. 126, N 4. P. 1251–1258.
2. *Davydov A., Trinh Thi Diep L.* Reduction theorem and normal forms of linear second order mixed type PDE families in the plane // TWMS J. Pure Appl. Math. 2011. V. 2, N 1. P. 44–53.
3. *Davydov A.A., Ishikawa G., Izumiya S., Sun W.-Z.* Generic singularities of implicit systems of first order differential equations on the plane // Jpn. J. Math. 2008. V. 3, N 1. P. 93–119.
4. *Закалюкин В.М., Ремизов А.О.* Лежандровы особенности в системах неявных обыкновенных дифференциальных уравнений и быстро-медленных динамических системах // Тр. МИАН. 2008. Т. 261. С. 140–153.

Прямые методы в вариационной задаче параметрической формы с подвижными границами*

В. Ф. Демьянов, Г. Ш. Тамасян

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

vfd@ad9503.spb.edu, grigoriytamasjan@mail.ru

В работе рассматривается вариационная задача в параметрической форме с подвижными границами [1–3]. С помощью аппарата негладкого анализа [4, 5] и теории точных штрафных функций [6, 7, 5] для данной задачи получены в "новой" форме необходимые условия экстремума [5, 8]. Указанные условия лежат в основе численных алгоритмов (прямых методов), а именно методов наискорейшего и гиподифференциального спуска. Классические условия трансверсальности [1–3] естественным образом выводятся из них. Рассматриваемые алгоритмы были реализованы в математических пакетах Maple и Mathcad. Результаты численных экспериментов показали целесообразность развития предлагаемых подходов для решения вариационных задач и подтвердили эффективность используемых методов.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00360).

Список литературы

1. *Смирнов В.И., Крылов В.И., Канторович Л.В.* Вариационное исчисление. Л.: КУБУЧ, 1933.
2. *Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А.* Основы вариационного исчисления. М.; Л.: ОНТИ, 1935. Т. 1. Ч. 2.
3. *Гюнтер Н.М.* Курс вариационного исчисления. М.: Гостехиздат, 1941.
4. *Демьянов В.Ф. Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.
5. *Демьянов В.Ф.* Условия экстремума и вариационные задачи. М.: Высшая школа, 2005.
6. *Еремин И.И.* Метод "штрафов" в выпуклом программировании // ДАН СССР. 1967. Т. 143, №4. С. 748–751.
7. *Демьянов В.Ф.* Точные штрафные функции в задачах негладкой оптимизации // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1994. №4. С. 21–27.
8. *Demyanov V.F., Tamasyan G.Sh.* Exact penalty functions in isoperimetric problems // Optimization. 2011. V. 60, N 1. P. 153–177.

О некоторых сингулярно возмущенных задачах оптимального управления*

М. Г. Дмитриев, Г. А. Курина

Институт системного анализа РАН, Москва, Россия
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

mdmitriev@mail.ru, kurina@math.vsu.ru

В докладе приводится обзор недавних работ авторов, посвященных сингулярно возмущенным задачам оптимального управления.

На основе результатов по контрастным структурам в теории сингулярно возмущенных краевых задач в [1] показывается возможность появления быстрых внутренних фазовых переходов в оптимальной траектории для элементарной нелинейной задачи оптимального управления со скалярной дифференциальной связью, малым параметром при производной и без ограничений на управление.

С помощью методов сингулярных возмущений проводился асимптотический анализ управляемой модели "власть–общество" [2].

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 08-06-00302-а, 10-01-00332-а).

Рассматривалась задача минимизации квадратичного функционала на траекториях двухступенчатой сингулярно возмущенной линейной системы с закрепленным левым концом [3]. Для построения асимптотики решения использовалась непосредственная подстановка в условия задачи постулируемого асимптотического разложения решения. Решение рассматриваемой задачи, построенное при помощи так называемой прямой схемы, содержит функции погранслоя четырех типов. Найдены задачи оптимального управления, которым удовлетворяют коэффициенты асимптотического разложения решения. Для этих задач получены необходимые и достаточные условия оптимальности управления и доказана однозначная разрешимость. Установлено невозрастание значений минимизируемого функционала при использовании следующего асимптотического приближения оптимального управления.

Получен вид оптимального управления в форме обратной связи для линейно-квадратичных задач с разрывными коэффициентами. Построена асимптотика непрерывного решения возникающей при этом задачи для сингулярно возмущенного матричного дифференциального уравнения Риккати с разрывными в промежуточной точке коэффициентами. С помощью этой асимптотики построена асимптотика оптимального управления в форме обратной связи [4].

Получены оценки близости приближенного асимптотического решения к точному решению возмущенной задачи по управлению, траектории и функционалу.

Асимптотическому анализу нелинейных задач оптимального управления с различной ценой слагаемых в критерии качества, зависящих от промежуточных точек, посвящена работа [5]. Рассматривалась многокритериальная задача с разной значимостью критериев качества [6]. С помощью метода свертки эта задача сводится к однокритериальной задаче с критерием качества, представляющим собой сумму слагаемых с разными степенями малого параметра. По схеме [5] проводился асимптотический анализ этой задачи.

Предлагаемые методы построения асимптотики иллюстрируются численными примерами.

Результаты о полной управляемости разнотемповых систем [7] применялись для анализа управляемости социально-экономических систем, примером которых являются, например, транснациональные корпорации, которые в некотором приближении можно считать иерархическими трехуровневыми системами: центр–регионы–фирмы.

Список литературы

1. *Ни Минь Кань, Дмитриев М.Г.* О контрастной структуре типа ступеньки в элементарной задаче оптимального управления // ЖВМиМФ. 2010. Т. 50, №8. С. 1381–1392.
2. *Дмитриев М.Г., Петров А.П., Пилюгин В.С.* Качественные свойства оптимального взаимодействия в системе "власть–общество" в стационарном случае // Тр. 4-й Междунар. конф. по проблемам управления, 26–30 янв. 2009. М.: ИПУ РАН, 2009. С. 956–962.
3. *Курина Г.А., Нгуен Т.Х.* Асимптотическое решение сингулярно возмущенных линейно-квадратичных задач оптимального управления с разрывными коэффициентами // ЖВМиМФ. 2012. В печати.
4. *Курина Г.А., Нгуен Т.Х.* Асимптотика оптимального управления в форме обратной связи для сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи с разрывными коэффициентами // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Физика. Математика. 2010. №2. С. 103–117.
5. *Kurina G.A., Smirnova E.V.* Asymptotic solution of optimal control problems with a small parameter and intermediate points in performance index // Complex analysis and dynamical systems IV. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2011. P. 173–199. (Contemp. Math.; V. 553).
6. *Дмитриев М.Г.* Линейная свертка в многокритериальной задаче нелинейной оптимизации и метод малого параметра // Учен. зап. РГСУ. 2010. №8. С. 52–56.
7. *Курина Г.А.* О полной управляемости разнотемповых сингулярно возмущенных систем // Мат. заметки. 1992. Т. 52, №4. С. 56–61.

Квадратичные условия оптимальности для релейно-особых управлений

А. В. Дмитрук

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

vraimax@mail.ru

На фиксированном отрезке $[0,T]$ рассматривается задача оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) + ug(t,x), \quad |u| \le 1, \\ \eta_j(x(0),x(T)) = 0, \quad j = 1,\dots,\mu, \\ \varphi_i(x(0),x(T)) \le 0, \quad i = 1,\dots,\nu, \\ J = \varphi_0(x(0),x(T)) \to \min, \end{cases}$$

линейная по скалярному управлению. Здесь $x \in \mathbf{R}^n$, функции φ_i, η_j дважды гладкие; f и g дважды гладкие по x и гладкие по t. Пусть процесс $(x^0(t), u^0(t))$ удовлетворяет принципу максимума с единственным набором множителей Лагранжа $\alpha_i, \beta_j, \psi(t)$, причем функция переключения $\psi(t)\, g(t,x^0(t)) > 0$ на $(0,\theta)$ и равна нулю на (θ,T) при некотором $\theta \in (0,T)$, так что на первом интервале управление граничное: $u^0(t) = 1$, а на втором особое: $|u^0(t)| < 1$. Считаем, что все концевые неравенства активны.

Составим функцию Лагранжа

$$L(x,u) = \sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i\, \varphi_i + \sum_{j=1}^{\mu} \beta_j\, \eta_j + \int_0^T \psi(t)\, \big(\dot{x} - f(t,x) - ug(t,x)\big)\, dt,$$

и пусть $\Omega(\bar{x},\bar{u})$ есть ее вторая вариация на данном процессе, а K есть конус критических вариаций $(\bar{x},\bar{u})$, заданный линеаризацией всех ограничений задачи. В частности, линеаризация управляемой системы имеет вид $\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}$. Введем квадратичный порядок [1]

$$\gamma(\bar{x},\bar{u})) = |\bar{x}(0)|^2 + \int_0^T |\bar{y}|^2\, dt + |\bar{y}(T)|^2, \qquad \text{где} \quad \dot{\bar{y}} = \bar{u}, \quad \bar{y}(0) = 0,$$

в который управление $\bar{u}$ входит только через новую фазовую переменную $\bar{y}$. Произведя замену фазовых переменных $\bar{x} = \bar{\xi} + B\bar{y}$, получаем уравнение $\dot{\bar{\xi}} = A\bar{\xi} + (AB - \dot{B})\bar{y}$, а квадратичная форма Ω с учетом интегрирования по частям приобретает вид

$$\Omega = q\big(\bar{\xi}(0), \bar{\xi}(T), \bar{y}(T)\big) + \int_0^T \big((G\bar{\xi}, \bar{\xi}) + (P\bar{\xi}, \bar{y}) + (Q\bar{y}, \bar{y})\big)\, dt,$$

где q — некоторая конечномерная квадратичная форма. Освобождаясь от связи $\dot{\bar{y}} = \bar{u}$, пополняем конус K, т.е. переходим от троек $(\bar{\xi}, \bar{y}, \bar{y}(T))$, порожденных конусом K, к тройкам $(\bar{\xi}, \bar{y}, \bar{h})$, где $\bar{y} \in L_2[0,T]$, $\bar{h} \in \mathbf{R}$, образующим конус $H(K)$, задающийся соотношениями

$$\begin{cases} \dot{\bar{\xi}} = A\bar{\xi} + (AB - \dot{B})\,\bar{y}, \quad \text{где} \quad \bar{y} = 0 \text{ на } (0, \theta), \\ \eta'_{x_0}\bar{\xi}(0) + \eta'_{x_T}\big(\bar{\xi}(T) + B(T)\bar{h}\big) = 0, \\ \varphi'_{x_0}\bar{\xi}(0) + \varphi'_{x_T}\big(\bar{\xi}(T) + B(T)\bar{h}\big) \le 0. \end{cases}$$

Теорема. (а) *Если процесс $(x^0(t), u^0(t))$ доставляет слабый минимум, то $\Omega \ge 0$ на $H(K)$.*

(б) *Если $\exists\, a > 0$ такое, что $\Omega \ge a\gamma$ на $H(K)$, то $(x^0(t), u^0(t))$ доставляет строгий сильный минимум.*

В доказательстве [4] использованы некоторые технические конструкции из работ [1–3]. Аналогичные результаты справедливы и для более общего случая, когда конечное число участков релейного управления чередуется с участками особого. В качестве иллюстрации исследуются экстремали в задаче Маркова–Дубинса о соединении двух точек на плоскости кривой ограниченной кривизны.

Работа выполнена совместно с С. Аронной, Ф. Боннансом, П. Лотито.

Список литературы

1. *Дмитрук А.В.* Квадратичные условия понтрягинского минимума в задаче оптимального управления, линейной по управлению. I // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1986. Т. 50, №2. С. 284–312.
2. *Dmitruk A.V.* Quadratic order conditions of a local minimum for singular extremals in a general optimal control problem // Differential geometry and control / Ed. by G. Ferreyra et al. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1999. P. 163–198. (Proc. Symp. Pure Math.; V. 64).
3. *Dmitruk A.V.* Jacobi type conditions for singular extremals // Control Cybern. 2008. V. 37, №2. P. 285–306.
4. *Aronna M.S., Bonnans J.F., Dmitruk A.V., Lotito P.A.* Quadratic order conditions for bang-singular extremals: Rapport de recherche INRIA Saclay, 2011. No. 7664.

Сколько топологически неэквивалентных каскадов на поверхности могут иметь гомеоморфные гиперболические аттракторы*

А. Ю. Жиров

РГСУ, Москва, Россия

alexei_zhirov@mail.ru

Определение. Два каскада (динамические системы с дискретным временем) назовем *топологически эквивалентными*, если они порождаются итерациями топологически сопряженных диффеоморфизмов.

Теорема. *На замкнутой ориентируемой поверхности рода $g \ne$ $\ne 5, 8, 11, \ldots$ существует $[(g+1)/2] + 1$ топологически неэквивалентных каскадов, имеющих гомеоморфные одномерные гиперболические аттракторы.* (Квадратные скобки обозначают целую часть числа.)

Комментарии. Странный аттрактор представляет собой топологически сложно устроенное множество. Так, гиперболический аттрактор коразмерности 1 представляет собой неразложимый континуум. Р.В. Плыкиным [1] был поставлен и частично решен (для каскадов на многообразиях размерности, большей 2) вопрос о классификации таких континуумов. В случае каскадов на поверхностях остается невыясненным даже вопрос о том, как много негомеоморфных континуумов могут быть их аттракторами. Очевидно, что аттракторы топологически сопряженных диффеоморфизмов гомеоморфны. А могут ли аттракторы несопряженных диффеоморфизмов быть гомеоморфными? Чтобы исключить тривиальный утвердительный ответ (все итерации диффеоморфизма не сопряжены друг другу, но имеют один и тот же аттрактор), естественно говорить не о сопряженности, а о топологической эквивалентности в смысле сформулированного выше определения. Из результатов работы [1] вытекает, что существуют ровно два топологически неэквивалентных каскада на торе с ориентируемым аттрактором, гомеоморфным аттрактору так называемого DA-диффеоморфизма Смейла. Примеров более чем двух топологически неэквивалентных каскадов на поверхности с гомеоморфными аттракторами известно не было. Сформулированная выше теорема показывает, что на поверхности

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-5998.2012.1).

достаточно большого рода число топологически неэквивалентных каскадов с гомеоморфными аттракторами может быть бо́льшим любого наперед заданного числа. Доказательство состоит в предъявлении конкретных примеров, конструкция которых основана на технике, развитой в [2].

Список литературы

1. *Плыкин Р.В.* К проблеме топологической классификации странных аттракторов динамических систем // УМН. 2002. Т. 5, №6. С. 123–166.
2. *Жиров А.Ю.* Комбинаторика одномерных гиперболических аттракторов диффеоморфизмов поверхностей // Тр. МИАН. 2004. Т. 244. С. 132–200.

Геометрия окрестностей особых экстремалей в задачах с многомерным управлением

М. И. Зеликин, Л. В. Локуциевский

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Р. Хильдебранд

Laboratoire Jean Kuntzmann, Université Joseph Fourier, Grenoble, France

Показано, что порядок особой экстремали в задачах с многомерным управлением описывается флагом линейных подпространств в пространстве управлений. В терминах этого флага получены необходимые условия регулярного сопряжения неособой экстремали с особой в аффинных по многомерному управлению системах.

В случае нерегулярного сопряжения построены примеры многомерных задач, в которых оптимальное управление имеет вид всюду плотной обмотки тора, которая при приближении к особой экстремали целиком проходится за конечное время.

Условия обратимости и алгоритмы обращения систем с запаздыванием*

А. В. Ильин, В. В. Фомичев

МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия

iline@cs.msu.su, fomichev@cs.msu.su

Рассматривается следующая обратная задача теории управления. Задана система дифференциальных уравнений с соизмеримыми запаздываниями

$$\begin{cases} \dot{x} = A(d)x + B(d)\xi, \\ y = C(d)x, \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, $\xi(t) \in \mathbb{R}^m$ — неизвестный вход системы, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ — измеряемый выход системы; $A(d)$, $B(d)$, $C(d)$ — полиномиальные матрицы порядка не выше k от d, где d — оператор запаздывания, $d(f(t)) = f(t-\tau)$.

Начальные функции $x(\Theta)$ и $\xi(\Theta)$ определены при $\Theta \in (-k\tau; 0]$ и таковы, что решение системы (1) существует и единственно при $t \in (0; +\infty)$. Однако сами эти начальные функции считаются неизвестными.

Требуется по измерениям входа в режиме реального времени $y(t)$ $(t \geq 0)$ построить оценку $\tilde{\xi}(t)$ такую, что $|\tilde{\xi}(t) - \xi(t)| \to 0$ при $t \to \infty$ (асимптотическое восстановление) либо $|\tilde{\xi}(t) - \xi(t)| \leq \varepsilon$ при заданном $\varepsilon > 0$ начиная с некоторого момента времени $t^* > 0$ (восстановление с заданной точностью).

Для решения задачи были обобщены методы, предложенные в [1] для обращения линейных систем без запаздывания, а именно использована управляемая модель системы, управление в которой направлено на стабилизацию в нуле разности между выходами системы и модели. При определенных условиях это позволяет принять в качестве оценки входа управление для модели.

Условия обратимости.

Определение 1. Система (1) обратима асимптотически, если из условия $y_1(t) = y_2(t)$, $t \in (0; +\infty)$, следует, что $|\xi_1(t) - \xi_2(t)| \to 0$ при $t \to \infty$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-07-13116-офи-М-РЖД).

То есть из совпадения выходов системы (при, возможно, различных начальных условиях) следует, что входы системы в асимптотике совпадают.

Для анализа обратимости системы (1) рассмотрим матрицу Розенброка

$$R(s,d) = \left[\begin{array}{c|c} sI - A(d) & -B(d) \\ \hline C(d) & 0 \end{array}\right].$$

Теорема 1. *Для асимптотической обратимости системы* (1) *при* $l \geq m$ *необходимо, чтобы у нее отсутствовали неустойчивые инвариантные нули, т.е. выполнялось условие*

$$\operatorname{rank} R(s, e^{-s\tau}) = n + m \qquad \forall s \in \overline{\mathbb{C}}_+. \tag{2}$$

Для скалярных систем (т.е. при $m = l = 1$) при выполнении условия (2) предложен алгоритм обращения с заданной точностью. Пусть для системы выполнены следующие условия:

$$\det \mathcal{K}\{A,B\} = \det\bigl[B(d), A(d)B(d), \ldots, A^{n-1}(d)B(d)\bigr] = \mathrm{const} \neq 0,$$

т.е. матрица управляемости Калмана $\mathcal{K}\{A,B\}$ унимодулярна.

Пусть для системы также выполнено условие равномерного по d первого относительного порядка, т.е. $C(d)B(d) = \mathrm{const} \neq 0$.

Тогда часть фазового вектора $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})^{\mathrm{T}}$ восстанавливает асимптотический наблюдатель

$$\dot{\tilde{x}}' = A_{11}(d)\tilde{x}' + A_{12}(d)y,$$

где $\det(sI - A_{11}(d)) = \det R(s,d)$, матрица $A_{11}(d)$ определяется нулевой динамикой системы.

Выход системы удовлетворяет уравнению $\dot{y} = A_{21}(d)\tilde{x}' + A_{22}(d)y + \xi$, $A_{21}(d)$ и $A_{22}(d)$ определяются однозначно параметрами системы.

Рассмотрим модель $\dot{\tilde{y}} = A_{21}(d)\tilde{x}' + A_{22}(d)y + u$ со стабилизирующим управлением

$$\begin{gathered} u(t) = -\alpha(\tilde{y}(t) - y(t)) - F\operatorname{sgn}(\tilde{y}(t) - y(t)), \\ \alpha > 0, \qquad F > \xi^0 = \sup_{t\in(0;+\infty)} \{|\xi(t)|\}. \end{gathered} \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть для системы* (1) *выполнено условие* (2), $\xi(t) \in \Omega^1 = \{\xi(t)\colon |\xi(t)| \leq \xi^0,\ |\dot{\xi}(t)| \leq \xi^1,\ t \in (0;+\infty)\}$; *система имеет равномерный по* d *первый относительный порядок и матрица управляемости Калмана унимодулярна.*

Тогда для $\tilde{\xi}(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} u(\tau)\,d\tau$, *скользящего среднего управления* (3), *для любого* $\varepsilon > 0$ *при достаточно малом* T *с некоторого момента времени будет справедлива оценка* $|\tilde{\xi}(t) - \xi(t)| \leq \varepsilon$.

Список литературы

1. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В.* Робастные методы обращения динамических систем. М.: Физматлит, 2009.

Пример сингулярной задачи с пограничными слоями многих масштабов*

А. М. Ильин

ЧелГУ, Челябинск, Россия

iam@csu.ru

Рассматривается начальная задача для системы дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр ε при старших производных:

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{d}{dt}U_1 = -U_1^2 + U_2^3 + t, \quad \varepsilon\dfrac{d}{dt}U_2 = -U_2^2 + U_1^3 + t^2, \\ U_1(0) = \alpha, \quad U_2(0) = \beta. \end{cases} \tag{1}$$

Так как предельное решение имеет особенность в начальной точке, то асимптотика решения не может быть описана стандартным способом как сумма внешнего и внутреннего разложений [1]. Оказывается, что решение этой очень простой на первый взгляд сингулярной задачи имеет асимптотику еще более сложную, чем в работах [2, гл. II, §3; 3]. Правильная асимптотика зависит от пограничных функций трех различных масштабов.

Внешнее асимптотическое разложение имеет естественный вид:

$$U_1(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_{1;k}(t), \qquad U_2(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_{2;k}(t). \tag{2}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-00679, 12-01-00259, 12-01-00445), ФЦП (гос. контракт 02.740.11.0612).

Легко видеть, что главные члены этих рядов имеют следующее поведение при $t \to 0$:

$$u_{1;0}(t) = t^{1/2} + \sum_{j=5}^{\infty} a_{1;0,j} t^{j/4}, \qquad u_{2;0}(t) = t^{3/4} + \sum_{j=5}^{\infty} a_{2;0,j} t^{j/4}.$$

Следующие коэффициенты имеют еще бо́льшие особенности, так что внешнее разложение (2) заведомо непригодно в окрестности начала координат. В этой окрестности, как обычно, правильной является новая переменная $\tau = \varepsilon^{-1} t$.

Если обозначить $U_1(\varepsilon, \varepsilon\tau) \equiv V_1(\varepsilon, \tau)$, $U_2(\varepsilon, \varepsilon\tau) \equiv V_2(\varepsilon, \tau)$, то получим систему уравнений внутреннего слоя

$$\frac{d}{d\tau} V_1 = -V_1^2 + V_2^3 + \varepsilon\tau, \qquad V_1(0, \varepsilon) = \alpha,$$
$$\frac{d}{d\tau} V_2 = -V_2^2 + V_1^3 + \varepsilon^2\tau^2, \qquad V_2(0, \varepsilon) = \beta.$$

Внутреннее асимптотическое разложение — это также ряд по степеням ε и $\ln\varepsilon$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, получим систему уравнений для главных членов этих рядов. Эти функции также имеют асимптотические разложения при $\tau \to \infty$:

$$v_1 = \tau^{-1} + \tau^{-2}\ln\tau + b_1\tau^{-2} + \tau^{-3}(\ln\tau)^2 + O(\tau^{-3}\ln\tau),$$
$$v_2 = \tau^{-1} + \tau^{-2}\ln\tau + b_{2;0,-2,0}\tau^{-2} + \tau^{-3}(\ln\tau)^2 + O(\tau^{-3}\ln\tau).$$

Так же как и в примере [2, гл. II, § 3], внешнее и внутреннее разложения несогласованы.

Следующим масштабом, который является промежуточным между первоначальным масштабом t и масштабом начального слоя, является масштаб порядка $\varepsilon^{2/3}$. Только решения системы (1) от переменной $\eta = t\varepsilon^{2/3}$ могут обеспечить согласование с рядами внутреннего разложения. Асимптотические ряды компонент решения в этом слое имеют вид

$$W_1(\eta, \varepsilon) = \varepsilon^{1/3}\big(w_1(\eta) + \widetilde{W}_1(\eta, \varepsilon)\big), \quad W_2(\eta, \varepsilon) = \varepsilon^{1/3}\big(w_2(\eta) + \widetilde{W}_2(\eta, \varepsilon)\big), \tag{3}$$

где $\widetilde{W}_1(\eta, \varepsilon), \widetilde{W}_2(\eta, \varepsilon)$ — это ряды более сложного вида, содержащие члены более высокого порядка малости по ε.

Уравнения для главных членов этих рядов следующие:

$$\frac{d}{d\eta} w_1 = -w_1^2 + \eta, \qquad \frac{d}{d\eta} w_2 = -w_2^2.$$

Функция $w_2 \equiv \eta^{-1}$, а при $\eta \to 0$ асимптотика функции $w_1(\eta)$ — это $\eta^{-1} + \frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{112}\eta^5 + o(\eta^5)$.

Поэтому ряды (3) согласованы с рядами внутреннего разложения, но при $\eta \to \infty$ асимптотика главных членов имеет вид $w_1 = \eta^{1/2} + o(\eta^{-1/2})$, $w_2 \equiv \eta^{-1}$. Следовательно, построенные ряды не согласованы с асимптотикой внешнего разложения.

Для окончательного построения равномерной асимптотики решения задачи (1) достаточно ввести еще один промежуточный слой с новым масштабом и независимой переменной $\xi = t\varepsilon^{-4/7}$.

Список литературы

1. *Тихонов А.Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Мат. сб. 1948. Т. 22, № 2. С. 193–204.
2. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
3. *Ильин А.М., Леонычев Ю.А., Хачай О.Ю.* Асимптотика решения системы дифференциальных уравнений с малым параметром и с особой начальной точкой // Мат. сб. 2010. Т. 201, № 1. С. 81–102.

Локальная динамика двухкомпонентных контрастных параболических систем*

С. А. Кащенко, И. С. Кащенко

ЯрГУ, Ярославль, Россия

kasch@uniyar.ac.ru, iliyask@uniyar.ac.ru

Рассматривается нелинейная краевая задача параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (D + \varepsilon D_1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A + \mu A_1)u + \Phi(u) \tag{1}$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \tag{2}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (гос. контракт 14.740.11.0873) и гранта Президента РФ (проект МК-3867.2011.1).

Система (1) предполагается двухкомпонентной, т.е. $u = (u_1, u_2)$. Условие параболичности этой краевой задачи означает, что собственные значения матрицы $D + \varepsilon D_1$ имеют положительные вещественные части. Параметры ε и μ являются малыми:

$$0 < \varepsilon, \mu \ll 1. \tag{3}$$

Контрастными принято называть такие системы, в которых один коэффициент диффузии, т.е. одно собственное значение матрицы D, нулевой, а другой коэффициент диффузии — другое собственное значение матрицы D — положительный. Тем самым без потери общности можно считать, что

$$D_0(\varepsilon) = D + \varepsilon D_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нелинейную и достаточно гладкую вектор-функцию $\Phi(u)$ в окрестности нулевого состояния равновесия можно представить в виде

$$\Phi(u) = F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + \ldots, \tag{4}$$

где вектор-функции $F_j(\cdot, \ldots, \cdot)$ линейны по каждому элементу, а через многоточие обозначены слагаемые порядка $o(\|u\|^3)$ при $\|u\| \to 0$.

Рассмотрим вопрос о локальной динамике (1), (2), т.е. вопрос о поведении при $t \to \infty$ и малых ε и μ всех решений краевой задачи (1), (2) с начальными условиями из некоторого шара $S \in C_{[0,2\pi]}(R^2)$ достаточно малого (и не зависящего от ε и μ) радиуса с центром в нуле.

Отметим, что в случае двух малых коэффициентов диффузии, т.е. при условии $D = 0$, локальная динамика изучена в работах [1–3]. Приводимые в работе исследования принципиально отличаются от [1–3]. В качестве основных результатов построены специальные семейства нелинейных параболических и более общих — эволюционных краевых задач, не содержащих малых параметров, нелокальная динамика которых определяет поведение решений (1), (2) с начальными условиями из некоторых областей шара S. Такие семейства принято называть квазинормальными формами для (1), (2).

Представлен практически исчерпывающий набор универсальных квазинормальных форм, нелокальная динамика которых определяет локальное поведение решений исходных двухкомпонентных контрастных краевых задач. Выписаны явные формулы для всех коэффициентов, а также приведены асимптотические формулы, связывающие решения этих краевых задач и построенных квазинормальных форм.

Список литературы

1. *Кащенко И.С.* Мультистабильность в нелинейных параболических системах с малой диффузией // ДАН. 2010. Т. 435, № 2. С. 164–167.
2. *Кащенко С.А.* О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией // ДАН СССР. 1988. Т. 299, № 5. С. 1049–1053.
3. *Kaschenko S.A.* Normalization in the systems with small diffusion // Int. J. Bifurcation Chaos. 1996. V. 6, N 7. P. 1093–1109.

Задача оптимального управления процессом диффузии информации в социальной группе*

Ю. Н. Киселёв, С. Н. Аввакумов

МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия

kiselev@cs.msu.su, asn@cs.msu.su

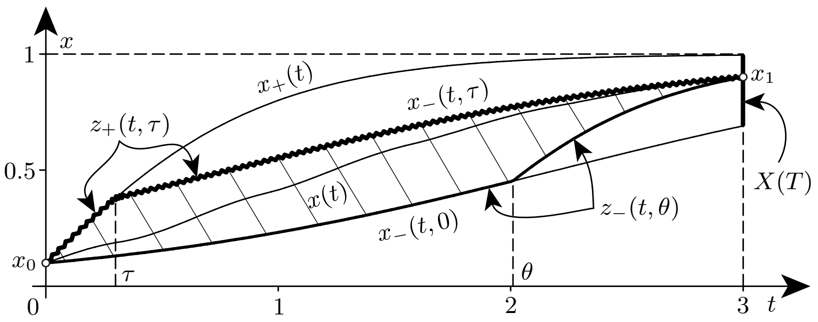
Рассматриваются некоторые управляемые модели процесса диффузии (распространения) информации в социальной группе. Оригинальная модель из статьи [4] модифицирована в направлении выбора оптимизируемого функционала; кроме того, фазовая переменная выбрана в безразмерной форме: $x(t)$ — доля членов социальной группы, получивших информацию к моменту времени $t \in [0, T]$. Изучены две нелинейные задачи оптимального управления на заданном конечном отрезке времени $[0, T]$:

$$\begin{cases} \dot{x} = [ax + bu](1 - x), \quad x(0) = x_0, \qquad 0 \le t \le T, \\ L[u] \equiv \displaystyle\int_0^T \big[(1 - x) + ru\big]\, dt \to \min_{u(\cdot)}, \qquad 0 \le u \le 1, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = [ax + bu](1 - x), \quad x(0) = x_0, \qquad 0 \le t \le T, \\ L[u] \equiv \displaystyle\int_0^T ru\, dt + \big[1 - x(T)\big] \to \min_{u(\cdot)}, \qquad 0 \le u \le 1, \end{cases} \tag{2}$$

Здесь параметры $a > 0$, $b > 0$, $r > 0$, $T > 0$ и $x_0 \in [0, 1)$ заданы. Для решения задачи привлекается принцип максимума Понтрягина [1].

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00378-а) и гранта Президента РФ (проект НШ-65590.2010.1).



Показано, что оптимальная программа $u(t)$ в задаче (1) имеет не более одной точки переключения и не содержит особых режимов. Дифференциальное уравнение управляемого движения в (1) и (2) является уравнением Риккати. Решение задач (1), (2) может быть построено при численном решении краевой задачи принципа максимума [5]. При $a = b$ решение задачи (1) допускает описание в аналитической форме [8]. Выполненный теоретический анализ приводит к построению одномерных выпуклых задач минимизации для нахождения точки переключения оптимального управления. Описан альтернативный подход (без использования принципа максимума) для решения задачи (1); основную идею этого подхода объясняет размещенный выше рисунок (см. [8]).

Подробное изложение обсуждаемых вопросов содержится в работах авторов [6–8]. Построение оптимальных законов управления в форме программы дополнено нахождением оптимальных синтезирующих управлений (обратная связь). В заключение отметим полученный в последнее время результат о решении задачи диффузии информации в случае бесконечного горизонта планирования с дисконтированным функционалом (1). При определенных условиях на параметры задачи построено оптимальное решение, допускающее особый режим. Обоснование оптимальности предложенного решения выполняется на основе исследования знака приращения функционала.

Список литературы

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
2. *Осипов Ю.С.* Избранные труды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2009.
3. *Самарский А.Ф., Михайлов А.П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит, 2005.

4. *Измоденова К.В., Михайлов А.П.* Об оптимальном управлении процессом распространения информации // Мат. моделирование. 2005. Т. 17, № 5. С. 67–76.
5. *Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В.* Оптимальное управление: Линейная теория и приложения. М.: Макс Пресс, 2007.
6. *Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н.* Построение оптимальных законов управления для модели диффузии информации в социальной группе // Проблемы динамического управления: Сб. науч. тр. ф-та ВМК МГУ / Под ред. Ю.С. Осипова, А.В. Кряжимского. М.: Макс Пресс, 2009. Вып. 4. С. 4–33.
7. *Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н.* Модели диффузии информации в социальной группе: построение оптимальных программ // Проблемы динамического управления: Сб. науч. тр. ф-та ВМК МГУ / Под ред. Ю.С. Осипова, А.В. Кряжимского. М.: Макс Пресс, 2010. Вып. 5. С. 5–27.
8. *Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н.* Оптимальные законы управления для модели диффузии информации в социальной группе // Прикл. мат. информ. 2010. № 35. С. 46–105.
9. *Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н.* Модель диффузии информации в социальной группе с возможными особыми режимами на бесконечном горизонте планирования // Проблемы динамического управления: Сб. науч. тр. ф-та ВМК МГУ / Под ред. Ю.С. Осипова, А.В. Кряжимского. М.: Макс Пресс, 2012. Вып. 6. В печати.

Исследование модели разработки газового месторождения с участием прогноза цен, изменяющихся во времени*

Ю. Н. Киселёв, М. В. Орлов

МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия

kiselev@cs.msu.su, orlov@cs.msu.su

Рассматривается следующая задача оптимального управления на бесконечном горизонте планирования:

$$\begin{cases} \dot{y} = -\varepsilon u y, \quad y(0) = y_0 > 0, \quad 0 \le t < +\infty, \\ L[u] \equiv \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\nu t} p(t) u^\varepsilon y \, dt \to \max_{u(\cdot)}. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь y — положительная одномерная фазовая переменная, u — скалярное управление, подчиненное геометрическому ограничению $u \ge 0$, ν — положительный коэффициент дисконтирования, $p(t)$ — недисконтированная "функция цены" — известная неотрицательная функция времени, удовлетворяющая условию равномерной ограниченности при $t \ge 0$, $\varepsilon \in (0, 1)$ — известный параметр вогнутости задачи. К виду (1) введением новой фазовой переменной $y = x^\varepsilon$ сводится задача оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{x} = -ux, \quad x(0) = x_0 > 0, \quad 0 \le t < +\infty, \\ J[u] \equiv \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\nu t} p(t) u^\varepsilon x^\varepsilon \, dt \to \max_{u(\cdot)}. \end{cases} \tag{2}$$

В случае постоянной "функции цены" $p(\cdot)$ задача (2) (динамическая модель газовых месторождений) рассмотрена в работе [1], где указано оптимальное управление $u(t) \equiv \nu/(1 - \varepsilon)$, не зависящее от времени, при одностороннем геометрическом ограничении на управление $u \ge 0$; в случае двустороннего геометрического ограничения $0 \le u \le \bar{u}$ оптимальная программа $u(t) = \min\{\nu/(1-\varepsilon), \bar{u}\}$. В исследуемой нами задаче с переменной "функцией цены" $p(\cdot)$, описывающей различные сценарии динамики цен на газ, можно обнаружить более интересные оптимальные законы управления. Переход от задачи (2) к задаче (1), где фазовая

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00378-а) и гранта Президента РФ (проект НШ-65590.2010.1).

переменная входит в первой степени как в дифференциальное уравнение управляемого движения, так и в интегрант функционала, представляется удобным для анализа. При изучении задачи (1) мы ограничимся случаем одностороннего геометрического ограничения на управление: $u \ge 0$.

Решение задачи (1) строится на основе принципа максимума Понтрягина. Для обоснования оптимальности построенного экстремального решения привлекается теорема о достаточных условиях оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина [2]. При таком способе изложения можно обойтись без ссылок на теоремы существования оптимального решения для задач с бесконечным горизонтом планирования. Оптимальное решение задачи (1) допускает описание в компактной аналитической форме [3].

Теорема 1. *Оптимальные управление и траектория в задаче* (1) *определяются формулами*

$$u(t) = \frac{[P(t)]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}}{Q(t)}, \qquad y(t) = y_0 \left[\frac{Q(t)}{Q(0)}\right]^\varepsilon, \qquad 0 \le t < +\infty,$$

при этом $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$. *Здесь* $P(t)$ *— дисконтированная "функция цены" и функция* $Q(t)$ *имеют вид*

$$P(t) = e^{-\nu t} p(t), \qquad Q(t) = \int_t^{+\infty} [P(s)]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \, ds.$$

Оптимальный закон управления может быть записан в виде

$$u(t) = \frac{e^{-\frac{\nu t}{1-\varepsilon}} [p(t)]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}}{\int_t^{+\infty} e^{-\frac{\nu s}{1-\varepsilon}} [p(s)]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \, ds}, \qquad 0 \le t < +\infty,$$

который описывает влияние недисконтированной "функции цены" $p(t)$ *на оптимальную программу* $u(t)$.

Теорема 2. *Оптимальный синтез в задаче* (1) *имеет вид*

$$u = u(t, y) \equiv \frac{1}{Q(0)} \left[P(t)\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \left[\frac{y_0}{y}\right]^{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Список литературы

1. *Скиба А.К.* Исследование задачи оптимального управления для динамической модели газового месторождения // Тр. VI Моск. междунар. конф. по исследованию операций. М.: Макс Пресс, 2010. С. 118–119.
2. *Киселёв Ю.Н.* Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина // Математические модели в экономике и биологии: Матер. науч. семин. М.: Макс Пресс, 2003. С. 57–67.
3. *Киселёв Ю.Н., Орлов М.В.* Исследование модели разработки газового месторождения на бесконечном горизонте планирования // Диф. уравнения. 2011. Т. 47, № 11. С. 1583–1591.

Сходимость по Чезаро сферических средних для сохраняющих меру действий марковских полугрупп*

А. В. Клименко

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН;
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, Москва, Россия

klimenko05@mail.ru

Пусть Γ — марковская полугруппа относительно конечного набора образующих O.

Напомним определение марковской полугруппы. Набор образующих O задает на Γ естественную норму: норма $|g|_O$ элемента $g \in \Gamma$ равна минимальной длине слова в алфавите O, представляющего g. Пусть $S_O(n) = \{g\colon |g|_O = n\}$ — сфера относительно этой нормы.

Рассмотрим теперь ориентированный граф $\mathbf{G}$ с выделенной вершиной v_0, каждому ребру $e \in \mathcal{E}(\mathbf{G})$ которого сопоставлен элемент $\xi(e) \in O$. Отображение ξ естественным образом продолжается до отображения $\bar\xi$ из множества $\mathcal{P}(v_0)$ конечных путей в $\mathbf{G}$, начинающихся в v_0, в полугруппу Γ: $\bar\xi(e_1 \dots e_n) = \xi(e_1)\dots\xi(e_n)$. Полугруппа Γ называется *марковской* относительно набора образующих O, если можно выбрать тройку $(\mathbf{G}, v_0, \xi)$ так, что соответствующее отображение $\bar\xi$ биективно и отображает пути длины n в элементы $S_O(n)$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Президента РФ (проекты НШ-8508.2010.1, МК-4893.2010.1), РФФИ (проект 11-01-00384) и программы Президиума РАН “Динамические системы и теория управления”.

Пусть полугруппа Γ действует на вероятностном пространстве (X, ν) сохраняющими меру преобразованиями T_g, $g \in \Gamma$. Для произвольной функции $\varphi \in L^1(X, \nu)$ определим последовательность ее *сферических средних*

$$s_n(\varphi) = \frac{1}{\#S_O(n)} \sum_{g \in S_O(n)} \varphi \circ T_g$$

($\#$ обозначает число элементов конечного множества; если $S_O(n) = \varnothing$, мы полагаем $s_n(\varphi) = 0$). Рассмотрим также их средние по Чезаро

$$c_N(\varphi) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_n(\varphi).$$

Теорема. *Пусть Γ — марковская полугруппа относительно конечного набора порождающих O, которая действует сохраняющими меру преобразованиями на вероятностном пространстве (X, ν). Тогда для любого $p \in [1, \infty)$ и любой $\varphi \in L^p(X, \nu)$ последовательность $\{c_N(\varphi)\}$ сходится в $L^p(X, \nu)$ при $N \to \infty$. Если же $p \in (1, \infty)$, то для $\varphi \in L^p(X, \nu)$ последовательность $\{c_N(\varphi)\}$ сходится также ν-почти всюду.*

М. Громов показал [4], что любая гиперболическая группа является марковской относительно любого симметричного набора образующих. Таким образом, эта теорема применима к действиям любой гиперболической группы.

В случае неприводимого графа $\mathbf{G}$ приведенная теорема была доказана ранее А. Буфетовым [1]. Доказательство сходимости почти всюду в общем случае проводится в два этапа: сначала для функций из L^∞ (см. [3]), а затем для функций из произвольного L^p, $p > 1$ (см. [2]). Оба этапа основываются на общей индуктивной процедуре сборки графа из неприводимых компонент.

Список литературы

1. *Bufetov A.I.* Markov averaging and ergodic theorems for several operators // Topology, ergodic theory, real algebraic geometry. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2001. P. 39–50. (AMS Transl.; V. 202).
2. *Буфетов А.И., Клименко А.В.* Максимальное неравенство и эргодические теоремы для марковских групп // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. В печати.

3. *Bufetov A.I., Khristoforov M., Klimenko A.* Cesàro convergence of spherical averages for measure-preserving actions of Markov semigroups and groups // Int. Math. Res. Not. 2011. Oct. 25 (online).
4. *Gromov M.* Hyperbolic groups // Essays in group theory. New York: Springer, 1987. P. 75–263. (MSRI Publ.; V. 8).

Инвариантные многообразия дифференциальных уравнений Гамильтона и расширенный метод Гамильтона–Якоби

В. В. Козлов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

Развивается метод интегрирования уравнений Гамильтона, основанный на поиске семейств вихревых инвариантных многообразий, которые однозначно проектируются на конфигурационное пространство. Случай потенциальных (лагранжевых) многообразий отвечает классическому методу Гамильтона–Якоби.

Условия инвариантности многообразий для дифференциальных уравнений Гамильтона имеют вид многомерных гидродинамических уравнений Ламба. Это обстоятельство позволяет развить далеко идущую аналогию между гамильтоновой динамикой на инвариантных многообразиях и гидродинамикой идеальной жидкости. В частности, для гамильтоновых систем справедливы многомерные аналоги классических теорем Бернулли и Гельмгольца. Расширение метода Гамильтона–Якоби использует представление инвариантных многообразий с помощью потенциалов Клебша.

Релаксационные колебания в сингулярно возмущенных системах дифференциальных уравнений*

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

ЯрГУ им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
kolesov@uniyar.ac.ru, fpo.mgu@mail.ru

Для содержащей параметр $\varepsilon > 0$ нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \varepsilon x' &= f(x,y), \qquad x \in \mathbb{R}^k, \\ y' &= g(x,y), \qquad y \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \tag{1}$$

с гладкими правыми частями от $k+m=n$ аргументов естественно поставить задачу об изучении неклассической зависимости ее решений от параметра при $\varepsilon \to 0$. В частности, у системы (1) может существовать периодическое решение специфической природы: при движении по его замкнутой траектории в n-мерном фазовом пространстве "медленное" перемещение изображающей точки (занимающее конечное время при сколь угодно малом ε) чередуется с "быстрым" ее перемещением (за время, стремящееся к нулю при $\varepsilon \to 0$). Такие решения являются адекватным математическим описанием релаксационных колебаний — важных периодических колебательных режимов в реальных объектах. Наиболее известный пример доставляет классическое уравнение Ван дер Поля.

Возникает задача полного асимптотического (при $\varepsilon \to 0$) вычисления параметров релаксационного колебания в системе (1) — его траектории, периода, амплитуд вдоль каждой оси и т.д. Исследование этой задачи впервые начали Л.С. Понтрягин и Е.Ф. Мищенко [1]. Ее окончательное решение потребовало преодоления серьезных технических трудностей и для системы (1) общего вида в случае $n = 2$ изложено в [2], а для произвольного n было опубликовано К. Боне (C. Bonet) и в [3]. В частности, доказано, что при некоторых естественных предположениях "невырожденности" для периода T_ε релаксационного колебания имеет место весьма нетривиальное асимптотическое представление нестандартной

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 08-01-00342a, 09-01-00614).

структуры:

$$T_\varepsilon = T_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} T_{n,\nu} \ln^\nu \frac{1}{\varepsilon},$$

$$\pi(n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \begin{cases} 0, & \text{если} \quad n \not\equiv 1 \pmod 3, \\ 1, & \text{если} \quad n \equiv 1 \pmod 3. \end{cases}$$

Дальнейшее изучение систем вида (1) породило многочисленные разнообразные задачи, оказавшиеся интересными с теоретической точки зрения и нашедшие важные прикладные приложения. Одним из неожиданных направлений теории стала так называемая охота на уток (см. [3–5]); исходное понятие "утки" было введено Ф. и М. Диенерами с использованием нестандартного анализа. Исследованию были подвергнуты неклассические релаксационные колебания (см. [3]) и релаксационные колебания в системах с запаздыванием (см. [6–8]). Изучались также различные другие эффекты для систем вида (1) (см. [9, 10]) и связь с явлением хаоса (см. [11]).

Установлено, что релаксационные колебания наблюдаются и в сингулярно возмущенных дифференциальных уравнениях с частными производными, описывающих распределенные колебательные системы. Классическим примером здесь следует считать математическую модель известной в химии реакции Белоусова (см. [12]). Содержательные задачи касаются релаксационных колебаний в средах с диффузией (см. [3]).

Список литературы

1. *Мищенко Е.Ф., Понтрягин Л.С.* Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным // ДАН СССР. 1955. Т. 102, № 5. С. 889–891.
2. *Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Физматлит, 1975.
3. *Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Физматлит, 1995.
4. *Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф.* Явление затягивания Л.С. Понтрягина и устойчивые циклы-утки многомерных релаксационных систем с одной медленной переменной // Мат. сб. 1990. Т. 181, № 5. С. 579–588.
5. *Бобкова А.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Проблема "выживания уток" в трехмерных сингулярно возмущенных системах с двумя медленными переменными // Мат. заметки. 2002. Т. 71, № 6. С. 818–831.

6. *Колесов А.Ю., Колесов Ю.С.* Релаксационные колебания в математических моделях экологии. М.: Наука, 1993. (Тр. МИАН; Т. 199).
7. *Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Новые методы доказательства существования и устойчивости периодических решений в сингулярно возмущенных системах с запаздыванием // Тр. МИАН. 2007. Т. 259. С. 106–133.
8. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Теория релаксационных колебаний для уравнения Хатчинсона // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 6. С. 51–82.
9. *Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Решение сингулярно возмущенных краевых задач методом "охоты на уток" // Тр. МИАН. 1999. Т. 224. С. 187–207.
10. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Катастрофа голубого неба в релаксационных системах с одной быстрой и двумя медленными переменными // Диф. уравнения. 2008. Т. 44, № 2. С. 158–171.
11. *Колесов А.Ю., Колесов Ю.С., Розов Н.Х.* Хаос типа "разбитого тора" в трехмерных релаксационных системах // Мат. сб. 1997. Т. 188, № 11. С. 3–18.
12. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Релаксационные колебания и диффузионный хаос в реакции Белоусова // ЖВМиМФ. 2011. Т. 51, № 8. С. 1400–1418.

Феномен буферности и механизмы его возникновения*

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

ЯрГУ им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

kolesov@uniyar.ac.ru, fpo.mgu@mail.ru

О феномене буферности принято говорить в случае, когда в фазовом пространстве некоторой динамической системы при подходящем выборе параметров можно гарантировать сосуществование любого фиксированного числа однотипных аттракторов (состояний равновесия, циклов, торов и т.д.).

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 08-01-00342а, 09-01-00614) и целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (гос. контракт 02.740.11.0197).

Из результатов известной работы А.А. Витта [1], а также из значительно более поздних работ [2–7] следует, что буферность представляет собой универсальное нелинейное явление, возникающее в математических моделях из различных областей естествознания: радиофизики, механики, экологии, нелинейной оптики, теории горения и т.д. Поэтому весьма актуальна проблема изучения типовых сценариев накапливания аттракторов в различных динамических системах. К настоящему времени удалось выявить четыре таких сценария: в первую очередь это сценарий Витта, являющийся наиболее распространенным, а также тьюрингский, гамильтонов и гомоклинический механизмы накапливания аттракторов.

Ситуация, в которой реализуется механизм Витта, заключается в следующем. Предположим, что в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия некоторой динамической системы имеет место критический случай счетного числа чисто мнимых собственных значений, а при изменении каких-либо входящих в эту систему параметров происходит последовательное смещение точек спектра в правую комплексную полуплоскость. Тогда, как установлено в уже упоминавшихся работах [1–6], чаще всего в такой системе наблюдается феномен буферности в простейшем его варианте: происходит неограниченное накапливание устойчивых циклов, причем каждый отдельно взятый цикл рождается из нулевого состояния равновесия неустойчивым, а затем обретает устойчивость, подрастая по амплитуде.

Тьюрингский механизм отличается от механизма Витта по существу лишь тем, что каждый индивидуальный цикл (или состояние равновесия) при изменении управляющих параметров сначала обретает устойчивость, а затем снова ее теряет. Таким образом, хотя общее число аттракторов и увеличивается, но их состав постоянно обновляется. Как показано в монографии [5], данная ситуация реализуется главным образом в системах типа реакция-диффузия при пропорциональном уменьшении коэффициентов диффузии, но может возникать и в системах с запаздыванием при неограниченном увеличении времени запаздывания. В частности, с ней сталкиваемся при рассмотрении известной модели “брюсселятор”, изучавшейся еще А. Тьюрингом (отсюда и название — тьюрингский механизм).

Описанные сценарии накапливания аттракторов характерны только для систем с бесконечномерным фазовым пространством. Что же касается конечномерных систем, то в них простейшим механизмом возникновения буферности является, по всей видимости, так называемый

гамильтонов сценарий, проиллюстрированный в [5–7] на ряде двумерных отображений из механики и на системах обыкновенных дифференциальных уравнений, близких к двумерным гамильтоновым. Суть этого сценария состоит в следующем.

Рассмотрим сначала некоторую гамильтонову или консервативную (не меняющуюся при обращении времени) систему обыкновенных дифференциальных уравнений с полутора или более степенями свободы. Согласно выработанным к настоящему времени общим представлениям о динамике таких систем хаотические движения в них сосуществуют со счетным числом так называемых островков устойчивости, примыкающих к эллиптическим состояниям равновесия или циклам. Предположим, далее, что наша система возмущена малыми добавками, обеспечивающими ее диссипативность. Тогда некоторые из упомянутых состояний равновесия или циклов могут стать асимптотически устойчивыми и, что самое главное, количество последних может неограниченно увеличиваться при стремлении возмущений к нулю. А это как раз и означает, что в рассматриваемой системе наблюдается явление буферности, механизм возникновения которого уместно назвать гамильтоновым.

Следует отметить, что в случае обыкновенных дифференциальных уравнений существуют и другие, значительно более сложные механизмы накапливания устойчивых циклов, которые с некоторой долей условности можно назвать гомоклиническими. Среди большого количества результатов, полученных для систем с гомоклиническими структурами, остановимся лишь на трех, имеющих непосредственное отношение к нашей тематике. В связи с этим сначала рассмотрим C^r-гладкую ($r \geq 4$) систему обыкновенных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^3$ и предположим, что у нее существует изолированное состояние равновесия O с характеристическими корнями $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega$, $\gamma > 0$, $\omega \neq 0$, $\lambda_3 > 0$. Предположим, далее, что имеется гомоклиническая к O траектория Г. Тогда, как установлено И.М. Овсянниковым и Л.П. Шильниковым, при $\sigma_1 = \operatorname{Re} \lambda_1 + \lambda_3 > 0$, $\sigma_2 = 2\,\lambda_1 + \lambda_3 < 0$ в классе таких систем плотны системы со счетным множеством устойчивых периодических движений.

Второй результат, аналогичный описанному выше, принадлежит Ньюхаусу. А именно, пусть p — гиперболическая седловая неподвижная точка C^r-диффеоморфизма f в $\mathbb{R}^2$, для которого $\det f'(p) < 1$, а устойчивое и неустойчивое многообразия точки p касаются в некоторой точке p_0. Тогда в сколь угодно малой C^r-окрестности f существует диффеоморфизм $\widetilde{f}$, имеющий бесконечно много устойчивых периодических орбит.

Третий результат, принадлежащий Н.К. Гаврилову и Л.П. Шильникову, заключается в том, что появлению или исчезновению точки гомоклинического касания предшествуют каскады бифуркаций типа седло-узел. При этих бифуркациях рождаются пары циклов — устойчивый и неустойчивый, причем количество устойчивых периодических движений за счет подходящего выбора бифуркационных параметров может быть сделано сколь угодно большим. Конкретные примеры, в которых реализуется указанный сценарий возникновения буферности, хорошо известны. Это уравнение Дуффинга с малой диссипацией и малым периодическим внешним воздействием, а также уравнение колебаний маятника с малым затуханием и вибрирующей точкой подвеса.

В заключение добавим, что реализуемость феномена буферности в автогенераторах с отрезком длинной линии в цепи обратной связи была установлена экспериментально. Описание соответствующих экспериментов приведено в работах [2, 4].

Список литературы

1. *Витт А.А.* Распределенные автоколебательные системы // Журн. технич. физики. 1934. Т. 4, №1. С. 144–157.
2. *Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений. М.: Наука, 1998. (Тр. МИАН; Т. 222).
3. *Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Явление буферности в резонансных системах гиперболических уравнений // УМН. 2000. Т. 55, №2. С. 95–120.
4. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Явление буферности в RCLG-автогенераторе: теоретический анализ и результаты эксперимента // Тр. МИАН. 2001. Т. 233. С. 153–207.
5. *Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2005.
6. *Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Явление буферности в нелинейной физике // Тр. МИАН. 2005. Т. 250. С. 112–182.
7. *Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Явление буферности в системах, близких к двумерным гамильтоновым // Тр. ИММ УрО РАН. 2006. Т. 12, №1. С. 109–140.

Нелинейная позиционная дифференциальная игра в классе смешанных стратегий

А. А. Красовский, А. Н. Красовский

Международный институт прикладного системного анализа (IIASA), Лаксенбург, Австрия
Уральская государственная сельскохозяйственная академия, Екатеринбург, Россия

akrasovskii@gmail.com, ankrasovskii@gmail.com

Рассматривается задача [1–3] об оптимальном управлении по принципу обратной связи нелинейной динамической системой при дефиците информации о действующих помехах. Задача на минимакс-максимин гарантированного результата для заданного позиционного критерия качества формализуется в антагонистическую дифференциальную игру двух лиц в рамках концепции свердловской (ныне екатеринбургской) школы по теории дифференциальных игр.

Рассматривается объект, описываемый дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, u, v), \qquad t_0 \le t \le \theta, \quad u \in P, \quad v \in Q, \tag{1}$$

где x — n-мерный вектор, t — время, начальный и конечный моменты времени t_0 и θ зафиксированы, u — s-мерный вектор *управления*, v — r-мерный вектор *помехи*, P и Q — компакты. Функцию f полагаем непрерывной по t, u, v и в каждой ограниченной области G пространства $\{x\}$ удовлетворяющей условию Липшица по x.

Рассматривается задача об управлениях u и v, которые соответственно минимизируют и максимизируют *позиционный* [3] критерий качества процесса управления, заданный в виде *функционала* γ от *движения* $\{x[t_*[\cdot]\theta],\ t_* \le t \le \theta\}$ объекта (1),

$$\gamma = \gamma(x[t_*[\cdot]\theta]). \tag{2}$$

Рассматривается такой случай, когда для функции $f(t, x, u, v)$ условие *седловой точки для маленькой игры*, т.е.

$$\min_{u\in P}\max_{v\in Q}\big\langle l\cdot f(t,x,u,v)\big\rangle = \max_{v\in Q}\min_{u\in P}\big\langle l\cdot f(t,x,u,v)\big\rangle, \tag{3}$$

где l — любой n-мерный вектор, символ $\langle l\cdot f(t,x,u,v)\rangle$ обозначает скалярное произведение в пространстве R^n, *не выполняется*.

Задача решается в классе *смешанных* стратегий, т.е. используются некоторые вероятностные механизмы формирования управляющих воздействий и помех. Несмотря на это, окончательный результат управления гарантируется с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, а не оценивается тем или иным среднестатистическим показателем.

Справедлива следующая

Теорема. *Рассматриваемая дифференциальная игра для системы* (1) *с позиционным критерием качества* γ (2) *имеет цену* $\rho^0(t,x)$ *и седловую точку* $\{S_u^0(\cdot), S_v^0(\cdot)\}$, *складывающуюся из оптимальных смешанных стратегий* $S_u^0(\cdot)$ *и* $S_v^0(\cdot)$ *первого и второго игроков. Они строятся конструктивно по известной функции цены игры* $\rho^0(t,x)$.

В докладе приводится построение оптимальных смешанных стратегий игроков *методом экстремального сдвига на сопутствующие точки* [3] по известной функции цены игры, конструкция которой базируется на методе *стохастического программного синтеза* и вытекающем из него так называемом методе *верхних выпуклых оболочек* [2]. Одно из главных мест в построении оптимальных смешанных стратегий занимает задача об осуществлении подходящей *близости* движений реального x-объекта (1) и его виртуальной (компьютерной) y-модели-лидера [4], играющей роль поводыря для движения x-объекта. Эта близость устанавливается соответствующей теоремой. Приводится иллюстрирующий механический пример с результатами его компьютерной симуляции.

Список литературы

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
2. *Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.* Control under lack of information. Boston etc.: Birkhäuser, 1994.
3. *Красовский А.Н.* О позиционном минимаксном управлении // ПММ. 1980. Т. 44, №4. С. 602–610.
4. *Krasovskii A.N., Choi Y.S.* Stochastic control with the leaders-stabilizers. Ekaterinburg: Inst. Math. Mech., Ural Branch of RAS, 2001.

К решению задач позиционного управления с неполной информацией: метод программных пакетов*

А. В. Кряжимский, Ю. С. Осипов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

kryazhim@iiasa.ac.at

Для стандартной конечномерной управляемой системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением, рассматривается задача о ее гарантированном наведении в предписанный терминальный момент времени на заданное целевое множество. Управление осуществляется по принципу обратной связи [1] в условиях, когда отсутствует точная априорная информация о положении начального состояния системы и в течение процесса управления наблюдению доступны частичные сигналы о ее текущих состояниях. Исследование опирается на метод пакетов программ [2, 3], представляющий собой программный инструмент для решения рассматриваемой задачи. В простейшем случае конечного множества X_0 допустимых начальных состояний пакет программ представляет собой произвольное семейство программных управлений $u_{x_0}(\cdot)$ (программ), $x_0 \in X_0$, удовлетворяющее *условию неупреждаемости*. Поясним это условие. Рассмотрим два движения системы, которые исходят из произвольных допустимых начальных состояний x_0 и $\bar{x}_0$ под действием программы $u_{x_0}(\cdot)$, отвечающей состоянию x_0. Условие неупреждаемости требует, что если до какого-либо момента времени указанные движения производят идентичные наблюдаемые сигналы, то до этого момента программа $u_{\bar{x}_0}(\cdot)$, отвечающая состоянию $\bar{x}_0$, неотличима от программы $u_{x_0}(\cdot)$. Движения системы, исходящие из всех допустимых начальных состояний x_0 под действием отвечающих им программ $u_{x_0}(\cdot)$ из того или иного пакета программ, формируют множество движений, порожденное данным пакетом программ. Задача о построении пакета программ, обеспечивающего наведение всех порожденных им движений на целевое множество в предписанный момент времени, составляет задачу *пакетного наведения*. В [3] показано, что

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-12112-офи-м-2011).

в случае конечности множества X_0 допустимых начальных состояний задача пакетного наведения и задача позиционного наведения эквивалентны.

В представляемой работе в предположении конечности множества X_0 описывается критерий разрешимости задачи пакетного наведения для линейной управляемой системы с линейным наблюдаемым сигналом. В основе анализа — основанное на линейности системы и наблюдаемого сигнала представление пакетов программ в виде прямых аналогов квазистратегий [4] из теории позиционных дифференциальных игр, а именно в виде семейств неупреждающих программных откликов на возможные реализации неконтролируемых переменных; в роли последних выступают сигналы, производимые неуправляемой однородной системой вдоль ее движений, исходящих из всех возможных допустимых начальных состояний. Критерий имеет алгоритмический характер и представляет собой конечношаговый вариант попятной процедуры из теории позиционных дифференциальных игр [1].

Список литературы

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. *Осипов Ю.С.* Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // УМН. 2006. Т. 61, №4. С. 25–76.
3. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* Идеализированные пакеты программ и задачи позиционного управления с неполной информацией // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15, №3. С. 139–157.
4. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.

Нелинейный панельный флаттер. Резонансная динамика как одна из причин жесткого возбуждения колебаний

А. Н. Куликов

Ярославский государственный университет, Ярославль, Россия

anat_kulikov@mail.ru

Исследованию колебаний тел в потоке газа посвящено большое число исследований (см. [1–3]). Простейшие варианты постановки таких задач приводят к необходимости исследования краевых задач для уравнения

$$w_{tt} + g_0 w_t + w_{xxxx} + c w_x = F(w_t, w_x, w_x x). \qquad (1)$$

Уравнение (1) приведено в перенормированном виде, коэффициент c пропорционален скорости набегающего потока газа, $g_0 > 0$ — коэффициент демпфирования. Наконец, $w = w(t,x)$ — нормированный прогиб. Скорость потока газа направлена вдоль оси x. Наконец, если следовать монографии [1],

$$F(w_t, w_x, w_{xx}) = b_0 w_{xx} \int_0^1 (w_x)^2 dx - k_2(w_t + mMw_x)^2 - k_3(w_t + mMw_x)^3,$$

где $b_0, k_2, k_3, m > 0$, а M — число Маха. В монографии [2] в соответствующей краевой задаче учтена лишь “геометрическая нелинейность” [1]. В первом варианте учтена аэродинамическая нелинейность на основе закона плоских сечений [1]. Уравнение (1) необходимо дополнить краевыми условиями. Например, в случае шарнирного опирания

$$w(t,0) = w(t,1) = w_{xx}(t,0) = w_{xx}(t,1) = 0. \qquad (2)$$

Пусть g_0 — коэффициент демпфирования — величина порядка 1. В линейной постановке определяется критическое значение $c = c_*$ (скорость флаттера), при которой спектру устойчивости линеаризованной задачи принадлежит пара чисто мнимых собственных значений $\pm i\sigma$ $(\sigma > 0)$, а остальные остаются в левой полуплоскости комплексной плоскости. При превышении критической скорости $c = c_*$ происходит потеря устойчивости нулевого состояния равновесия. Анализ поведения решений соответствующей нелинейной краевой задачи основан на распространении бифуркационной теоремы Андронова–Хопфа на соответствующий класс нелинейных краевых задач (нелинейных эволюционных уравнений в банаховом или гильбертовом пространстве) [3–6].

Иная задача возникает, если коэффициент g_0 мал. Этот вариант не является исключительным. После перенормировок g_0 пропорционален E^{-1}, где E — модуль упругости. Для стали $E = 2 \times 10^{11}$ Н/м^2.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор $L(c) = v^{\text{IV}} + cv$, определенный на достаточно гладких функциях, удовлетворяющих краевым условиям $v(0) = v(1) = v''(0) = v''(1) = 0$. В работах [7–9] было показано, что при $c \in [0, c_1)$ $(0 < c_1 < c_*)$ оператор $L(c)$ имеет счетное множество простых собственных значений $0 < \sigma_1^2(c) < \sigma_2^2(c) < \dots$ При $c = c_1$ собственное значение $\sigma_1^2(c_1)$ становится двукратным. Наконец, можно указать такие положительные постоянные c_2, c_3, что $c_3 < c_2 < c_1$ и $\sigma_2(c_2) = 2\sigma_1(c_2)$, $\sigma_2(c_3) = 3\sigma_1(c_3)$. При этих c иные младшие резонансы отсутствуют. Итак, при $c \approx c_3$, $c \approx c_2$, $c \approx c_1$ для точек спектра устойчивости краевой задачи (1), (2) реализуются случаи, близкие к резонансам 1 : 3, 1 : 2, 1 : 1. В работах [7–9] показано, что в каждом из этих случаев краевая задача (1), (2) имеет неустойчивые периодические решения достаточно малой амплитуды. Наличие докритических бифуркаций порождает причину жесткого возбуждения колебаний при $c < c_*$.

Случай, близкий к резонансу 1 : 1, для систем обыкновенных дифференциальных уравнений был рассмотрен ранее в работах [10–12].

Список литературы

1. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи упругой устойчивости. М.: Физматлит, 1991.
2. *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2002.
3. *Holmes P.J., Marsden J.E.* Bifurcation to divergence and flutter in flow-induced oscillations: an infinite-dimensional analysis // Automatica. 1978. V. 14, N 1. P. 367–384.
4. *Куликов А.Н., Либерман Б.Д.* О новом подходе к исследованию задач нелинейного панельного флаттера // Вестн. Яросл. ун-та. 1976. №6. С. 118–139.
5. *Колесов В.С., Колесов Ю.С., Куликов А.Н., Федик И.И.* Об одной математической задаче теории упругой устойчивости // ПММ. 1978. Т. 42, №3. С. 458–465.
6. *Куликов А.Н.* Исследование некоторых классов уравнений гиперболического типа, встречающихся в теории упругой устойчивости и радиофизике: Дис. ... канд. физ.-мат. наук, 1977.
7. *Куликов А.Н.* Бифуркация автоколебаний пластинки при малом демпфировании в сверхзвуковом потоке газа // ПММ. 2009. Т. 73, №2. С. 271–281.
8. *Куликов А.Н.* Резонанс 1 : 3 — одна из возможных причин нелинейного панельного флаттера // ЖВМиМФ. 2011. Т. 51, №7. С. 1266–1279.
9. *Kulikov A.* Resonance of proper frequency 1 : 2 as a reason for hard excitation of oscillations for the plate in ultrasonic gas // Proc. Int. Congr. ENOC-2008. St. Petersburg, 2008. P. 1638–1643.
10. *Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Резонансная динамика нелинейных флаттерных систем // Тр. МИАН. 2008. Т. 261. С. 154–175.
11. *Куликов А.Н.* Нелинейный панельный флаттер: опасность жесткого возбуждения колебаний // Диф. уравнения. 1992. Т. 28, №6. С. 1080–1082.
12. *Куликов А.Н.* Об одном аналоге бифуркационной теоремы Хопфа в задаче о аналитическом исследовании нелинейного панельного флаттера при малом коэффициенте затухания // Диф. уравнения. 1993. Т. 29, №5. С. 780–785.

Бегущие волны модифицированного уравнения Гинзбурга–Ландау

А. Н. Куликов, Д. А. Куликов

Ярославский государственный университет, Ярославль, Россия

anat_kulikov@mail.ru

Одним из базовых уравнений нелинейной динамики принято считать уравнение Гинзбурга–Ландау [1–3]

$$u_t = (\alpha + i\beta)u - (1 + ic)u^2\overline{u} + (d_1 + id_2)\Delta u, \tag{1}$$

где $u = u(t, x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $n \in N$, $\alpha, \beta, c, d_1, d_2 \in R$, $d_1 \geq 0$, Δ — оператор Лапласа. Рассматривались его различные модификации. Например, заменялось нелинейное слагаемое [4]. Рассмотрим еще один вариант модификации

$$u_t = u - (1 + ic)u^2\overline{u} + idu_{xxxx}, \qquad d > 0, \quad x \in R. \tag{2}$$

Уравнение (2) дополним периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \tag{3}$$

Краевая задача (2), (3) имеет счетное семейство решений

$$u_n(t,x) = \exp(i(\sigma_n t + nx)), \qquad n \in N, \quad \sigma_n = dn^4 - c.$$

Теорема 1. *Решение $u_n(t,x)$ устойчиво, если $d(1+6n^2) > 2c$, и оно неустойчиво, если $d(1+6n^2) < 2c$.*

Критический случай в задаче об устойчивости по линейному (первому) приближению реализуется при $d = d_n = 2c/(1+6n^2)$. Положим $d = d_n(1-\varepsilon)$, $|\varepsilon| \ll 1$. При таком выборе d, опираясь на метод квазинормальных форм [5], вопрос об изучении структуры окрестности бегущей волны можно свести к рассмотрению системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y_1' = \delta y_1 - (l_1 y_1 - l_2 y_2)(y_1^2 + y_2^2), \qquad y_2' = \delta y_2 - (l_2 y_1 + l_1 y_2)(y_1^2 + y_2^2), \quad (4)$$

где $y_j = y_j(s)$, $j = 1, 2$, $s = \varepsilon t$, $\delta = \operatorname{sign}(\varepsilon)$. Для коэффициентов нормальной формы $l_j = l_j(n, c)$ могут быть приведены явные формулы.

Теорема 2. *Существует такое $\varepsilon_n > 0$, что при всех $|\varepsilon| < \varepsilon_n$ краевая задача* (2), (3) *имеет двумерный инвариантный тор $T_2(n, \varepsilon)$, бифурцирующий от волны с номером n, если $l_1(n,c)\varepsilon > 0$. Он устойчив, если $\varepsilon > 0$ ($l_1(n,c) > 0$), и седловой, если $\varepsilon < 0$ ($l_1(n,c) < 0$).*

Для решений на торе $T_2(n, \varepsilon)$ можно привести асимптотические формулы, а знак $l_1(n,c)$ достаточно просто исследуется.

Отметим, что результаты, относящиеся к устойчивости и бифуркациям бегущих волн для краевой задачи (2), (3), отличаются от аналогичных результатов для традиционного варианта уравнения Гинзбурга–Ландау. Так, если рассмотреть уравнение (1) при $n = 1$, $d_1 = 0$, то краевая задача (1), (3) имеет счетное семейство решений типа периодических по t бегущих волн, но все эти решения будут одновременно устойчивы или неустойчивы [6].

Список литературы

1. *Дразин Ф.* Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит, 2005.
2. *Bartuccelli M., Constantin P., Doering R., Gisselfalt M.* On the possibility of soft and hard turbulence in the complex Ginzburg–Landau equation // Physica D. 1990. V. 44, N 3. P. 421–444.
3. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Подлазов А.В.* Нелинейная динамика. М.: Комкнига, 2006.

4. *Scheuer J., Malomed B.A.* Stable and chaotic solutions of Ginzburg–Landau equation with periodic boundary conditions // Physica D. 2002. V. 161, N 3. P. 102–115.
5. *Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2005.
6. *Куликов А.Н., Куликов Д.А.* Локальные бифуркации плоских бегущих волн обобщенного кубического уравнения Шредингера // Диф. уравнения. 2010. Т. 46, № 9. Р. 1290–1299.

Задача синтеза управлений по данным финитных наблюдателей*

А. Б. Куржанский, П. А. Точилин

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

kurzhans@mail.ru, paultoch@mail.ru

Доклад посвящен решению задачи синтеза управлений по данным наблюдателей, обрабатывающих доступные измерения текущей динамики системы в условиях неопределенных возмущений (см. [1, 2]).

Движение системы описывается при помощи уравнений

$$\dot{x} = f_1(t, x, u) + f_2(t, x, v), \qquad t \geq t_0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ — вектор управляющих параметров, $v \in \mathbb{R}^k$ — вектор помех динамики. Уравнения, описывающие работу наблюдателей, имеют следующий вид:

$$y(t) = g(t, x(t)) + \xi(t), \qquad t \in T \subset [t_0, \vartheta], \tag{2}$$

где $y(t) \in \mathbb{R}^r$, $\xi(t) \in \mathbb{R}^r$ — вектор помех наблюдения, T — множество моментов наблюдения (например, заданный интервал, или множество непересекающихся интервалов, либо дискретное множество точек, заданных или случайных). Рассмотрение различных наблюдателей является ключевым моментом для современных задач, отражающих как

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00589-а) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг.” (контракт 16.740.11.0426 от 26.11.2010).

модели инновации в технологиях самих измерений, так и коммуникационную природу средств передачи результатов измерений.

В данном сообщении рассматриваются помехи, для которых заранее известны лишь поточечные геометрические ограничения: $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$, $\xi(t) \in \mathcal{R}(t)$. (Задачи со случайными измерениями указаны в докладе [3].) Управления также удовлетворяют геометрическим ограничениям: $u = u(t, \cdot) \in \mathcal{P}(t)$. Такие управления могут быть синтезированы по данным доступных наблюдений в режиме реального времени. При этом цель управления состоит в приведении системы в окрестность целевого множества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ *в пределах заданного интервала времени*, например $[\vartheta - \sigma, \vartheta]$, $\sigma < \vartheta - t_0$, а также если необходимо, то и в удержании движения в этой окрестности в течение определенного дальнейшего периода, невзирая на реализовавшиеся заранее неизвестные помехи.

Рассматриваемая задача синтеза управлений по результатам измерений может быть разбита на две части [1, 2]. Первая часть представляет собой конечномерную задачу гарантированного оценивания, решение которой осуществляет финитный "наблюдатель", вычисляющий *обобщенную текущую позицию системы*. Эта позиция может, например, представлять собой *информационную функцию* цены либо *информационное множество*, представимое в виде множества уровня этой функции цены (ее множество Лебега). Для описания динамики обобщенной позиции используются эволюционные уравнения в частных производных типа Гамильтона–Якоби–Беллмана либо типа интегральной воронки для дифференциальных включений.

Вторую часть формально составляет бесконечномерная задача синтеза управлений при неопределенности в классе обобщенных позиций, решаемая при помощи уравнений типа Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса (ГЯБА). Решение этих уравнений — задача непростая, однако оно может быть сведено целиком к конечномерным процедурам, позволяющим избежать прямого интегрирования гамильтоновых уравнений. Когда система (1), (2) линейна, последнее достигается при помощи методов теории двойственности нелинейного анализа. В общем случае нелинейной динамики (1), (2) вычисления можно упростить за счет использования принципа сравнения [6, 7], позволяющего сопоставить исходным уравнениям ГЯБА менее сложные соотношения.

Для линейной выпуклой системы с компактными ограничениями предложены конкретные методы *устойчивых вычислений*. Они состоят в последовательном построении обобщенной позиции по данным наблюдений, обрабатываемым соответствующим многозначным наблюдателем, и далее в построении слабо инвариантных множеств для системы с помехами в классе обобщенных позиций, но уже без наблюдений. Эти множества затем используются для нахождения управлений по одной из принятых схем теории управления (см. [5, 1]). Для приближенного расчета информационных и слабо инвариантных множеств используется аппарат эллипсоидального исчисления. В качестве иллюстрации рассмотрены примеры решения задачи синтеза управлений. Результаты численного моделирования приведены для различных типов помех (стохастических и детерминированных), а также для разных структур наблюдателей. Показано, как при этом качественно различаются решения.

Список литературы

1. *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Optimization of output feedback control under set-membership uncertainty // J. Optim. Theory Appl. 2011. V. 151, N 1. P. 11–32.
2. *Куржанский А.Б., Точилин П.А.* К задаче синтеза управлений при неопределенности по данным финитных наблюдателей // Диф. уравнения. 2011. Т. 47, № 11. С. 1599–1607.
3. *Kurzhanski A.B., Digailova I.A.* Output feedback observers and control under non-Gaussian types of noise // MTNS-2010. Hungary: Elsevier, 2010. P. 69–72.
4. *Krasovski A.N., Krasovski N.N.* Control under lack of information. Boston: Birkhäuser, 1995.
5. *Krasovski N.N., Subbotin A.I* Game-theoretical control problems. Springer, 1988.
6. *Kurzhanski A.B.* Hamiltonian techniques for the problem of set-membership state estimation // Int. J. Adaptive Control Signal Process. 2010. V. 25, N 3. P. 249–263.
7. *Куржанский А.Б.* Дифференциальные игры наблюдения // ДАН СССР. 1972. Т. 207, № 3. С. 527–530.

Решения гипергеометрического типа уравнений Шлезингера*

В. П. Лексин

Московский государственный областной социально-гуманитарный институт, Коломна, Россия

lexine@mccme.ru

Уравнение Шлезингера представляет собой пфаффову систему нелинейных дифференциальных уравнений на матрицы $B_1(a), \ldots, B_n(a)$ одного размера $p \times p$

$$\mathrm{d}\, B_i(a) = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} [B_i(a), B_j(a)] \frac{\mathrm{d}(a_i - a_j)}{a_i - a_j}, \tag{1}$$

где $[B_i, B_j] = B_iB_j - B_jB_i$ обозначает обычный коммутатор матриц и $n \geq 2$. Матрицы $B_i(a)$, $i = 1, \ldots, n$, являются функциями на комплексном линейном пространстве $\mathbb{C}^n$, и дифференциал в системе (1) берется по всем переменным $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$.

Уравнения Шлезингера изучались со многих точек зрения, в частности, основным их приложением является изучение специальных видов изомонодромных деформаций фуксовых систем на сфере Римана. На этом пути были найдены многие свойства решений этих уравнений, обстоятельное изложение которых можно найти в книге [1]. Для размера 2×2 матриц $B_i(a)$, $i = 1, \ldots, n$, система (1) имеет редукцию к уравнению Пенлеве VI, а через него к другим уравнениям Пенлеве, что указывает на существование новых трансцендентных решений уравнений Шлезингера. Однако уравнение Шлезингера при некоторых ограничениях на матрицы $B_i(a)$, $i = 1, \ldots, n$, или на монодромию связанного с ним изомонодромного семейства фуксовых систем обладает только классическими решениями (рациональными, алгебраическими, гипергеометрическими решениями) [2]. В работе [2] вопрос о типе решений уравнений Шлезингера рассмотрен с точки зрения дифференциальной теории Галуа, а именно: в какие расширения поля рациональных функций попадают решения уравнения Шлезингера при различного типа ограничениях на уравнение или на его начальные условия.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ.

Мы рассматриваем решения уравнения Шлезингера (1) в классе верхнетреугольных матриц $B_i(a)$, $i = 1, \ldots, n$. Для верхнетреугольных (2×2)-матриц

$$B_i(a) = \begin{pmatrix} \lambda_i^1 & b_i(a) \\ 0 & \lambda_i^2 \end{pmatrix}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

уравнение Шлезингера является линейной многомерной фуксовой системой на $\mathbb{C}^n$, которая совпадает с системой Жордана–Похгаммера [3–6], и ее базисные решения $b_i(a)$ имеют интегральное представление

$$b_i^j(a_1, \ldots, a_n) = \lambda_i \int_{\gamma_j} (t - a_1)^{\lambda_1} \ldots (t - a_n)^{\lambda_n} \frac{\mathrm{d}\, t}{t - a_i}, \qquad j = 1, \ldots n.$$

В общем случае верхнетреугольные уравнения Шлезингера совпадают с интегрируемыми линейными рекуррентными неоднородными фуксовыми системами [2, 5]. Мы указываем интегральные представления их решений в терминах итерированных интегралов Чена и в частных случаях в терминах кратных интегралов.

Затем мы обобщаем полученные интегральные представления для решений верхнетреугольных уравнений Джимбо–Мива–Мори–Сато (JMMS equations). Последние являются обобщением уравнений Шлезингера на случай изомонодромных деформаций Мальгранжа иррегулярных линейных мероморфных систем на сфере Римана.

Список литературы

1. *Болибрух А.* Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: МЦНМО, 2009.
2. *Dubrovin B., Mazzocco M.* On the reductions and classical solutions of the Schlesinger equations // Differential equations and quantum groups: Andrey A. Bolibrukh memorial volume / Ed. by D. Bertrand et al. Strasbourg: IRMA, 2007. P. 157–187. (IRMA Lect. Math. Theor. Phys.).
3. *Kapovich M., Millson J.* Quantization of bending deformations of polygons in $\mathbb{E}^3$, hypergeometric integrals and the Gassner representation // Can. Math. Bull. 2001. V. 44. P. 36–60.
4. *Kohno T.* Linear representations of braid groups and classical Yang–Baxter equations // Contemp. Math. 1988. V. 78. P. 339–363.
5. *Leksin V.P.* Hypergeometric isomonodromic deformations of Fuchsian systems // Recent developments in generalized analytic functions and their applications: Proc. Int. Conf. / Ed. by G. Giorgadze. 2011. P. 106–111.
6. *Varchenko A.* Special functions, KZ type equations, and representation theory. Providence, RI: Amer. Math. Soc, 2003. (CBMS Reg. Conf. Ser. Math.; No. 98).

О бифуркациях потери симметрии в обратимых системах*

Л. М. Лерман

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

lermanl@mm.unn.ru

В докладе обсуждаются бифуркации обратимых систем, приводящие от симметричных режимов к несимметричным с рождением пар аттрактор-репеллер различного типа. Сначала дается краткий обзор известных результатов по таким бифуркациям для векторных полей и диффеоморфизмов, затем будут представлены новые результаты, связанные с рождением сложных режимов. Часть представленных в докладе результатов получена совместно с Д.В. Тураевым (Imperial College, London, UK).

Конечномерные поводыри функционально-дифференциальных систем**

Н. Ю. Лукоянов, А. Р. Плаксин

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия
Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

nyul@imm.uran.ru, plaksin_anton@inbox.ru

Эта работа, примыкающая к [1–3] и посвященная процедурам управления с поводырем [4], инициирована работой [5], в которой предложено использовать в качестве поводырей систем дифференциальных уравнений с запаздыванием аппроксимирующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений, аналогичные [1–3]. Цель работы — обоснование подобной процедуры управления для достаточно общего класса функционально-дифференциальных систем запаздывающего типа.

Пусть уравнение движения динамической системы имеет вид

$$\begin{gathered}\dot{x}[t] = f\big(t, x_t[\cdot], u[t], v[t]\big), \quad t \in [t_0, T], \quad x[t] \in \mathbb{R}^n, \quad u[t] \in \mathbb{U}, \quad v[t] \in \mathbb{V}, \\ x_{t_0}[\vartheta] = x[t_0 + \vartheta] = z[\vartheta], \quad \vartheta \in [-h, 0],\end{gathered} \tag{1}$$

где t — текущее время, $x[t]$ — вектор текущего состояния, $h = \text{const} > 0$, $x_t[\cdot]$ — история движения на $[t-h, t]$, причем $x_t[\vartheta] = x[t+\vartheta]$, $\vartheta \in [-h, 0]$. Начальная история $z[\cdot]$ принадлежит компакту $Z \subset C = C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$, $u[t]$ — управляющее воздействие, $v[t]$ — воздействие помехи, $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ — компакты конечномерных пространств. Допустимы измеримые реализации $u[t_0[\cdot]T) = \{u[t] \in \mathbb{U},\ t_0 \le t < T\}$ и $v[t_0[\cdot]T) = \{v[t] \in \mathbb{V},\ t_0 \le t < T\}$. Решение задачи (1) понимается в смысле Каратеодори. При этом полагаем выполненными следующие условия.

(У1) Отображение $f\colon [t_0, T] \times C \times \mathbb{U} \times \mathbb{V} \mapsto \mathbb{R}^n$ непрерывно.

(У2) Существует константа $a > 0$ такая, что для любых $t \in [t_0, T]$, $w[\cdot] \in C$, $u \in \mathbb{U}$ и $v \in \mathbb{V}$ справедлива оценка

$$\|f(t, w[\cdot], u, v)\| \le a\Big(1 + \max_{\vartheta \in [-h,0]} \|w[\vartheta]\|\Big).$$

(У3) Для любого компакта $D \subset C$ существует константа $\lambda(D) > 0$ такая, что для всех $t \in [t_0, T]$, $u \in \mathbb{U}$, $v \in \mathbb{V}$ и $w'[\cdot], w''[\cdot] \in D$ имеет место неравенство

$$\|f(t, w'[\cdot], u, v) - f(t, w''[\cdot], u, v)\| \le \lambda(D) \max_{\vartheta \in [-h,0]} \|w'[\vartheta] - w''[\vartheta]\|.$$

(У4) Для любых $t \in [t_0, T]$, $w[\cdot] \in C$ и $s \in \mathbb{R}^n$

$$\min_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \big\langle f(t, w[\cdot], u, v), s\big\rangle = \max_{v \in \mathbb{V}} \min_{u \in \mathbb{U}} \big\langle f(t, w[\cdot], u, v), s\big\rangle.$$

Здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение векторов.

Для $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим следующую систему, аппроксимирующую (1):

$$\begin{aligned}&\dot{y}^{[0]}[t] = f\big(t, S(Y[t])[\cdot], \tilde{u}[t], \tilde{v}[t]\big), \quad y^{[0]}[t_0] = z[0], \quad t \in [t_0, T], \\ &\dot{y}^{[i]}[t] = \big(y^{[i-1]}[t] - y^{[i]}[t]\big)/\Delta h, \qquad y^{[i]}[t_0] = z[-i\Delta h], \quad i = 1, 2, \ldots, m,\end{aligned} \tag{2}$$

где $y^{[i]}[t] \in \mathbb{R}^n$, $i = 0, 1, \ldots, m$; $Y[t] = \big(y^{[0]}[t], y^{[1]}[t], \ldots, y^{[m]}[t]\big)$; $\Delta h = h/m$; $S(Y[t])[\cdot]$ — линейный сплайн на $[-h, 0]$ с узлами $-i\Delta h$ и со значениями в узлах $S(Y[t])[-i\Delta h] = y^{[i]}[t]$, $i = 0, 1, \ldots, m$; $\tilde{u}[t] \in \mathbb{U}$, $\tilde{v}[t] \in \mathbb{V}$.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-00001а, 10-01-00963а "Поволжье").

**Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН "Динамические системы и теория управления", а также при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00290).

Между системами (1) и (2) осуществим взаимное прицеливание. А именно, реализации $u[t_0[\cdot]T)$ и $\tilde{v}[t_0[\cdot]T)$ будем формировать по принципу обратной связи по шагам разбиения

$$\Delta_\delta = \big\{\tau_j\colon\ \tau_1 = t_0,\ 0 < \tau_{j+1} - \tau_j < \delta,\ j = 1, 2, \ldots, k,\ \tau_{k+1} = T\big\}$$

как кусочно постоянные функции, полагая

$$u[t] = u_j^*, \qquad \tilde{v}[t] = \tilde{v}_j^*, \qquad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \qquad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{3}$$

где

$$u_j^* \in \arg\min_{u\in\mathbb{U}}\Big\{\max_{v\in\mathbb{V}}\big\langle f\big(\tau_j, x_{\tau_j}[\cdot], u, v\big),\, x[\tau_j] - y^{[0]}[\tau_j]\big\rangle\Big\},$$

$$\tilde{v}_j^* \in \arg\max_{\tilde{v}\in\mathbb{V}}\Big\{\min_{\tilde{u}\in\mathbb{U}}\big\langle f\big(\tau_j, S(Y[\tau_j])[\cdot], \tilde{u},\, \tilde{v}\big),\, x[\tau_j] - y^{[0]}[\tau_j]\big\rangle\Big\}.$$

Теорема. *При указанных условиях для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $M = M(\varepsilon) > 0$ и $\delta^* = \delta^*(\varepsilon) > 0$, что, каковы бы ни были $m > M$ и $0 < \delta < \delta^*$, для любой начальной функции $z[\cdot] \in Z$ и любых допустимых реализаций $\tilde{u}[t_0[\cdot]T)$ и $v[t_0[\cdot]T)$ при реализациях $u[t_0[\cdot]T)$ и $\tilde{v}[t_0[\cdot]T)$, формируемых согласно правилу* (3) *по шагам разбиения Δ_δ, для решений задач* (1) *и* (2) *будет справедлива оценка $\big\|x[t] - y^{[0]}[t]\big\| \le \varepsilon$, $t \in [t_0, T]$.*

Кроме того, указанная процедура взаимного отслеживания устойчива по отношению к динамическим и информационным возмущениям.

Список литературы

1. *Красовский Н.Н.* Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // ПММ. 1964. Т. 28, №4. С. 716–724.
2. *Репин М.Ю.* О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными динамическими системами // ПММ. 1965. Т. 29, №2. С. 226–235.
3. *Куржанский А.Б.* К аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Диф. уравнения. 1967. Т. 3. С. 2094–2107.
4. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
5. *Красовский Н.Н., Котельникова А.Н.* Стохастический поводырь для объекта с последействием в позиционной дифференциальной игре // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, №2. С. 97–104.

Оптимальное гауссово приближение в теории линейного отклика*

Н. Б. Мельников

Центральный экономико-математический институт РАН; МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

melnikov@cs.msu.su

Рассматривается система взаимодействующих электронов в периодической кристаллической решетке. Оператор спина на узле $\mathbf{R}_j$ определяется соотношением

$$\mathbf{s}_j = \int_{\Omega_j} \mathbf{s}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{r},$$

где Ω_j — ячейка Вигнера–Зейтца с центром в $\mathbf{R}_j$. Оператор спиновой плотности имеет вид

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \Psi^\dagger(\mathbf{r})\big(\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\big)\Psi(\mathbf{r}),$$

где $\Psi^\dagger(\mathbf{r})$ и $\Psi(\mathbf{r})$ — спинорные полевые операторы, а σ^α — матрицы Паули, $\alpha = x, y, z$.

В теории линейного отклика магнитная восприимчивость $\bar{\boldsymbol{\chi}}_{\mathbf{q}}(\omega)$, выраженная в единицах $\frac{1}{2}(g\mu_{\mathrm{B}})^2$, задается формулой (см., например, [1])

$$\bar{\chi}^\alpha_{\mathbf{q}}(\omega) = 2\mathrm{i}\int_0^\infty \big\langle[s^\alpha_{\mathbf{q}}(t), s^\alpha_{-\mathbf{q}}]\big\rangle\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Здесь усреднение в большом каноническом ансамбле определено соотношением $\langle\ldots\rangle = \mathrm{Tr}(\ldots\mathrm{e}^{-H'/T})/(\mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-H'/T})$, H' — гамильтониан системы, T — температура (в энергетических единицах); $s^\alpha_{\mathbf{q}}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H't}s^\alpha_{\mathbf{q}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H't}$ — оператор спина $s^\alpha_{\mathbf{q}} = \sum_j s^\alpha_j\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{q}\mathbf{R}_j}$ в гейзенберговском представлении; квадратные скобки означают коммутатор, а под ω понимается предел из верхней полуплоскости $\omega + 0\mathrm{i}$.

При помощи аналитического продолжения запаздывающая двухвременная функция Грина преобразуется к температурной функции Грина (см., например, [2, 3]). Применительно к восприимчивости (1) имеем

$$\bar{\chi}^\alpha_{\mathbf{q}}(\omega) = 2\int_0^{1/T}\big\langle\Delta s^\alpha_{\mathbf{q}}(\tau)\Delta s^\alpha_{-\mathbf{q}}\big\rangle\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_m\tau}\,\mathrm{d}\tau\Big|_{\mathrm{i}\omega_m\to\omega+0\,\mathrm{i}},$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-00795, 10-01-96003р) и Минобрнауки РФ (программа 1.1016.2011).

где $\Delta s^\alpha_{\mathbf{q}}(\tau) = \mathrm{e}^{\tau' H'} \Delta s^\alpha_{\mathbf{q}} \, \mathrm{e}^{-\tau' H'}$ — оператор приращения $\Delta s^\alpha_{\mathbf{q}} = s^\alpha_{\mathbf{q}} - \langle s^\alpha_{\mathbf{q}} \rangle$ в “гейзенберговском” представлении относительно “времени” $\tau \in [0, 1/T]$, а $\omega_m = 2\pi m T$ — термодинамическая “частота”.

Метод функционального интегрирования [4, 5] позволяет перейти к системе невзаимодействующих электронов в поле $V = (V_1(\tau), V_2(\tau), \ldots)$, флуктуирующем в пространстве и “времени”. В оптимальном гауссовом приближении теории спиновых флуктуаций [6, 7] и его обобщении [8] удается доказать следующее соотношение.

Теорема. *Магнитная восприимчивость $\bar\chi^\alpha_{\mathbf{q}m}$ вычисляется по формуле*

$$\bar\chi^\alpha_{\mathbf{q}}(\omega) = \frac{\chi^\alpha_{\mathbf{q}}(\mathrm{i}\omega_m)}{1 - u\chi^\alpha_{\mathbf{q}}(\mathrm{i}\omega_m)}\bigg|_{\mathrm{i}\omega_m \to \omega + 0\,\mathrm{i}}.$$

Здесь u — константа межэлектронного взаимодействия, а неусиленная восприимчивость задается выражением

$$\chi^\alpha_{\mathbf{q}}(\mathrm{i}\omega_m) = -\frac{1}{2}\left\langle \frac{\partial^2 F_1(V)}{\partial V^\alpha_{\mathbf{q}m} \partial V^\alpha_{-\mathbf{q}-m}} \right\rangle, \qquad (2)$$

где коэффициенты Фурье определены соотношениями

$$V^\alpha_{\mathbf{q}}(\tau) = \frac{1}{N_\mathrm{a}} \sum_j V^\alpha_j(\tau)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{q}\mathbf{R}_j}, \qquad V^\alpha_{\mathbf{q}m} = T \int_0^{1/T} V_{\mathbf{q}}(\tau)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_m \tau}\, \mathrm{d}\tau,$$

$F_1(V)$ — свободная энергия невзаимодействующих электронов в поле V и $\langle \ldots \rangle$ — среднее по конфигурациям флуктуирующего поля.

В формуле (2) проводится усреднение по различным конфигурациям поля V, в отличие от формулы, получаемой методом седловой точки:

$$\chi^\alpha_{\mathbf{q}}(\mathrm{i}\omega_m) = -\frac{1}{2}\, \frac{\partial^2 F_1(\bar V)}{\partial V^\alpha_{\mathbf{q}m} \partial V^\alpha_{-\mathbf{q}-m}},$$

где правая часть вычисляется в среднем поле $\bar V \equiv \langle V \rangle$ (см. [7, 8]).

Список литературы

1. *Kim D.J.* New perspectives in magnetism of metals. New York: Kluwer Academic, 1999.
2. *Зубарев Д.Н.* Двухвременные функции Грина в статистической физике // УФН. 1960. Т. 71, №1. С. 71–116.
3. *Абрикосов А.А., Горьков Л.П., Дзялошинский И.Е.* Методы квантовой теории поля в статистической физике. М.: Физматгиз, 1962.
4. *Стратонович Р.Л.* Об одном методе вычисления квантовых функций распределения // ДАН СССР. 1957. Т. 115, № 6. С. 1097–1100.
5. *Hubbard J.* Calculation of partition functions // Phys. Rev. Lett. 1959. V. 3, N 2. P. 77–78.
6. *Резер Б.И., Гребенников В.И.* Температурная зависимость магнитных свойств ферромагнитных металлов с учетом динамики и нелокальности спиновых флуктуаций // ФММ. 1998. Т. 85, №1. С. 30–42.
7. *Мельников Н.Б., Резер Б.И.* Оптимальное гауссово приближение в теории флуктуирующего поля // Тр. МИАН. 2010. Т. 271. С. 159–180.
8. *Melnikov N.B., Reser B.I., Grebennikov V.I.* Spin-fluctuation theory beyond Gaussian approximation // J. Phys. A: Math. Theor. 2010. V. 43. Paper 195004.

Принцип сравнения в сингулярно возмущенных задачах реакция-адвекция-диффузия*

Н. Н. Нефедов

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

nefedov@phys.msu.ru

В докладе представлены новые результаты по изучению стационарных и нестационарных решений с пограничными и внутренними переходными слоями (так называемых контрастных структур и фронтов соответственно) начально-краевых задач для сингулярно возмущенного параболического уравнения, называемого в приложениях уравнением реакция-диффузия-адвекция:

$$N \equiv \varepsilon^2 \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} - f(u, \nabla u, x, \varepsilon), \qquad x \in \mathcal{D} \subset R^N, \quad t > 0. \qquad (1)$$

Полученные результаты представляют собой дальнейшее развитие работ [1–4] на новые классы задач как для построения формальных асимптотических приближений, так и для создания общей схемы асимптотического метода дифференциальных неравенств. В ряде работ автора доклада (см. [3] и ссылки в этой работе) было показано, что реализация асимптотического метода дифференциальных неравенств связана

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00319).

с положительной обратимостью операторов (в соответствующих классах), участвующих в построении асимптотики. Результатом применения предложенного метода является построение асимптотических нижнего и верхнего решений задачи для уравнения (1).

Определение. Мы называем верхнее решение β и нижнее решение α асимптотическими порядка q, если они удовлетворяют неравенствам

$$N\beta \leq -c\varepsilon^q, \qquad N\alpha \geq c\varepsilon^q, \qquad x \in \mathcal{D},$$

где c — некоторая положительная постоянная.

Обозначим через L линеаризацию N на стационарном решении и через H следующую характеристику нелинейности f:

$$H \equiv f(\beta, \nabla\beta, x, \varepsilon) - f(\alpha, \nabla\alpha, x, \varepsilon) - L(\beta - \alpha).$$

Пусть выполнены следующие условия.

(A_1) Существуют асимптотические порядка q верхнее β и нижнее α решения задачи для (1).

(A_2) $|H| \leq c\varepsilon^p$.

(A_3) $p \geq q$.

Теорема. *Пусть выполнены условия* (A_1)–(A_3). *Тогда для достаточно малых* ε *существует решение* $u(x, \varepsilon)$ (1), *которое асимптотически устойчиво по Ляпунову и локально единственно по крайней мере на отрезке* $[\alpha, \beta]$.

В докладе этот подход продемонстрирован на некоторых важных для приложений и теории сингулярных возмущений задачах. Обсуждаются также распространения этого метода на периодические параболические задачи, на некоторые классы интегро-дифференциальных уравнений и систем уравнений реакция-диффузия-адвекция вида (1). Развиваемый подход позволяет описать движение фронтов в различных классах этих уравнений, что, в свою очередь, позволяет исследовать область устойчивости контрастных структур, а также рассмотреть проблему стабилизации решений начально-краевых задач для этих классов уравнений.

Список литературы

1. *Нефедов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Диф. уравнения. 1995. Т. 31, №7. С. 1142–1149.

2. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями // Тр. МИАН. 2010. Т. 268. С. 268–283.
3. *Нефедов Н.Н.* Общая схема асимптотического исследования устойчивых контрастных структур // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6, №1. С. 181–186.
4. *Нефедов Н.Н., Никитин А.Г., Петрова М.А., Рекке Л.* Движущиеся фронты в интегро-параболических уравнениях реакция-адвекция-диффузия // Диф. уравнения. 2011. Т. 47, №9. С. 1305–1319.

О задаче быстродействия для трехмерных и четырехмерных управляемых систем*

М. С. Никольский

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

mni@mi.ras.ru

Доклад посвящен изучению свойства релейности оптимальных по быстродействию управлений для нелинейных управляемых систем, заданных в фазовом пространстве размерности 3 или 4. Свойство релейности оптимальных по быстродействию управлений представляет большой интерес для приложений в силу простоты их технической реализации. Более того, это свойство существенно упрощает практическое нахождение соответствующих оптимальных управлений. Важные теоремы о релейности оптимальных по быстродействию управлений в линейном случае содержатся в [1, гл. 3]. В работах [1–4] для линейного случая были получены оценки сверху для числа точек переключения релейных оптимальных по быстродействию управлений. Для нелинейных управляемых объектов получение общих результатов о релейности оптимальных по быстродействию управлений наталкивается на большие трудности и требует развития нового математического аппарата (см., например, [5]). В настоящей работе мы используем другой подход, связанный с работой Е.Л. Тонкова [2], в которой используется теория

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-12112-офи-м-2011).

неосцилляции решений линейных уравнений n-го порядка. Нами были найдены эффективные достаточные условия, при которых удается использовать предшествующие результаты по линейным нестационарным управляемым системам (см. [1, 2, 4]). Рассмотрены примеры нелинейных управляемых систем, для которых выполняются найденные достаточные условия. Отметим, что настоящая работа продолжает исследования статьи [6], посвященные нелинейным 2-мерным управляемым системам.

Список литературы

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теории оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
2. *Тонков Е.Л.* Неосцилляция и число точек переключения в линейно нестационарной системе, оптимальной по быстродействию // Диф. уравнения. 1973. Т. 9, №12. С. 2180–2185.
3. *Смольникова И.А.* Оценка сверху числа действительных нулей конечномерного семейства квазиполиномов на конечном отрезке // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. 1977. №2. С. 50–55.
4. *Никольский М.С.* О линейных нестационарных управляемых процессах // Тр. МИАН. 2008. Т. 262. С. 196–201.
5. *Vakhrameev S.A.* Geometrical and topological methods in optimal control theory // J. Math. Sci. 1995. V. 76. N 5. P. 2555–2719.
6. *Никольский М.С.* О задаче быстродействия для двумерных управляемых систем // Диф. уравнения. 2010. Т. 46, №11. С. 1631–1638.

Асимптотики и асимптотические разложения решений пятого уравнения Пенлеве*

А. В. Парусникова

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

parus-a@mail.ru

Рассмотрим пятое уравнения Пенлеве, которое имеет вид

$$w'' = \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\right)(w')^2 - \frac{w'}{z} + \frac{(w-1)^2}{z^2}\left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right) + \frac{\gamma w}{z} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1}, \tag{1}$$

где α, β, γ, δ — комплексные параметры, z — независимая, w — зависимая комплексные переменные. Уравнение (1) имеет две особые точки $z = 0$ и $z = \infty$.

В этой работе методами степенной геометрии [1, 2] ищем все асимптотические разложения решений уравнения (1) при $z \to 0$ и при $z \to \infty$ вида

$$w = c_r(z)z^r + \sum_{s\in\mathbf{K}} c_s(z)z^s, \tag{2}$$

где $c_r(z), c_s(z), r, s \in \mathbb{C}$, $\mathbf{K} \subset \{s \mid \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} r\}$ для разложений при $z \to 0$ и $\mathbf{K} \subset \{s \mid \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} r\}$ для разложений при $z \to \infty$; множество $\mathbf{K}$ счетно.

Различаем пять типов разложений (2):

1) $c_r(z)$ и $c_s(z)$ — постоянные;
2) $c_r(z)$ — постоянный коэффициент, $c_s(z)$ — многочлены от $\ln z$;
3) $c_r(z)$ и $c_s(z)$ — ряды по убывающим степеням $\ln z$;
4) $c_r(z)$ и $c_s(z)$ — ряды по степеням z^i, в c_r содержится счетное число слагаемых и показатели степеней z^i ограничены либо сверху, либо снизу;
5) $c_r(z)$ — конечная сумма степеней z^i с комплексными коэффициентами и $c_s(z)$ — ряды по степеням z^i.

Также при $z \to \infty$ в этой работе ищем разложения

$$w = z^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(u)u^{-k}, \tag{3}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00023).

где $u = z^\beta$, α и $\beta = \text{const} \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$. Если $\varphi_k(u)$ — комплексно-периодические функции от u, т.е. могут быть разложены в ряды вида $\varphi_k(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_{kn} e^{n\lambda u}$, $\lambda, \varphi_{kn} = \text{const} \in \mathbb{C}$, будем называть разложения (3) *степенно-периодическими*; если в разложении (3) $\varphi_k(u)$ — эллиптические функции от u, будем называть разложения (3) *степенно-эллиптическими*.

При $z \to 0$ получено 30 семейств разложений решений уравнения (1): 22 из них получены из опубликованных разложений решений шестого уравнения Пенлеве [2], среди остальных восьми семейств одно было известно [3], еще два могут быть получены из разложений решений третьего уравнения Пенлеве [4]; новыми являются три семейства разложений типа 5) и два семейства разложений типа 3).

При $z \to \infty$ найдено 10 разложений решений уравнения (1) в степенные ряды (разложения типа 1)): шесть из них (по целым степеням z) были известны [3, 8], четыре (по полуцелым) новые. Для каждого из этих разложений (кроме точного решения $w = 1$) найдены экспоненциальные добавки вида $b(z)Ce^{\varphi(z)}$, где C — произвольная постоянная, $\varphi'(z)$, $b(z)$ — разложения типа 1).

Также при $z \to \infty$ получены два семейства эллиптических и четыре семейства степенно-периодических асимптотик решений уравнения.

В окрестности неособой точки уравнения получены 10 семейств разложений. Три разложения являются рядами Лорана, семь — ряды Тейлора.

Подробные выкладки и доказательства по этой работе см. в [5–7].

Список литературы

1. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН. 2004. Т. 59, № 3, С. 31–80.
2. *Брюно А.Д., Горючкина И.В.* Асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве // Тр. Моск. мат. о-ва. 2010. Т. 71. С. 6–118.
3. *Gromak V.I., Laine I., Shimomoura S.* Painleve differential equations in the complex plane. Berlin; New York: W. de Gruyter, 2002.
4. *Брюно А.Д., Гриднев А.В.* Нестепенные разложения решений третьего уравнения Пенлеве: Препринт. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2010. № 10.
5. *Брюно А.Д., Парусникова А.В.* Локальные разложения решений пятого уравнения Пенлеве // ДАН. 2011. Т. 438, № 4. С. 439–443.
6. *Брюно А.Д., Парусникова А.В.* Разложения решений пятого уравнения Пенлеве вблизи его неособой точки: Препринт. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2011. № 18.

7. *Брюно А.Д., Парусникова А.В.* Периодические и эллиптические асимптотики разложений решений пятого уравнения Пенлеве: Препринт. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2011. № 61.
8. *Брюно А.Д., Карулина Е.С.* Разложения решений пятого уравнения Пенлеве // ДАН. 2004. Т. 395, № 4. С. 439–444.

О некоторых линейных нестационарных задачах группового преследования*

Н. Н. Петров, Н. А. Соловьева

Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия

npetrov@udmnet.ru, solov_na@mail.ru

Приведены условия поимки в линейных нестационарных задачах группового преследования [1–4] в предположении, что фундаментальная матрица однородной системы является рекуррентной.

1. Постановка задачи. В пространстве R^k $(k \geq 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, \ldots, E_m$. Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, \qquad x_i(t_0) = x_i^0, \quad u_i \in V.$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$\dot{y}_j = A(t)y_j + v_j, \qquad y_j(t_0) = y_j^0, \quad v_j \in V,$$

где $x_i, y_j, u_i, v_j \in R^k$, $A(t)$ — непрерывная матричная функция, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей, $z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0$.

Предположение 1. Фундаментальная матрица $\Phi(t)$ системы $\dot{w} = A(t)w$, $\Phi(t_0) = E$, является рекуррентной на $[t_0, \infty)$, а $\dot{\Phi}(t)$ равномерно ограничена на $[t_0, \infty)$.

2. Поимка одного убегающего. Пусть $m = 1$, преследователи используют квазистратегии, условие поимки убегающего — $x_p(\tau) = y_1(\tau)$ при некоторых p, τ.

*Работа выполнена при финансовой поддержке программы РАН “Оптимальное управление”.

Теорема 1. *Пусть выполнено предположение* 1, *и пусть* $y_1^0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{x_1^0, \ldots, x_n^0\}$. *Тогда в игре* Γ *происходит поимка.*

3. Поимка скоординированных убегающих. Предполагается, что все убегающие используют одно и то же управление, условие поимки убегающего — $x_p(\tau) = y_q(\tau)$ при некоторых p, q, τ.

Теорема 2. *Пусть выполнено предположение* 1,

$$\operatorname{Int}\operatorname{co}\{x_1^0, \ldots, x_n^0\} \cap \operatorname{co}\{y_1^0, \ldots, y_m^0\} \neq \varnothing.$$

Тогда в игре Γ *происходит поимка хотя бы одного убегающего.*

Теорема 3. *Пусть* $m = 2$, *выполнено предположение* 1, *существуют множества*

$$J_1, J_2 \subset I_0, \qquad I_1, I_2 \subset I_0 \setminus (J_1 \cup J_2), \qquad I_1 \cap I_2 = \varnothing,$$

такие, что наборы

$$\{z_{i1}^0,\, i \in J_1,\, -c\}, \qquad \{z_{i2}^0,\, i \in J_2,\, c\},$$

$$\left\{z_{l1}^0,\, l \in J_1 \setminus (J_1 \cap J_2),\ z_{s2}^0,\, s \in J_2 \setminus (J_1 \cap J_2),\ z_{\alpha 1}^0,\, \alpha \in I_1,\ z_{\beta 2}^0,\, \beta \in I_2\right\}$$

образуют положительный базис, причем

$$|J_1| \geq k, \qquad |J_2| \geq k, \qquad |J_1^0| + |J_2^0| \geq k + 1,$$

где

$$c = y_1^0 - y_2^0, \qquad I_0 = \{1, \ldots, n\},$$

$$J_1^0 = (I_1 \cup J_1) \setminus (J_1 \cap J_2), \qquad J_2^0 = (I_2 \cup J_2) \setminus (J_1 \cap J_2).$$

Тогда в игре Γ *происходит поимка двух убегающих.*

4. Поимка заданного числа убегающих. Цель группы преследователей — “поймать” не менее чем q $(1 \leq q \leq m)$ убегающих при условии, что сначала убегающие выбирают свои управления сразу на $[t_0, \infty)$, а затем преследователи на основе информации о выборе убегающих выбирают свои управления и, кроме того, каждый преследователь может “поймать” не более одного убегающего.

Считаем, что $n \geq q$.

Теорема 4. *Пусть выполнены предположение* 1 *и следующее условие*: *для каждого* $s \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ *верно следующее*: *для любого множества* $N \subset \{1, \ldots, n\}$, $|N| = n - s$, *найдется такое множество* $M \subset \{1, \ldots, m\}$, $|M| = q - s$, *что для всех* $\beta \in M$

$$0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_{\alpha\beta}^0,\ \alpha \in N\}.$$

Тогда в игре Γ *происходит поимка* q *убегающих.*

Пример 1. Пусть $t_0 = 0$, $A(t) = \omega(t)E$, где

$$\omega(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \ \ t \in [0, 2\pi], \\ \sin t, & \text{если} \ \ t \notin [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Тогда фундаментальная матрица $\Phi(t)$ является рекуррентной и поэтому если начальные позиции удовлетворяют соответствующим условиям, то будут справедливы ранее сформулированные теоремы.

Список литературы

1. *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. М.: Наука, 1988. Т 2.
2. *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.
3. *Чикрий А.А.* Конфликтно-управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992.
4. *Благодатских А.И., Петров Н.Н.* Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Удмурт. ун-т, 2009.

Прямой метод исследования задач с дифференциальными включениями*

Е. С. Половинкин

Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Россия

polovinkin@mail.mipt.ru

В докладе развивается метод касательных конусов решения оптимизационных задач с дифференциальными включениями из $\mathbb{R}^n$ [1] на случай банаховых пространств.

1. Пусть E, E_1, E_2 — сепарабельные банаховы пространства. Обозначим через $\mathcal{P}(E)$ $(\mathcal{F}(E))$ множество всех непустых (замкнутых) подмножеств из E. Для невыпуклых множеств из E широко известны *нижний касательный конус* $T_{\mathrm{H}}(A; a)$, *верхний касательный конус* (иначе:

*Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. и РФФИ (проект 10-01-00139-а).

контингентный конус) $T_{\mathrm{B}}(A;a)$ и *касательный конус Кларка* $T_{\mathrm{C}}(A;a)$. Также используя понятие разности Минковского $A \overset{*}{-} B \doteq \{x \in E \mid x + B \subset A\}$ и следуя работам [2, 3], получаем другие касательные конусы. Например, это асимптотический нижний касательный конус $T_{\mathrm{AH}}(A;a) \doteq T_{\mathrm{H}}(A;a) \overset{*}{-} T_{\mathrm{H}}(A;a)$ и асимптотический верхний касательный конус $T_{\mathrm{AB}}(A;a)$. Конусы $T_L(A;a)$ при $L \in \{\mathrm{AH}, \mathrm{AB}\}$ выпуклы, замкнуты и справедливы включения $T_{\mathrm{C}}(A;a) \subset T_{\mathrm{AH}}(A;a) \subset T_{\mathrm{AB}}(A;a) \subset \subset T_{\mathrm{B}}(A;a)$.

Определение 1 [4, 2]. L-производной, где $L \in \{\mathrm{H}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{AH}, \mathrm{AB}\}$, отображения $F\colon E_1 \to \mathcal{P}(E_2)$ в точке $z_0 \in \overline{\operatorname{graph} F} \subset Z \doteq E_1 \times E_2$ называется многозначное отображение $D_L F(z_0)\colon E_1 \to \mathcal{P}(E_2)$, определяемое по формуле $D_L F(z_0)(u) \doteq \{v \in E_2 \mid (u,v) \in T_L(\operatorname{graph} F; z_0)\}$, $u \in E_1$.

Пусть $T = [t_0, t_1]$ — отрезок, $AC(T,E)$ — банахово пространство абсолютно непрерывных функций $f\colon T \to E$. Пусть $C_0 \subset E$ и $F\colon T \times E \to \to \mathcal{P}(E)$. Рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения

$$x'(t) \in F(t, x(t)), \qquad x(t_0) \in C_0, \quad t \in T. \tag{1}$$

Множество всех решений $x(\cdot) \in AC(T,E)$ включения (1) на отрезке T обозначим через $\mathcal{R}_T(F, C_0)$.

Зафиксируем $\hat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$. Следуя определению 1, сравним L-производную правой части включения (1) и L-производную отображения $x \to \mathcal{R}_T(F,x)$. Для этого при каждом $t \in T$ обозначим L-производные отображения $x \to F(t,x)$ в точке $(\hat{x}(t), \hat{x}'(t))$ в виде $F'_L(t,u) \doteq D_L F(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t))(u)$. Тогда $\mathcal{R}_T(F'_L, u_0)$ — множество решений включения $u'(t) \in F'_L(t, u(t))$ с $u(t_0) = u_0$. Также обозначим нижнюю производную отображения $\mathcal{R}_T(F,\cdot)\colon E \to \mathcal{P}(AC(T,E))$ в точке $(\hat{x}(t_0), \hat{x}(\cdot))$:

$$D_{\mathrm{H}}(u) \doteq \liminf_{\lambda \to 0} \Bigl(\limsup_{x \to u} \lambda^{-1} \bigl(\mathcal{R}(F, \hat{x}(t_0) + \lambda x) - \hat{x}(\cdot) \bigr) \Bigr), \qquad u \in E.$$

Теорема 1. *Пусть в окрестности графика решения* $\hat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$ *отображение* F *локально липшицево по* x *и измеримо по* t. *Тогда справедливо включение* $\mathcal{R}_T(F'_{\mathrm{H}}, u_0) \subset D_{\mathrm{H}}(u_0)$ *для любого* $u_0 \in E$.

Теорема 2. *Пусть* K_0 *— замкнутый выпуклый конус в* E. *Пусть* $F\colon T \times E \to \mathcal{F}(E)$ *таково, что* $F(t,x) \doteq \{y \in E \mid (x,y) \in K(t)\}$, *где* $K(t)$ *— замкнутый выпуклый конус в* $E \times E$, *измеримо зависящий от* $t \in T$, *т.е.* $F(t,\cdot)\colon E \to E$ *— выпуклый процесс. Пусть существует функция* $\gamma(\cdot) \in L_1(T, \mathbb{R}^1_+)$ *такая, что* $\|F(t,\cdot)\| \le \gamma(t)$, $t \in T$. *Тогда полярный конус* $(\mathcal{R}_T(F, K_0))^0$ *состоит из пар точек* $b^* \in E^*$ *и функций* $y^*(\cdot) \in L_\infty(T, E^*)$ *таких, что для каждой такой пары найдется функция* $x^*(\cdot) \in L_1(T, E^*)$, *для которой*

$$b^* - \int_{t_0}^{t_1} x^*(s)\,ds \in K_0^0, \qquad \Bigl(x^*(t), y^*(t) - \int_t^{t_1} x^*(s)\,ds \Bigr) \in K^0(t) \quad \forall t \in T.$$

2. Задача оптимизации для дифференциального включения. Пусть $\varphi\colon E \to \mathbb{R}^1$ локально липшицево, множество $C_0 \subset E$ замкнуто. На отрезке $T \doteq [t_0, t_1]$ рассмотрим задачу (см. [1])

$$\text{Minimize} \bigl\{ \varphi(x(t_1)) \mid x(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, C_0) \bigr\}. \tag{2}$$

Пусть $\hat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$ — решение задачи (2) и $F\colon T \times E \to \mathcal{P}(E)$ измеримо псевдолипшицево в окрестности этого решения. Пусть замкнутый выпуклый конус $K(t) \subset E \times E$ измеримо зависит от $t \in T$ и

$$K(t) \subset T_{\mathrm{H}}\bigl(\operatorname{graph} F(t,\cdot); (\hat{x}(t), \hat{x}'(t))\bigr) \qquad \forall t \in T.$$

Любой из конусов $T_L(\operatorname{graph} F(t,\cdot); (\hat{x}(t), \hat{x}'(t)))$ при $L \in \{\mathrm{C}, \mathrm{AH1}, \mathrm{AH2}\}$ является примером такого конуса $K(t)$.

Теорема 3. *Пусть* $\hat{x}(\cdot)$ *— локальное в* $AC(T,E)$ *решение задачи* (2). *Тогда существует функция* $p(\cdot) \in AC(T, E^*)$ *такая, что*

$$p(t_0) \in T^0_{\mathrm{AH}}(C_0, \hat{x}(t_0)), \qquad p(t_1) \in -\partial^+_{\mathrm{AB}} \varphi(\hat{x}(t_1)),$$
$$(p'(t), p(t)) \in K^0(t) \qquad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Список литературы

1. *Polovinkin E.S.* Necessary conditions for optimization problems with differential inclusion // Set-valued analysis and differential inclusions. Birkhäuser, 1993. P. 157–170. (Prog. Syst. Control Theory; V. 16).
2. *Половинкин Е.С.* Теория многозначных отображений. М.: Изд-во МФТИ, 1983.
3. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2007.
4. *Aubin J.P.* Contingent derivatives of set-valued maps and existence of solutions to nonlinear inclusions and differential inclusions // Adv. Math. Suppl. Stud. 1981. V. 7A. P. 160–272.

Приближенное решение задач управления и наблюдения для волнового уравнения с привлечением неравенств наблюдаемости

М. М. Потапов, А. А. Дряженков, Д. А. Иванов

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

mpotapov@tochka.ru, andrja@yandex.ru, deniaru91@gmail.com

Рассматриваются задачи граничного управления и двойственные к ним задачи наблюдения для волнового уравнения с переменными коэффициентами:

$$\rho(x)y_{tt} = (k(x)y_x)_x - q(x)y, \qquad 0 < t < T, \quad 0 < x < l.$$

Целью управления является перевод системы из начального нулевого состояния в заданное конечное состояние

$$y|_{t=T} = f^0(x), \qquad y_t|_{t=T} = f^1(x), \qquad 0 < x < l,$$

причем с минимальными энергозатратами. Рассматриваются постановки с классическими краевыми условиями в различных функциональных пространствах. Устойчивые приближенные решения этих задач строятся с помощью вариационного метода [1, 2], возможность обоснованного применения которого тесно связана с наличием конструктивных неравенств наблюдаемости.

В докладе представлены новые неравенства наблюдаемости следующих двух типов. Во-первых, это неравенства, полученные с помощью традиционной техники мультипликаторов в случае $q(x) = 0$ для граничных управлений из гильбертовых пространств Соболева W_2^k произвольной степени обобщенной гладкости $k = 0, 1, 2, \dots$, а также из сопряженных к ним пространств $(W_2^k)^*$. Во-вторых, это неравенства с оптимальным пороговым моментом управляемости-наблюдаемости и улучшенной структурой оценочных констант для произвольных $q(x)$ и обычных классов граничных управлений, полученные сочетанием энергетических оценок с заменами переменных, формулой Даламбера и леммой Гронуолла–Беллмана. По каждому из этих двух направлений приводятся вычислительные иллюстрации.

Список литературы

1. *Потапов М.М.* Устойчивый метод решения линейных уравнений с неравномерно возмущенным оператором // ДАН. 1999. Т. 365, № 5. С. 596–598.
2. *Васильев Ф.П., Куржанский М.А., Потапов М.М., Разгулин А.В.* Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения. М.: Макс Пресс, 2010.

Критические нелинейности в дифференциальных уравнениях с частными производными

С. И. Похожаев

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

Доклад посвящен общей теории нелинейных уравнений с частными производными. Основная проблема этой теории — разрешимость и регулярность решений нелинейных уравнений. Оказывается, эти две проблемы связаны с критическими нелинейностями. А именно: существование глобального решения и его свойства обусловлены наличием критической нелинейности в дифференциальном уравнении. В свою очередь критические нелинейности делятся на три класса:

1) критические нелинейности типа Бернштейна;
2) критические нелинейности типа Соболева;
3) критические нелинейности типа Фуджиты.

Основное внимание в докладе будет уделено критическим нелинейностям типа Фуджиты: методам их нахождения и приложениям к конкретным нелинейным проблемам.

Топологическая классификация и включение в поток диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразиях*

О. В. Починка

ННГУ, Нижний Новгород, Россия

olga-pochinka@yandex.ru

Пусть M^n — гладкое связное замкнутое многообразие размерности n. C^m*-потоком* ($m \geq 0$) на многообразии M^n называется непрерывно зависящее от $t \in \mathbb{R}$ семейство C^m-диффеоморфизмов $X^t \colon M^n \to M^n$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $X^0(x) = x$ для любой точки $x \in M^n$;
2) $X^t(X^s(x)) = X^{t+s}(x)$ для любых $s, t \in \mathbb{R}$, $x \in M^n$.

C^0-поток еще называют *топологическим потоком.* Говорят, что *диффеоморфизм* $f \colon M^n \to M^n$ *включается в* C^m*-поток*, если f является сдвигом на единицу времени вдоль траекторий некоторого C^m-потока X^t ($f = X^1$).

В настоящем докладе рассматриваются *диффеоморфизмы Морса–Смейла* $f \colon M^n \to M^n$, которые определяются следующим образом: неблуждающее множество Ω_f конечно и состоит из гиперболических периодических точек; устойчивые и неустойчивые многообразия периодических точек пересекаются трансверсально. В работе Дж. Палиса [5] найдены некоторые необходимые условия включения в топологический поток для диффеоморфизма f из класса $\mathrm{MS}(M^n)$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса–Смейла, заданных на ориентируемом многообразии M^n. Им же показано, что при $n = 2$ эти условия являются достаточными, и поставлена задача обобщения этого результата на случай большей размерности.

Как оказалось, в размерности $n = 3$ дополнительным препятствием для включения диффеоморфизма Морса–Смейла в топологический поток является возможность дикого вложения сепаратрис седловых точек. Примеры диффеоморфизмов из класса $\mathrm{MS}(M^3)$ с дикими сепаратрисами имеются в работах [6, 1, 7]. Как будет следовать из теоремы ниже, такие диффеоморфизмы не включаются ни в какие потоки[1]. Ключом к решению проблемы Палиса о включении диффеоморфизма Морса–Смейла $f \colon M^3 \to M^3$ в поток является схема диффеоморфизма f, введенная в работах [2, 3, 8] и определяемая следующим образом.

Пусть $q \in \{0, 1, 2, 3\}$ и Ω_q — множество периодических точек p диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^3)$ таких, что $\dim W^{\mathrm{u}}_p = q$. Положим $A_f = W^{\mathrm{u}}_{\Omega_0 \cup \Omega_1}$, $R_f = W^{\mathrm{s}}_{\Omega_2 \cup \Omega_3}$ и $V_f = M^3 \setminus (A_f \cup R_f)$. Установлено, что пространство орбит $\hat{V}_f = V_f / f$ действия f на V_f является простым многообразием, а естественная проекция $p_f \colon V_f \to \hat{V}_f$ является накрытием, индуцирующим эпиморфизм $\eta_f \colon \pi_1(\hat{V}_f) \to \mathbb{Z}$. Обозначим через L^{u}_f (L^{s}_f) объединение всех неустойчивых (устойчивых) двумерных сепаратрис седловых точек. Положим $\hat{L}^{\mathrm{s}}_f = p_f(L^{\mathrm{s}}_f \setminus A_f)$ и $\hat{L}^{\mathrm{u}}_f = p_f(L^{\mathrm{u}}_f \setminus R_f)$. Набор $S_f = (\hat{V}_f, \eta_f, \hat{L}^{\mathrm{s}}_f, \hat{L}^{\mathrm{u}}_f)$ называется *схемой диффеоморфизма* $f \in \mathrm{MS}(M^3)$.

Теорема 1. *Диффеоморфизмы* $f, f' \in \mathrm{MS}(M^3)$ *топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы* S_f *и* $S_{f'}$ *эквивалентны, т.е. существует гомеоморфизм* $\hat{\varphi} \colon \hat{V}_f \to \hat{V}_{f'}$ *со следующими свойствами:* 1) $\eta_f = \eta_{f'} \hat{\varphi}_*$; 2) $\hat{\varphi}(\hat{L}^{\mathrm{s}}_f) = \hat{L}^{\mathrm{s}}_{f'}$ *и* $\hat{\varphi}(\hat{L}^{\mathrm{u}}_f) = \hat{L}^{\mathrm{u}}_{f'}$.

Положим $g_f = \frac{1}{2}(|\Omega_1 \cup \Omega_2| - |\Omega_0 \cup \Omega_3| + 2)$, где $|P|$ означает мощность множества P. Обозначим через $\mathbb{S}_{g_f}$ ориентируемую замкнутую поверхность рода g_f. Положим $\hat{\mathbb{V}}_{g_f} = \mathbb{S}_{g_f} \times \mathbb{S}^1$. Множество $\hat{\lambda} = c_{\hat{\lambda}} \times \mathbb{S}^1$, где $c_{\hat{\lambda}}$ — простая гладкая замкнутая кривая на поверхности $\mathbb{S}_{g_f}$, назовем *тривиальным тором* на многообразии $\hat{\mathbb{V}}_{g_f}$. Схему S_f диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^3)$ назовем *тривиальной*, если существует гомеоморфизм $\hat{\psi}_f \colon \hat{V}_f \to \hat{\mathbb{V}}_{g_f}$ такой, что каждая компонента связности множеств $\hat{\psi}_f(\hat{L}^{\mathrm{s}}_f)$ и $\hat{\psi}_f(\hat{L}^{\mathrm{u}}_f)$ является тривиальным тором на многообразии $\hat{\mathbb{V}}_{g_f}$.

Теорема 2. *Диффеоморфизм* $f \in \mathrm{MS}(M^3)$ *включается в топологический поток тогда и только тогда, когда его схема является тривиальной.*

Список литературы

1. *Bonatti Ch., Grines V.* Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 // J. Dyn. Control Syst. 2000. V. 6, N 4, P. 579–602.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-12056) и Правительства РФ (проект 11.G34.31.0039).

[1] Заметим, что в силу результатов работы К. Куперберг [4], дикая дуга может быть траекторией некоторого топологического потока на 3-многообразии.

2. *Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pecou E.* Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds // Topology. 2004. V. 43. P. 369–391.
3. *Бонатти Х., Гринес В.З, Починка О.В.* Классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях // Тр. МИАН. 2005. Т. 250. С. 5–53.
4. *Kuperberg K.* 2-wild trajectories // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2005. Suppl. Vol. P. 518–523.
5. *Palis J.* On Morse–Smale dynamical systems // Topology. 1969. V. 8, N 4. P. 385–404.
6. *Pixton D.* Wild unstable manifolds // Topology. 1977. V. 16, N 2. P. 167–172.
7. *Pochinka O.* Diffeomorphisms with mildly wild frame of separatrices // Univ. Iagell. Acta Math. 2009. V. 47. P. 149–154.
8. *Починка О.* Классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразиях // ДАН. 2011. Т. 440, №6. С. 34–37.

Равновесные поведенческие стратегии в бесконечных повторяющихся играх

А. В. Райгородская

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

asik.vmk@gmail.com

Повторяющиеся (эволюционные) игры являются одним из наиболее востребованных направлений современной теории игр, что объясняется их применимостью при моделировании реальных взаимоотношений, в особенности экономических. Теория эволюционных игр предлагает рассматривать способы поведения, основанные на полученном во взаимодействии опыте. Внимание исследователей уделяется анализу динамических свойств моделей эволюционных игр (см., например, [1–3]): оценивается, каким образом столкновение различных поведенческих стратегий влияет на последовательность принимаемых решений. В [4] введены в рассмотрение игры на классах ограниченно рациональных поведенческих стратегий игроков и определено понятие равновесных наборов поведенческих стратегий. В докладе рассматривается задача, которая примыкает по своей тематике к подходу, описанному в [4].

Происходит расширение стандартных поведений игроков и делается выбор наилучшего (равновесного) в расширенных классах поведений.

Рассматривается повторяющаяся биматричная $(n \times m)$-игра с матрицами выигрышей $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,n;\, j=1,\dots,m}$ и $B = (b_{ij})_{i=1,\dots,n;\, j=1,\dots,m}$, которые определяют поведенческие стратегии игроков — наборы смешанных стратегий, выбор которых игроками в каждом последующем раунде зависит от поведения обоих игроков в текущем раунде. Выигрышами здесь выступают ожидаемые средние выигрыши в бесконечной повторяющейся игре (математические ожидания средних выигрышей, получаемых игроками на протяжении всех раундов).

Рассматривается вопрос о существовании равновесия по Нэшу в бесконечной повторяющейся игре при строго рандомизированных множествах стратегий поведения. Строго рандомизированными в докладе названы множества, содержащие стратегии поведения, предписывающие игрокам осуществлять свой выбор с вероятностями, отличными от 0 и 1. Доказывается существование равновесия в бесконечной повторяющейся игре со строго рандомизированными, усиленно выпуклыми и замкнутыми множествами стратегий поведения первого и второго игроков. Затем рассматривается случай, когда множества стратегий игроков строго рандомизированы и замкнуты, но условие их усиленной выпуклости не выполняется. Тогда для существования равновесия требуется расширение множеств стратегий поведения игроков. Рассматриваются два типа расширения множеств стратегий поведения, гарантирующих существование равновесия. Первый тип расширения использует понятие выпуклых оболочек множеств поведенческих стратегий. Второй тип расширения — смешанные стратегии поведения, представляющие собой борелевские вероятностные меры на множествах поведенческих стратегий.

Также рассматриваются смешанные стратегии на произвольных множествах стратегий поведения игроков. Для существования равновесия определяются суженные классы смешанных стратегий поведения с определенными свойствами.

Автор выражает признательность своему научному руководителю акад. А.В. Кряжимскому за постановку задачи и руководство в процессе ее решения.

Список литературы

1. *Fudenberg D., Kreps D.M.* Learning mixed equilibria // Games Econ. Behav. 1993. V. 5. P. 320–367.

2. *Nowak M., Sigmund K.* The alternating prisoner's dilemma // J. Theor. Biol. 1994. V. 168. P. 219–226.
3. *Kaniovski Yu.M., Kryazhimskiy A.V., Young H.P.* Learning equilibria in games played by heterogeneous populations // Games Econ. Behav. 2000. V. 31. P. 50–96.
4. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* О дифференциально-эволюционных играх // Тр. МИАН. 1995. Т. 211. С. 257–287.

Об одном алгоритме решения класса задач глобальной оптимизации

Е. А. Ровенская

МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия

erovenskaya@cs.msu.ru

Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$J(x) \to \min\colon \quad F(x) = 0, \quad x \in X. \tag{1}$$

Здесь X — непустое множество нормированного пространства, $J(\cdot)$ — числовая функция на X, $F(\cdot)$ — функция на X со значениями в гильбертовом пространстве Y. Предполагаем, что функции $F(\cdot)$ и $J(\cdot)$ ограничены, а также что множество допустимых элементов задачи (1) $E = \{x \in X\colon F(x) = 0\}$ непусто. Через J^* обозначим оптимальное значение задачи (1), а через X^* — множество ее решений.

Рассмотрим теперь следующую модифицированную экстремальную задачу:

$$J(x) \to \min\colon \quad G(x) = 0, \quad x \in X. \tag{2}$$

где функция $G(\cdot)$ выбрана таким образом, что множество ее нулей совпадает с множеством нулей функции $F(\cdot)$. Тогда, очевидно, задача (2) эквивалентна задаче (1).

Пусть функция $G(\cdot)$ такова, что надграфик задачи (2) $\Gamma = \{(y,w) \in \in Y \times R\colon y = G(x),\ w = J(x)\}$ почти отделим [1], т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует линейный непрерывный функционал $W_\varepsilon(\cdot)$ на Y такой, что

$$\Gamma \subset \big\{(y,w) \in Y \times R\colon\ y = G(x),\ w \geq J^* - \varepsilon + W_\varepsilon(y),\ x \in X\big\}.$$

При данном предположении оказывается возможным применить алгоритм, разработанный в [1]. Для этого зафиксируем числа $\delta_1, \delta_2, \ldots$ такие, что $\delta_k \in (0,1)$ $(k = 1,2,\ldots)$, $\tau_k = \sum_{i=1}^k \delta_i \to \infty$ и $\delta_k \tau_k \to 0$ при $k \to \infty$. Также зафиксируем числа $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ такие, что $\sigma_k > 0$ $(k = 1,2,\ldots)$ и $\sigma_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Рассмотрим последовательность $((v_k, G_k, J_k))_{k=1,2,\ldots} \in X \times Y \times R$, задаваемую следующим образом. Начальный элемент последовательности находится из условий

$$v_0 \in X, \qquad G_0 = G(v_0), \qquad J_0 = J(v_0); \tag{3}$$

если определен k-й элемент (v_k, G_k, J_k) последовательности, то $(k+1)$-й элемент $(v_{k+1}, G_{k+1}, J_{k+1})$ находится из условий

$$\psi_k(v) = 2(1 - \delta_{k+1})\langle G_k, G(v)\rangle_Y + \frac{J(v)}{\tau_{k+1}}, \tag{4}$$

$$\psi_k(v_{k+1}) \leq \inf_{v \in X} \psi_k(v) + \sigma_{k+1}, \tag{5}$$

$$G_{k+1} = (1 - \delta_{k+1})G_k + \delta_{k+1} G(v_{k+1}), \tag{6}$$

$$J_{k+1} = (1 - \delta_{k+1})J_k + \delta_{k+1} J(v_{k+1}). \tag{7}$$

Из [1, теорема 5.1] и эквивалентности задач (1) и (2) следует, что $J_k \to J^*$ при $k \to \infty$.

Рассмотрим применение алгоритма (3)–(7) к решению задачи оптимального управления с фазовыми ограничением. Для простоты рассмотрим задачу оптимального управления скалярной управляемой системой вида

$$\begin{gathered} J = \int_0^T f(t, z(t), u(t))dt \to \min, \\ \dot{z}(t) = \varphi(t, z(t), u(t)), \qquad z(0) = z^0, \\ z(t) \in Z(t), \qquad u(t) \in U \qquad (t \in [0,T]). \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь $T > 0$, $z^0 \in R$, $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ и $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot)$ — ограниченные измеримые функции на $[0,T] \times R \times U$; $U \subset R$ — компактное множество, $Z(\cdot)$ — многозначное отображение отрезка $[0,T]$ в R такое, что для всех $t \in [0,T]$ множества $Z(t)$ компактны. Пусть $x = x(\cdot) = (z(\cdot), u(\cdot)) \in L_2[0,T] \times L_2[0,T]$. Тогда $J = J(x)$. Для каждого x зададим $F(x) = F(x)(\cdot)$ как

$$F(x)(t) = z(t) - \int_0^T \varphi(s, z(s), u(s))\, ds - z^0 \qquad (t \in [0,T]).$$

Зададим множество

$$X = \{x = (z(\cdot), u(\cdot)) \in L_2[0,T] \times L_2[0,T] \colon z(t) \in Z(t),\ u(t) \in U\ (t \in [0,T])\}.$$

Очевидно, при таких обозначениях задача (8) имеет вид (1). Зададим функцию $G(x) = G(x)(\cdot)$ следующим образом:

$$G(x)(t) = \left| z(t) - \int_0^T \varphi(s, z(s), u(s))\, ds - z^0 \right| \qquad (t \in [0,T]).$$

Тогда график соответствующей задачи (2) почти отделим и, следовательно, для решения задачи (8) можно применить алгоритм (3)–(7).

Список литературы

1. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* Экстремальные задачи с отделимыми графиками // Кибернетика и систем. анализ. 2002. №2. С. 32–55.

Периодические режимы феноменологического уравнения спинового горения

А. М. Самойленко, Е. П. Белан

Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь, Украина

sam@imath.kiev.ua, belan@crimea.edu

Спиновым режимам горения тонкостенного кругового цилиндра радиуса r феноменологически [1] соответствуют решения типа бегущих волн задачи

$$\ddot{\xi} + \xi = 2\varepsilon\left[\dot{\xi}\left(1 - \frac{4}{3}\dot{\xi}^2\right) + \frac{\lambda^2}{4\pi^2}\Delta\dot{\xi} + \frac{\beta\lambda}{2\pi}\sqrt{-\Delta}\,\dot{\xi}\right], \qquad \xi(t, x + 2\pi r) = \xi(t, x).$$

Здесь ξ — координаты точек фронта горения в системе координат, в которой фронт в среднем покоится, $0 < \varepsilon \ll 1$, $\lambda > 0$, $\beta > 0$, точка означает дифференцирование по времени, Δ — одномерный оператор Лапласа.

В [2, 3] доказаны теоремы о существовании бегущих волн рассматриваемой задачи, получены критерии их экспоненциальной орбитальной устойчивости.

В докладе рассматриваются вопросы о существовании, устойчивости и форме двумерного автомодельного тора периодических по t решений исходной задачи, ответвляющегося от периодического решения $\xi_0 = \cos t + O(\varepsilon)$ при увеличении параметра $\rho = 2\pi r/\lambda$ и его прохождении через β^{-1}. Рассматриваются также вопросы взаимодействия указанного 2-тора и решений типа бегущих, стоячих волн, влияние при отходе параметра ρ от β^{-1} на динамику тора и характер взаимодействий периодических структур параметра β.

Список литературы

1. *Зельдович Я.Б., Маломед Б.А.* Сложные волновые режимы в распределенных динамических системах // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 15, №6. С. 591–618.
2. *Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2005.
3. *Самойленко А.М., Белан Е.П.* Динамика бегущих волн феноменологического уравнения спинового горения // ДАН. 2006. Т. 406, №6. С. 738–741.

Численные методы решения некоторых задач оптимального управления с заданной точностью*

С. П. Самсонов

МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия

samsonov@cs.msu.su

Будем рассматривать линейную управляемую систему

$$\dot{x} = Ax + u, \qquad u \in U, \quad U \in \Omega(E^n),$$

где $x \in E^n$ — вектор фазового состояния объекта, A — квадратная матрица размерности $n \times n$, $\Omega(E^n)$ — совокупность непустых компактных подмножеств из E^n.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-65590.2010.1).

Требуется из произвольной начальной точки x перейти в начало координат за наименьшее время τ. Тогда оптимальное время перехода τ находится как минимум из всех t, для которых при всех $\psi \in S$ выполняется неравенство

$$\varphi(t,\psi) = (x,\psi) + \int_0^t c(U, e^{-sA^*}\psi)\, ds \geq 0.$$

Эту задачу нахождения минимума по непрерывному множеству S можно свести к задаче нахождения минимума по дискретному множеству $\widetilde{S}$, которую можно решать простым перебором всех точек из множества $\widetilde{S}$, причем время оптимального быстродействия находится с заданной точностью ε (см. [1, 2]).

Аналогичный подход предлагается для некоторых других задач оптимального управления. Рассматривается задача оптимального управления с терминальным функционалом качества. Для ее решения предлагается численный метод восстановления выпуклого множества F по его опорной функции. Восстановленное множество $\widetilde{F}$ строится в виде выпуклого многогранника таким образом, чтобы хаусдорфово расстояние между множествами F и $\widetilde{F}$ не превышало заданного числа ε и было справедливо включение $F \subset \widetilde{F}$. Полученный результат применяется к восстановлению множества достижимости линейной управляемой системы по ее опорной функции. Зная восстановленное множество достижимости, можно решить задачу оптимального управления с терминальным функционалом качества и некоторые другие задачи. Отличительной чертой предлагаемого метода является то, что данный численный метод позволяет решать эту задачу с любой наперед заданной точностью. При этом определяются погрешности всех промежуточных вычислений, обеспечивающие заданную конечную точность. Предложенный численный метод применяется для решения некоторых других классов задач оптимального управления (см. [3, 4]).

Список литературы

1. *Самсонов С.П.* Восстановление выпуклого множества по его опорной функции с заданной точностью // Вестн. Моск. ун-та. Вычисл. математика и кибернетика. 1983. №1. С. 68–71.
2. *Самсонов С.П.* Оценка погрешности времени быстродействия в линейной задаче оптимального управления // Проблемы динамического управления: Сб. науч. тр. ф-та ВМК МГУ. М.: Макс Пресс, 2010. Вып. 5. С. 229–234.

3. *Самсонов С.П.* Одна задача оптимального управления с разными функционалами качества // Тр. МИАН. 1988. Т. 185. С. 215–221.
4. *Самсонов С.П.* Численный метод решения линейных задач оптимального управления с заданной точностью // Дифференциальные уравнения и топология: Междунар. науч. конф., посв. 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина. М.: Макс Пресс, 2008. С. 395–396.

Асимптотические свойства некоторых решений уравнений Навье–Стокса

Г. В. Сандраков

Киевский национальный университет им. Т.Г. Шевченко, Киев, Украина

sandrako@mail.ru

Рассматриваются начально-краевые задачи для нестационарной системы уравнений Навье–Стокса с периодическими быстро осциллирующими по пространственным переменным данными, имеющими нулевое среднее. Эти задачи формулируются в ограниченных областях, например трехмерных. Период осцилляций данных определяется малым положительным параметром ε, и коэффициент вязкости ν в уравнениях этих задач также может рассматриваться как положительный параметр. Будут приведены оценки решений таких задач, которые зависят от отношений некоторых степеней параметров ε и ν. В общем случае эти оценки для вектора скорости являются актуальными, когда коэффициент вязкости ν не является слишком малым в сравнении с ε^2. При выполнении этого условия соответствующие решения являются асимптотически малыми в энергетической норме, что характеризует свойство “сглаживания” решений. В случае, когда коэффициент вязкости имеет порядок ε^2, подходящие оценки получены в предположении “малости” нелинейности в уравнениях рассматриваемых задач. При выполнении этих условий асимптотика для вектора скоростей может содержать быстро осциллирующие слагаемые.

Для точной формулировки некоторых утверждений приведем конкретную постановку задачи. Пусть заданы ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ с гладкой границей, положительное число T, гладкая и финитная вектор-функция $f \in C_0^\infty([0,T] \times \Omega)^3$. Следуя, например, [1], определим вектор-функцию u и функцию p как "слабое" решение начально-краевой задачи для уравнений Навье–Стокса:

$$
\begin{gathered}
u'_t - \nu \Delta u + \sigma u \cdot \nabla u + \nabla p = m_\varepsilon f \qquad \text{в } \Omega \times (0,T), \\
\operatorname{div} u = 0 \qquad \text{в } \Omega \times (0,T), \\
u\big|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0,T),
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где действительные параметры ε, ν и σ удовлетворяют неравенствам $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, $0 < \nu \le \nu_0$ и $|\sigma| \le \sigma_0$ для фиксированных ε_0, ν_0 и σ_0. Кроме того, матричнозначная функция m_ε в (1) является ε-периодической и имеет вид $m_\varepsilon = m(x/\varepsilon)$, где компоненты матричнозначной функции $m(y)$ являются гладкими 1-периодическими (периодическими с периодом 1) функциями на $\mathbf{R}^3$ такими, что $\int_{[0,1]^3} m(y)\,dy = 0$.

Теорема 1. *Пусть u является решением задачи* (1). *Тогда*

$$
\|u\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^n)} + \nu \|\nabla u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{n\times n})} \le C(\varepsilon^2 + \varepsilon^2 \nu^{-1}),
$$

где постоянная C не зависит от ε, ν и σ.

Оценка этой теоремы является актуальной, если $\varepsilon^2\nu^{-1} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. При выполнении этого условия (например, для $\nu = \varepsilon^{2-\alpha}$ с положительным α) "слабые" решения задачи (1) являются асимптотически малыми при малых ε. В случае $\nu = \varepsilon^2$ выполнено следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть u является решением задачи* (1), *где $\nu = \varepsilon^2$. Тогда*

$$
\|u - A_\varepsilon * f\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^n)} + \nu \|\nabla (u - A_\varepsilon * f)\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{n\times n})} \le C(\varepsilon^2 + \varepsilon^{-1}|\sigma|),
$$

где постоянная C не зависит от ε, ν и σ. Здесь $A_\varepsilon = A(t, x/\varepsilon)$, матричнозначная функция $A(t,y)$ является 1-периодическим решением некоторой задачи (*определенной в* [2]) *и $*$ обозначает свертку по t:*

$$
[A_\varepsilon * f](t,x) = \int_0^t A(t-\tau, x/\varepsilon) f(\tau, x)\, d\tau.
$$

Таким образом, асимптотика "слабого" решения задачи (1) может содержать быстро осциллирующие слагаемые, если $\varepsilon^{-1}|\sigma| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Появление таких слагаемых аналогично появлению предельных циклов в гиперболических уравнениях с малыми параметрами, подробно рассмотренных в [3].

Приведенные оценки являются обобщением оценок, полученных в [2], где подробно рассмотрен и случай линеаризованной задачи (1) (при $\sigma = 0$). Следуя [1], можно определить такое $p \in W^{-1,\infty}(0,T; L^2(\Omega)/\mathbf{R})$, что (u,p) удовлетворяет задаче (1) в смысле распределений. Для такого p выполняется, например, следующее утверждение.

Теорема 3. *Найдутся $u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)^3) \cap L^\infty(0,T; L^2(\Omega)^3)$ и $p \in W^{-1,\infty}(0,T; L^2(\Omega)/\boldsymbol{R})$ такие, что уравнения из* (1) *для (u,p) выполняются в смысле распределений и*

$$
\|p\|_{W^{-1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)/R)} \le C(\varepsilon + \varepsilon^2 |\sigma| \nu^{-7/4}),
$$

где постоянная C не зависит от ε, ν и σ.

Список литературы

1. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. М.: Мир, 1981.
2. *Сандраков Г.В.* Влияние вязкости на осцилляции в некоторых линеаризованных задачах гидродинамики // Изв. РАН. Сер. мат. 2007. Т. 71, №1. С. 101–154.
3. *Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Асимптотические методы исследования периодических решений гиперболических уравнений. М.: Наука, 1998. (Тр. МИАН; Т. 222).

Инвариантные меры для сингулярно гиперболических аттракторов

Е. А. Сатаев

Обнинский институт атомной энергетики Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ", Обнинск, Россия

sataev@iate.obninsk.ru

Определение сингулярно гиперболического потока (или сингулярно гиперболического множества) было приведено в [1]. Это определение мотивировано геометрической моделью системы Лоренца. С другой стороны, сингулярно гиперболический поток является обобщением гиперболического потока на случай, когда в множестве неблуждающих точек содержится неподвижная точка. Похожее определение приведено в [2], где соответствующий поток назван псевдогиперболическим. Приведем определение сингулярно гиперболического потока (модификация определения из работы [1]).

Определение 1. Поток Φ_t на римановом многообразии M размерности n называется сингулярно гиперболическим на инвариантном множестве Λ, если касательное пространство T_xM в каждой точке $x \in \Lambda$ раскладывается в прямую сумму двух инвариантных пространств $T_xM = E_x^{ss} \oplus E_x^c$, непрерывно зависящих от x на Λ, причем выполняются следующие свойства.

1. E_x^{ss} $(n-2)$-мерно, E_x^c двумерно.

2. Существуют константы $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ такие, что

(a) если $u \in E_x^{ss}$, $t > 0$, то $|d\Phi_t(u)| < c_1 e^{-\gamma_1 t}|u|$;

(b) если $u \in E_x^{ss}$, $v \in E_x^c$, $t > 0$, то $|d\Phi_t(u)|/|u| < c_2 e^{-\gamma_2 t}|d\Phi_t(v)|/|v|$.

3. Существуют константы $c_3 > 0$, $\gamma_3 > 0$ такие, что если $u, v \in E_x^c$, $t > 0$, а $S(u,v)$ обозначает площадь параллелограмма, порожденного векторами u, v, то при всех $t > 0$ верно неравенство

$$S(d\Phi_t(u), d\Phi_t(v)) > c_3 e^{\gamma_3 t} S(u,v).$$

4. Все неподвижные точки, лежащие в множестве Λ, гиперболические.

Мы будем рассматривать потоки, определенные на некотором открытом множестве $U \subset M$ таком, что $\operatorname{clos}(\Phi_t(U)) \subset U$, если $t > 0$. При этом вместо условий 1–4 выполняются аналогичные условия на конусы в касательном пространстве на множестве U. Аттрактором называется множество $\Lambda = \bigcap_{t>0} \Phi_t(U)$.

Отметим, что из этих условий следует существование семейства строго устойчивых пространств E_x^{ss} на U и пространств E_x^{cu} на множестве Λ; пространства E_x^{cu} на множество U не распространяются.

Теорема 1. *Существует конечное число замкнутых подмножеств $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k \subset \Lambda$ (эти множества называются эргодическими компонентами) и инвариантных мер $\mu_1, \ldots, \mu_k$, сосредоточенных на множествах Λ_j, таких, что*

1) *на множествах Λ_j существует инвариантное семейство строго неустойчивых многообразий, определенных на множестве полной меры (строго неустойчивое многообразие точки x состоит из таких точек $y \in \Lambda$, что расстояние между точками $\Phi_t(x)$, $\Phi_t(y)$ экспоненциально убывает при $t \to -\infty$);*

2) *поток Φ_t на каждом множестве Λ_j с мерой μ_j эргодичен;*

3) *периодические траектории плотны в множествах Λ_j;*

4) *если мера ν абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на U, то семейство мер*
$$\nu_T = \frac{1}{T}\int_0^T \Phi_t(\nu)\,dt$$
при $T \to \infty$ сходится к мере $\sum p_j \mu_j$ с некоторыми коэффициентами $p_j \geq 0$, $\sum p_j = 1$;

5) *если множество Λ_j не содержит неподвижных точек, то Λ_j — гиперболический аттрактор.*

Меры, существование которых утверждается в теореме, называются мерами Синая–Боуэна–Рюэлля.

Теорема 2. *Справедлива альтернатива: либо поток на множестве Λ_j перемешивающий, либо существует собственная функция (дискретная компонента в спектре). Имеется пример неперемешивающего потока, у которого в множестве Λ_j имеется неподвижная точка.*

Теорема 3. *Пусть последовательность Φ_t^n сходится к Φ_t в C^1-топологии, μ_n — последовательность мер Синая–Боуэна–Рюэлля для Φ_t^n. Тогда предельная точка мер μ_n — мера Синая–Боуэна–Рюэлля для Φ_t.*

Список литературы

1. *Morales C., Pacifico M.J., Pujals E.* On C^1 robust singular transitive sets for three dimensional flows // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 1. 1998. V. 326, N 1. P. 81–86.
2. *Тураев Д.В., Шильников Л.П.* Пример дикого странного аттрактора // Мат. сб. 1988. Т. 189, №2. С. 137–160.
3. *Сатаев Е.А.* Инвариантные меры для сингулярно гиперболических аттракторов // Мат. сб. 2010. Т. 201, №3. С. 107–160.

Экспоненциальное отображение в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля*

Ю. Л. Сачков

Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский, Россия

sachkov@sys.botik.ru

Нильпотентная субриманова задача на группе Энгеля есть следующая задача оптимального управления:

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -y/2 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x/2 \\ (x^2+y^2)/2 \end{pmatrix}, \qquad q \in \mathbb{R}^4, \quad u \in \mathbb{R}^2,$$

с граничными условиями

$$q(0) = q_0, \qquad q(t_1) = q_1$$

и функционалом качества

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt \to \min .$$

Эта задача возникает как нильпотентная аппроксимация неголономных систем в 4-мерном пространстве с 2-мерным управлением, например для системы, описывающей движение мобильного робота с прицепом (см. [1–3]). В работах [4, 5] для этой задачи были описаны параметризация экстремальных траекторий, дискретные симметрии и соответствующие точки Максвелла, получены оценки времени разреза и сопряженного времени.

В докладе будут представлены новые результаты о задаче:

- диффеоморфные области в прообразе и образе экспоненциального отображения;
- глобальная структура экспоненциального отображения;
- время разреза и множество разреза;

*Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН “Динамические системы и теория управления”.

- сведение задачи оптимального управления к решению систем алгебраических уравнений в функциях Якоби;
- явные решения задачи для некоторых специальных граничных условий.

Список литературы

1. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.
2. *Laumond J.P.* Robot motion planning and control. Berlin; Heidelberg: Springer, 1998.
3. *Bellaiche A.* The tangent space in sub-Riemannian geometry // Sub-Riemannian geometry / Ed. by A. Bellaiche, J.-J. Risler. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 1–78.
4. *Ардентов А.А., Сачков Ю.Л.* Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 11. С. 31–54.
5. *Ardentov A.A., Sachkov Yu.L.* Conjugate points in nilpotent sub-Riemannian problem on the Engel group // J. Math. Sci. (in press).

Задача оптимального прохождения через область

А. И. Смирнов

МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия

asmirnov@cs.msu.su

В работе рассматривается следующий класс задач оптимального управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u), \quad u \in U, \quad t \in [0,T], \\ x(0) \in M_0, \quad x(T) \in M_1, \\ J(x,u,T) = \displaystyle\int_0^T \big(p(x,u) + q(x)\delta_M(x)\big)\, dt \to \min . \end{cases}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, U — непустой выпуклый компакт из $\mathbb{R}^m$, M_0, M_1 — непустые замкнутые множества из $\mathbb{R}^n$, δ_M — характеристическая функция заданного замкнутого множества M из $\mathbb{R}^n$, т.е.

$$\delta_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M, \\ 0, & x \notin M, \end{cases} \qquad M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \le 0\},$$

где $g(x)$ — заданная гладкая функция с ограниченным градиентом такая, что $\partial g(x)/\partial x \neq 0$ $\forall x$: $g(x) = 0$. Функция $f(x,u)$ аффинна по переменной u, т.е. $f(x,u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m f_i(x)u^i$, $f_i(x)$ и $\partial f_i/\partial x$, $i = \overline{0,m}$, непрерывны на $\mathbb{R}^n$, и выполняется условие $\langle x, f(x,u)\rangle \le C(1 + \|x\|^2)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall u \in U$. Скалярные функции $p(x,u)$, $q(x)$ и их градиенты $\partial p/\partial x$, $\partial q/\partial x$ непрерывны, функция $p(x,u)$ является выпуклой по аргументу u, а функция $q(x) \ge 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, и, кроме того, считаем, что выполняется условие $\partial q(x)/\partial x = 0$ $\forall x$: $g(x) = 0$. Момент времени $T \ge 0$ окончания процесса управления считается свободным. Класс допустимых управлений в задаче состоит из всех измеримых ограниченных функций u: $u(t) \in U$ при почти всех $t \in [0,T]$.

Для данной задачи при помощи метода аппроксимаций без каких-либо априорных предположений о характере поведения оптимальной траектории доказаны необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина [3].

Рассматривается модельный пример, иллюстрирующий особенности данного класса задач:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \quad t \in [0,T], \quad T \text{ свободный}, \\ \dot{x}_2 = u, \quad |u| \le 1, \\ x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x(T) = \begin{pmatrix} x_T \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_T \ge 0, \\ J(x,T) = \displaystyle\int_0^T \big(1 + \delta_M(x)\big)\,dt \to \min, \quad M = \{x \colon |x_2| \ge 1\}. \end{cases}$$

Список литературы

1. *Пшеничный Б.Н., Очилов С.* О задаче оптимального прохождения через заданную область // Кибернетика и вычисл. техника. 1993. Т. 99. С. 3–8.
2. *Асеев С.М., Смирнов А.И.* Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального прохождения через область // ДАН. 2004 Т. 395, №5. С. 583–585.
3. *Смирнов А.И.* Необходимые условия оптимальности для одного класса задач оптимального управления с разрывным интегрантом // Тр. МИАН. 2001. Т. 262. С. 222–239

Обобщенные решения уравнения, сохраняющего тип Беллмана в заданной области фазового пространства*

Н. Н. Субботина, Л. Г. Шагалова

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

subb@uran.ru, shag@imm.uran.ru

Работа посвящена изучению решения уравнения Беллмана в области фазового пространства для краевой задачи с условиями, заданными на части границы этой области. Анализ существенно опирается на результаты и методы теории оптимального управления [1, 2].

Рассматривается задача Коши для уравнения Гамильтона–Якоби, возникающая в молекулярной биологии для модели Кроу–Кимуры молекулярной эволюции [6]

$$\partial u/\partial t + H(x, \partial u/\partial x) = 0, \quad t \ge 0; \qquad u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [-1,1], \quad (1)$$

$$H(x,p) = -f(x) + 1 - \frac{1+x}{2}e^{2p} - \frac{1-x}{2}e^{-2p}. \qquad (2)$$

Заметим, что гамильтониан задачи $H(x,p)$ при $x \in [-1,1]$ является вогнутым по импульсной переменной p, т.е. уравнение сохраняет тип Беллмана. Исследуется вопрос о построении решения $u(t,x)$ задачи (1), (2) в полосе $\Pi = [0,\infty) \times [-1,1]$.

На основе вязкостного и минимаксного подходов [3–5] в работе [7] вводится понятие непрерывного обобщенного решения рассматриваемой задачи (1), (2) в области $\Pi_T = [0,T] \times [-1,1]$, где $0 < T < \infty$. Показано, что обобщенное решение в области Π_T существует, но неединственно и, в частности, такое решение определяется с помощью функции цены $V(t,x)$ во вспомогательной задаче оптимального управления **ЗОУ**$_T$ системой

$$\dot{x} = -H_p(x,p) = (1+x)e^{2p} - (1-x)e^{-2p}, \quad x(t_0) = x_0, \quad (t_0,x_0) \in \Pi_T, \qquad (3)$$

*Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Динамические системы и теория управления”, а также при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00214) и программы государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-64508.2010.1).

где допустимыми управлениями являются измеримые функции $p(\cdot)$: $[t_0, T] \to [-K_T, K_T]$, $K_T > 0$. Множество всех допустимых управлений обозначается символом $\mathbf{P}_{[t_0,T]}$. Функционал платы в $\mathbf{ЗОУ}_T$ имеет вид

$$I_{(t_0,x_0)}(p(\cdot)) = \int_{t_0}^{t^\sharp} p(\tau)H_p(x(\tau), p(\tau)) - H(x(\tau), p(\tau))\, d\tau + \varphi(t^\sharp, x(t^\sharp)), \quad (4)$$

где $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, p(\cdot))\colon [t_0, T] \to [-1, 1]$ — траектория системы (3), стартующая из начальной точки (t_0, x_0) под воздействием управления $p(\cdot) \in \mathbf{P}_{[t_0,T]}$; $t^\sharp = \min_{t\in[t_0,T]}\{t \mid x(t, t_0, x_0, p(\cdot)) \in \overline{G}_T\}$,

$$\overline{G}_T = \big\{(t, x) \mid 0 \le t \le T,\ x = 1\big\} \cup \big\{(t, x) \mid 0 \le t \le T,\ x = -1\big\} \cup \\ \cup \big\{(t, x) \mid t = T,\ -1 \le x \le 1\big\}.$$

Функция цены $(t_0, x_0) \to V(t_0, x_0)$ в $\mathbf{ЗОУ}_T$ определяется равенством

$$V(t_0, x_0) = \sup_{p(\cdot)\in\mathbf{P}_{[t_0,T]}} I_{(t_0,x_0)}(p(\cdot)) \qquad \forall (t_0, x_0) \in \Pi_T. \quad (5)$$

Пусть

$$\Omega_T = \big\{(t, x) \in \Pi_T \mid 0 \le t \le t^*,\ x^-(t) \le x \le x^+(t),\ t^* = \min\{T, T^*\}\big\},$$

где $x^\pm(t) = x(t, \pm1)$, $p^\pm(t) = p(t, \pm1)$ — решения системы

$$\dot{x} = \frac{\partial H(x, p)}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H(x, p)}{\partial x}, \qquad x(0, \xi) = \xi, \quad p(0, \xi) = \frac{\partial u_0(\xi)}{\partial x}; \quad (6)$$

$T^* = \min_{t>0}\{t \mid x^-(t) = x^+(t)\}$.

Теорема. *Если в задаче* (1), (2) *функции* $f(x)$, $u_0(x)$ *непрерывно дифференцируемы,* $\partial u_0(1)/\partial x < 0$, $\partial u_0(-1)/\partial x > 0$ *и* $T^* = \infty$, *то существуют такие субдифференцируемые функции* $\varphi(t, x)$, *удовлетворяющие условиям*

$$\begin{gathered} \varphi(t, x) = u_0(x) + t\big[f(x) - 1 + \exp^{-2L_T}\big], \qquad x = \pm1, \quad t \ge 0, \\ L_T > K_T > 0, \end{gathered} \quad (7)$$

что функции цены $V(t_0, x_0)$ *в соответствующих задачах* (3)–(5) *совпадают с* $u(T - t_0, x_0)$ — *обобщенными решениями задачи* (1), (2) *в* Π_T *и при всех* $(t, x) \in \Omega_T$ *справедливо*

$$u(t, x) = \max_{x(t,\xi)=x} \int_0^t p(\tau)H_p(x(\tau), p(\tau)) - H(x(\tau), p(\tau))\, d\tau + u_0(\xi),$$

где $x(t) = x(t, \xi)$, $p(t) = p(t, \xi)$, $t \ge 0$, — *решения системы* (6) *с начальными условиями* $x(0, \xi) = \xi$, $p(0, \xi) = \partial u_0(\xi)/\partial x$, $\xi \in [-1, 1]$.

Список литературы

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
2. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
3. *Capuzzo-Dolcetta I., Lions P.L.* Hamilton–Jacobi equations with state constraints // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. V. 318, N 2. P. 643–683.
4. *Subbotin A.I.* Generalized solutions of first order PDEs: The dynamical optimization perspective. Boston: Birkhäuser, 1995.
5. *Субботина Н.Н.* Метод характеристик для уравнений Гамильтона–Якоби и его приложения в динамической оптимизации. Тбилиси: Ин-т кибернетики АН Грузии, 2004. (Совр. математика и ее прил.; Т. 20).
6. *Saakian D.B., Rozanova O., Akmetzhanov A.* Dynamics of the eigen and the Crow–Kimura models for molecular evolution // Phys. Rev. E. 2008. V. 78. Paper 041908.
7. *Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г.* О решении задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби с фазовыми ограничениями // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, №2. С. 191–208.

Алгоритмы построения оптимальных решений в блочных моделях экономического роста*

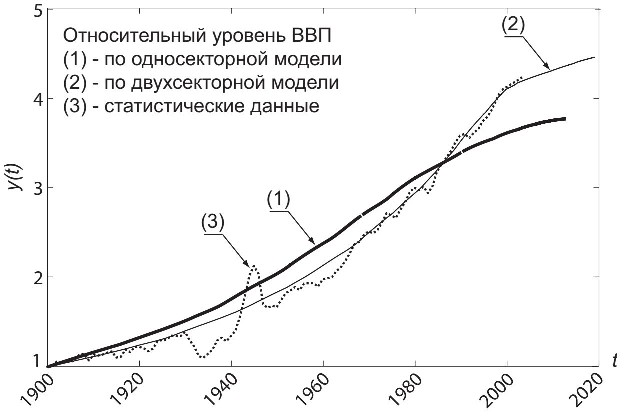
А. М. Тарасьев, А. А. Усова

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

tam@imm.uran.ru, tarasiev@iiasa.ac.at, anastasy.0usova@gmail.com

Рассматриваются блочные многофакторные модели экономического роста, описывающие изменение внутреннего валового продукта страны (региона) в зависимости от ряда производственных факторов таких, как основной капитал, рабочая сила и полезная работа. Предполагается, что

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-00427-а, 11-01-12088-офи-м-2011, 11-01-12112-офи-м-2011), программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-64508.2010.1), программы фундаментальных исследований Президиума РАН "Динамические системы и теория управления", Международного института прикладного системного анализа (IIASA).



Уровень ВВП $y(t)$ моделей в сравнении с реальными данными

основной капитал изменяется по закону Солоу, который учитывает как инвестиционную составляющую, так и уровень обесценивания основного капитала. Динамика рабочей силы пропорциональна инвестициям в человеческий капитал. Одним из существенных факторов в рассматриваемых моделях служит эффективность труда, которая играет роль коэффициента пропорциональности между человеческим капиталом и рабочей силой в моделях Сандерсона.

На основе экономических моделей формулируются задачи оптимального управления, где управляющими параметрами служат объемы инвестиций в производственные факторы, включенные в модель. Критерием качества инвестиционного процесса служит интегральный индекс потребления, дисконтированный на бесконечном промежутке времени, который определяет относительный прирост потребления на душу работающего населения.

В рамках исследования поставленных задач оптимального управления формулируются и проверяются необходимые и достаточные условия оптимальности решений в рамках принципа максимума Понтрягина для задач на бесконечном горизонте времени. Анализируется качественное поведение гамильтоновых систем. Доказано, что в случае, когда гамильтонова система обладает стационарной точкой седлового типа, для системы можно построить нелинейный регулятор, который стабилизирует систему в установившемся состоянии. При этом в окрестности положения равновесия поведение траекторий стабилизированной и гамильтоновой систем идентично. Данный факт лежит в основе алгоритма построения оптимальных траекторий. Предлагаемый алгоритм базируется на качественной теории систем дифференциальных уравнений, а именно на том факте, что решение системы дифференциальных уравнений приближается к положению равновесия по касательной к плоскости, образованной собственными векторами, отвечающими отрицательным собственным значениям. Использование стабилизированных решений позволяет значительно сузить область поиска начальной позиции для интегрирования исходной гамильтоновой системы в обратном времени. Строится оценка точности работы алгоритма по функционалу качества задачи управления.

Проводится сравнение решений, которые получены на основе односекторной и двухсекторной моделей при эконометрической калибровке по статистическим данным экономики США. На рисунке представлены траектории валового внутреннего продукта, полученные на основе односекторной и двухсекторной моделей, в сравнении со статистическими данными.

Список литературы

1. *Асеев С.М., Кряжимский А.В.* Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста. М.: Наука, 2007. (Тр. МИАН; Т. 257).
2. *Красовский А.А., Тарасьев А.М.* Свойства гамильтоновых систем в принципе максимума Понтрягина для задач экономического роста // Тр. МИАН. 2008. Т. 262. С. 127–145.
3. *Красовский Н.Н., Субботин Н.Н.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
4. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
5. *Тарасьев А.М., Усова А.А.* Построение регулятора для гамильтоновой системы двухсекторной модели экономического роста // Тр. МИАН. 2010. Т. 271. С. 278–298.
6. *Tarasyev A.M., Watanabe C.* Optimal dynamics of innovation in models of economic growth // J. Optim. Theory Appl. 2001. V. 108, N 1. P. 175–203.

Пространство линейных управляемых систем и его канонические представители*

Е. Л. Тонков

Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия

eltonkov@udm.ru

Доклад посвящен распространению на множество линейных управляемых систем теоремы О. Перрона о приведении с помощью преобразования Перрона к канонической форме линейной системы $\dot{x} = A(t)x$ (теорема 1) и теоремы В.М. Миллионщикова, утверждающей, что в случае рекуррентной системы $\dot{x} = A(t)x$ преобразование Перрона к канонической форме тоже рекуррентно (теорема 2).

Определение 1. Пусть (Σ, f^t) — топологическая динамическая система. Семейство (S, Σ) систем

$$\dot{x} = A(f^t\sigma)x + B(f^t\sigma)u, \qquad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

назовем *регулярным*, если найдется такое $\vartheta_0 > 0$, что для любых $\vartheta > \vartheta_0$ и всех $\sigma \in \Sigma$ размерность $\dim \mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma)$ пространства управляемости $\mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma)$ системы (S, σ) постоянна.

Определение 2. Регулярное семейство (S, Σ) систем вида (1) назовем *каноническим*, если

1) для каждого $k \in \{1 \dots n\}$ и любой точки $\sigma \in \Sigma$ линейное пространство $L^k = \operatorname{lin}\{e^1 \dots e^k\}$, где $e^1 \dots e^n$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$, инвариантно относительно системы

$$\dot{x} = A(f^t\sigma)x; \tag{2}$$

2) найдутся $r \in \{1 \dots n\}$ и такое $\vartheta_0 > 0$, что для каждой точки $\sigma \in \Sigma$ и всех $\vartheta > \vartheta_0$ выполнено равенство $\mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma) = L^r$, где $r = \dim \mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma)$.

Определение 3. Пусть (Σ, f^t) — топологическая динамическая система с *компактным* фазовым пространством Σ и (S, Σ) — *регулярное* семейство систем (1). Каждой системе (S, σ) семейства (S, Σ) поставим в соответствие функцию

$$\Theta(t, \sigma) = \big(S(f^t\sigma), P(t, \sigma), C(t, \sigma)\big) \in \mathbb{M}(n, 3n + 2m),$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Математическая теория управления”.

где $S(\sigma) = (A(\sigma), B(\sigma))$, $C(t, \sigma) = (F(t, \sigma), G(t, \sigma))$ — управляемая система

$$\dot{y} = F(t, \sigma)y + G(t, \sigma)u, \tag{3}$$

а матрицы $P(t, \sigma)$, $F(t, \sigma)$ и $G(t, \sigma)$ удовлетворяют следующим условиям:

а) P — преобразование Перрона, приводящее систему (1) к системе (3);

б) $F(t, \sigma)$ — верхнетреугольная матрица, непрерывная по переменным t, σ и ограниченная на оси $\mathbb{R}$ для каждой точки $\sigma \in \Sigma$;

в) последние $n - r$ строк матрицы $G(t, \sigma) = P^*(t, \sigma)B(f^t\sigma)$ тождественно равны нулю при всех $(t, \sigma) \in \mathbb{R} \times \Sigma$; здесь $r = \dim \mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma)$.

Построенную так функцию $t \to \Theta(t, \sigma)$ будем называть *правильной*.

Для каждой точки $\sigma \in \Sigma$ рассмотрим пространство непрерывных функций $\mathfrak{X}(\Theta, \sigma)$, полученное из правильной функции $t \to \Theta(t, \sigma)$ замыканием (в топологии равномерной сходимости на отрезках) множества ее сдвигов $\Theta(t+\tau, \sigma) = \Theta_\tau(t, \sigma)$, $\tau \in \mathbb{R}$, построим динамическую систему $(\mathfrak{X}, h^\tau)$, где $h^\tau\widehat{\Theta} = \widehat{\Theta}_\tau$, и далее введем в рассмотрение топологическую динамическую систему (Ω, g^t), которая определяется равенствами

$$\Omega = \big\{\omega = (\sigma, \widehat{\Theta}(\cdot, \sigma))\colon\ \sigma \in \Sigma,\ \widehat{\Theta}(\cdot, \sigma) \in \mathfrak{X}(\Theta, \sigma)\big\}, \qquad g^t = (f^t, h^t). \tag{4}$$

Определим теперь функцию $\Xi\colon \Omega \to \mathbb{M}(n, 3n + 2m)$ равенством

$$\Xi(\omega) = \Theta(0, p(\omega)) = \big(\mathcal{S}(\omega), \mathcal{P}(\omega), \mathcal{C}(\omega)\big),$$

где $p(\omega) = \sigma$, $\mathcal{S}(\omega) = S(\sigma)$, $\mathcal{P}(\omega) = P(0, \sigma)$, $\mathcal{C}(\omega) = C(0, \sigma)$. Тогда для всех $(t, \omega) \in \mathbb{R} \times \Omega$ имеет место равенство $\Xi(g^t\omega) = \Theta(t, \sigma)$.

Построенное семейство $(\mathcal{S}, \Omega)$ будем называть *псевдорасширением* семейства (S, Σ), а функцию $t \to \mathcal{P}(g^t\omega)$ — *стационарным перроновским преобразованием*, приводящим систему $(\mathcal{S}, \omega)$ к канонической системе $(\mathcal{C}, \omega)$. Следовательно, семейство $(\mathcal{C}, \Omega)$ служит каноническим представителем семейства $(\mathcal{S}, \Omega)$.

Теорема 1. *Для всякой топологической динамической системы (Σ, f^t) с компактным фазовым пространством Σ и любого регулярного семейства (S, Σ) систем вида (1) с непрерывными матрицами $A(\sigma)$ и $B(\sigma)$ расширение (Ω, g^t) системы (Σ, f^t), построенное равенствами (4), имеет компактное фазовое пространство Ω и псевдорасширение $(\mathcal{S}, \Omega)$ семейства (S, Σ) обладает каноническим представителем $(\mathcal{C}, \Omega)$.*

Теорема 2. *Для всякой топологической динамической системы* (Σ, f^t) *с минимальным фазовым пространством* Σ *и любого регулярного семейства* (S, Σ) *систем* (1) *с непрерывными матрицами* $A(\sigma)$ *и* $B(\sigma)$ *расширение* (Ω, g^t) *системы* (S, Σ), *построенное равенствами* (4), *имеет минимальное* (*относительно потока* g^t) *фазовое пространство* Ω *и отвечающее системе* (Ω, g^t) *псевдорасширение* $(\mathcal{S}, \Omega)$ *семейства* (S, Σ) *обладает каноническим представителем* $(\mathcal{C}, \Omega)$.

Из теоремы 2 следует, в частности, что если размерность пространства управляемости системы $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ равна r и матрицы $A(t)$ и $B(t)$ рекуррентны, то она приводима рекуррентным перроновским преобразованием $x = P(t)y$ к системе $\dot{y} = F(t)y + G(t)u$ с рекуррентными $F(t)$ и $G(t)$, причем $F(t)$ — верхнетреугольная матица, а последние $n-r$ строк матрицы $G(t)$ равны нулю.

Устойчивость по Ляпунову в присутствии жордановой цепочки*

В. А. Треногин

Национальный исследовательский технологический университет "МИСиС", Москва, Россия

vtrenogin@mail.ru

В банаховом пространстве X исследуется задача Коши

$$\dot{x} = Ax + R(x, t), \qquad x(0) = a. \tag{1}$$

Предполагается, что $A\colon D(A) \to X$ ($D(A)$ плотно в X) является замкнутым линейным оператором, представляющим собой производящий оператор полугруппы $T(t)$ класса C_0, а нелинейный оператор R непрерывен при $t \in R^+$, $x\colon \|x\| \le \rho$, $R(0, t) = 0$ $\forall t \in R^+$. Решение интегрального уравнения

$$x(t) = T(t)a + \int_0^t T(t-s)R(x(s), s)\,ds$$

называется далее обобщенным решением задачи (1).

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09-01-00586, 09-07-00365-а).

В основополагающих статьях [1, 2] рассмотрен случай тривиального подпространства нулей $N(A)$. В них указаны локальные гельдеровы условия по t на оператор $R(t, x)$, достаточные для того, чтобы обобщенное решение задачи (1) оказалось ее классическим решением. Полученные результаты можно трактовать как обобщения теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости тривиального решения ДУ из (1). В других статьях, развивающих эти идеи и методы, нами рассмотрены случаи аналитического нелинейного оператора $R(t, x)$, а также и случаи, когда $R(t, x)$ неограниченно растет вместе с t, лишь бы этот рост гасился экспоненциальным убыванием полугруппы. Эта методика пригодна и в условиях принципиально иной ситуации, рассматриваемой ниже (см. также [3–6]). Теперь предполагается, что подпространства нулей $N(A)$ и $N(A^*)$ оператора и сопряженного к нему одномерны с базисными элементами φ_1 и ψ_1 соответственно, имеющими жордановы цепочки $\{\varphi_k\}_{k=1}^p$ и $\{\psi_l\}_{l=1}^p$ длины $p > 1$, согласованные так, что $\langle \varphi_k, \psi_l \rangle = \delta_{k+l,p+1}$. Введем проекторы $Q = \sum_{s=1}^p \langle \cdot\,, \psi^{p+1-s} \rangle \varphi^s$ на корневое подпространство и $P = I - Q$ на его прямое дополнение. При этом $X = U + V$, где $U = PX$, $V = QX$. Пусть сужение полугруппы $T(t)$ на подпространство U является экспоненциальной полугруппой, т.е. $\|T(t)u\| \le C\exp(\alpha t)$. Пусть далее выполнены следующие специальные условия Липшица:

$$\forall x_1, x_2\colon \quad \|x_1\| \le \rho, \quad \|x_2\| \le \rho$$

$$\|P(R(t, x_1) - R(t, x_2))\| \le C_0(t)\max^{\beta_1}(\|x_1\|, \|x_2\|)\|x_1 - x_2\|,$$

$$|\langle R(x_1) - R(x_2), \psi^s \rangle| \le C_s(t)\max^{\beta_2}(\|x_1\|, \|x_2\|)\|x_1 - x_2\|, \quad s = 1, \ldots, p.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены все перечисленные выше условия. Тогда если*

1) $\langle a, \psi^s \rangle = 0$, $s = 1, \ldots, p-1$;

2) $\int_0^t (t-\sigma)^s\,d\sigma \le C_s$, $s = 1, \ldots, p-1$, *на* R^+,

то задача (1) *имеет в некотором шаре* $\|x\| \le r$ *единственное ограниченное на* R^+ *обобщенное решение* $x = x(t, a)$ *для всех достаточно малых по норме начальных значений* a.

Замечание 1. Если $R = R(x)$ и $QR(x) = 0$, то условия теоремы 1 выполнены, однако зависимость R от t порождает новые возможности.

Замечание 2. Результат, сформулированный в теореме 1, означает, что тривиальное решение ДУ из задачи (1) является устойчивым по

Ляпунову в классе обобщенных решений задачи (1). Речь идет о новом варианте известной теоремы Ляпунова об устойчивости тривиального решения ДУ по линейному приближению. Однако теперь тривиальные решения как линеаризованного, так и нелинейного ДУ оказываются лишь устойчивыми по Ляпунову, а не асимптотически устойчивыми.

Рассмотрим более простой случай $p = 1$ отсутствия присоединенных элементов, не охватываемый формально теоремой 1. Теперь $V = N(A)$ — одномерное подпространство нулей оператора A.

Теорема 2. *Пусть* $n = 1$, *пусть* $c_1(t) \le C_1$, *и пусть сходится* $\int_0^{+\infty} c_0(\sigma)\,d\sigma$. *Тогда имеет место утверждение теоремы* 1.

Замечание 3. Если $\int_0^{+\infty} C_k(t) \le \text{const}$, $k = 1, 2$, то выполнены условия теоремы 2. Это предложение является частным случаем одного из результатов совместного обзора [5], выполненного в ходе реализации международного гранта Россия–Румыния. В [5] содержится и ряд новых фактов по вопросам устойчивости.

В ближайшем будущем автор планирует завершить исследование задачи (1) с обобщенно фредгольмовым оператором A (см. [6]), когда $1 < \dim A = \dim A^* < \infty$ и существуют согласованные жордановы наборы операторов A и A^*.

Список литературы

1. *Треногин В.А.* Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению как следствие теоремы о неявном операторе // ДАН. 2006. Т. 407, №1. С. 742–746.
2. *Trenogin V.A.* First Lyapunov method for the abstract parabolic equations // Proc. 5th ISAAC Congr., Univ. Catania, 2005. Singapore: World Sci., 2008. P. 83–90.
3. *Треногин В.А.* Линейное приближение для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве и устойчивость по Ляпунову // ДАН. 2009. Т. 428, №1. С. 458–461.
4. *Trenogin V.A., Ion A.-V.* New results in the stability study of non-autonomous evolution equations in Banach space // J. Math. Appl. 2010. N 33. P. 117–127.
5. *Trenogin V.A.* New results in the study of Lyapunov stability // Тр. Междунар. конгр. ISAAC-2011. М.: РУДН, 2012.
6. *Треногин В.А., Логинов Б.В., Ким-Тян Л.Р.* Устойчивость решений задачи Коши по линейному приближению и уравнение разветвления в корневом подпространстве // Тр. МИАН. 2012. Т. 278. В печати.

Типичные особенности полиморфизмов, порожденных задачей о разрушении адиабатического инварианта

Д. В. Трещев, П. Голубцов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Полиморфизмами называются многозначные сохраняющие меру Лебега отображения отрезка $[0, 1]$ на себя. Важный класс полиморфизмов возникает в задаче о разрушении адиабатического инварианта при переходе через сепаратрису. Мы планируем обсудить эргодические свойства этого класса полиморфизмов и их типичные особенности.

Свойства функции оптимального результата для одного класса задач управления с невыпуклым целевым множеством*

А. А. Успенский, П. Д. Лебедев

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

uspen@imm.uran.ru, pleb@yandex.ru

Приводятся алгоритмы построения (в точной аналитической или аппроксимационной форме) решений для одного класса задач быстродействия с круговой вектограммой скоростей и невыпуклым целевым множеством, имеющим кусочно гладкую границу [1]. Показана связь решений задач управления с обобщенными решениями краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка типа Гамильтона–Якоби [2] и уравнения эйконала [3]. В задачах

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-00427-а, 10-01-96006-р-урал-а), гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-5927.2012.1).

возникает один вид сингулярных кривых — рассеивающие линии L [4], отыскание которых является ключевым компонентом при конструировании функции оптимального результата $u(\mathbf{x})$. Кривые L совпадают с биссектрисами целевого множества, на которых происходят изломы волновых фронтов [5]. Изучены дифференциальные свойства функции $u(\mathbf{x})$, найден ее градиент в точках гладкости и обобщенные производные в точках негладкости [6]. Для задач с некоторыми типами целевых множеств исследованы выпуклость и вогнутость функции $u(\mathbf{x})$ [7]. Работа примыкает к исследованиям [8–10].

Список литературы

1. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
2. *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2003.
3. *Кружков С.Н.* Обобщенные решения уравнений Гамильтона–Якоби типа эйконала. I // Мат. сб. 1975. Т. 98, №3. С. 450–493.
4. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
5. *Арнольд В.И.* Особенности каустик и волновых фронтов. М.: Фазис, 1996.
6. *Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.* Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.
7. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
8. *Лебедев П.Д., Успенский А.А.* Аналитическое и численное конструирование функции оптимального результата для одного класса задач быстродействия // Прикладная математика и информатика: Тр. ф-та ВМК МГУ. 2007. №27. С. 65–79.
9. *Лебедев П.Д., Успенский А.А.* Построение функции оптимального результата в задаче быстродействия на основе множества симметрии // Автоматика и телемеханика. 2009. №7. С. 50–57.
10. *Лебедев П.Д., Успенский А.А.* Алгоритмы построения сингулярных множеств для одного класса задач быстродействия // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика, механика, компьют. науки. 2010. №3. С. 30–41.

Однотипная дифференциальная игра с выпуклыми целью и платой

В. И. Ухоботов, Д. В. Гущин

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия

ukh@csu.ru, off_side@mail.ru

В пространстве $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|\cdot\|$ рассматривается дифференциальная игра

$$\dot{z} = -a(t)\varphi(t)u + b(t)v, \qquad t \leqslant p. \tag{1}$$

Здесь функции $a(t) \geqslant 0$, $b(t) \geqslant 0$ интегрируемы на любом отрезке из полуоси $(-\infty, p]$. Управлением первого игрока являются произвольная функция $\|u(t,z)\| = 1$ и измеримая функция $\varphi\colon [t_0, p] \to [0,1]$. Управлением второго игрока является произвольная функция $\|v(t,z)\| \leqslant 1$. Движение $z(t)$ системы (1) с начальным условием $z(t_0)$ строится с помощью предельного перехода ломаных Эйлера. Заданы замкнутое выпуклое множество $Z \subset \mathbb{R}^n$ и скалярная функция $g(t,\varphi) \geqslant 0$ при $t \leqslant p$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$. Первый игрок стремится вывести точку $z(p)$ на множество Z и минимизировать интеграл $\int_{t_0}^{p} g(r, \varphi(r))\,dr$.

Зафиксируем измеримую функцию $\varphi\colon [t_0, p] \to [0,1]$ и рассмотрим игру (1) с условием окончания $z(p) \in Z$. Для этой игры альтернированный интеграл Л.С. Понтрягина [1] равен [2]

$$W(t;\varphi(\cdot)) = Z \overset{*}{-} \beta(t;\varphi(\cdot))S + \alpha(t;\varphi(\cdot))S.$$

Здесь

$$S = \{z \in \mathbb{R}^n \colon \|z\| \leqslant 1\},$$

$$\beta(t;\varphi(\cdot)) = \max_{t \leqslant \tau \leqslant p} \int_{\tau}^{p} (b(r) - a(r)\varphi(r))\,dr,$$

$$\alpha(t;\varphi(\cdot)) = \beta(t;\varphi(\cdot)) - \int_{t}^{p} (a(r)\varphi(r) - b(r))\,dr.$$

В [2] показано, что если $z(t_0) \notin W(t_0;\varphi(\cdot))$, то для любого управления $\|u(t,z)\| = 1$ найдутся управление $\|v(t,z)\| \leqslant 1$ и движение $z(t)$ такие, что $z(p) \notin Z$.

Пусть $z(t_0) \in W(t_0;\varphi(\cdot))$. Обозначим

$$\varepsilon(t,z) = \min\bigl\{\varepsilon \geqslant 0 \colon z \in W(t;\varphi(\cdot)) + 2\varepsilon S\bigr\}.$$

Тогда существует функция $\|u_\varphi(t,z)\| = 1$ такая, что

$$z - \varepsilon(t,z)u_\varphi(t,z) \in W(t;\varphi(\cdot)) + \varepsilon S.$$

Теорема 1. *Управление $u_\varphi(t,z)$ обеспечивает включение $z(p) \in Z$ для любого управления $\|v(t,z)\| \leqslant 1$ и для любого движения $z(t)$.*

Рассмотрим оптимизационную задачу

$$\int_{t_0}^{p} g(r,\varphi(r))\,dr \to \min, \qquad \varphi\colon [t_0,p] \to [0,1], \qquad z(t_0) \in W(t_0;\varphi(\cdot)). \quad (2)$$

Теорема 2. *Пусть функция $g(t,\varphi) \geqslant 0$ при каждом $t \leqslant p$ выпукла и непрерывна по $\varphi \in [0,1]$, а при любом $\varphi \in [0,1]$ она измерима и ограничена сверху суммируемой на каждом отрезке из полуоси $(-\infty,p]$ функцией. Тогда если включение в* (2) *выполнено для некоторой измеримой функции $\varphi\colon [t_0,p] \to [0,1]$, то решение $\varphi_0\colon [t_0,p] \to [0,1]$ в задаче* (2) *существует.*

Список литературы

1. *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. 1980. Т. 112, №3. С. 307–330.
2. *Ухоботов В.И.* Однотипные дифференциальные игры с выпуклой целью // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, №5. С. 196–204.

Аппроксимация множеств достижимости управляемых систем на конечном промежутке времени*

В. Н. Ушаков, А. Р. Матвийчук, А. В. Ушаков

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

ushak@imm.uran.ru, matv@imm.uran.ru, aushakov.pk@gamail.com

Доклад посвящен вопросам, относящимся к множествам достижимости управляемых систем. Рассматриваются вопросы, связанные с вычислением множеств достижимости. Как правило, множества достижимости не поддаются эффективному аналитическому описанию. В докладе представлена одна общая схема приближенного вычисления множеств достижимости дифференциальных включений на конечном промежутке времени. Приведены примеры приближенного вычисления множеств достижимости дифференциальных включений. Тематика доклада примыкает к работам [1–8].

Список литературы

1. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
2. *Kurzhanski A.B., Valyi I.* Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997.
3. *Варайа П., Куржанский А.Б.* Эллипсоидальные методы для задач динамики и управления. Ч. 1 // Совр. математика и ее прил. 2005. Т. 23. С. 34–72.
4. *Гусев М.И.* Оценки множеств достижимости многомерных управляемых систем с перекрестными связями // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15, №4. С. 82–94.
5. *Гусейнов Х.Г., Моисеев А.Н., Ушаков В.Н.* Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем // ПММ. 1998. Т. 62, №2. С. 179–187.
6. *Тонков Е.Л., Панасенко Е.А.* Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Тр. МИАН. 2008. Т. 262. С. 202–221.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-12088-офи-м-2011), гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-5927.2012.1), программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Динамические системы и теория управления”, УрО РАН (проект 09-П-1-1013).

7. *Родина Л.И., Тонков Е.Л.* Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, №2. С. 265–288.
8. *Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Ушаков А.В.* Аппроксимация множеств достижимости и интегральных воронок дифференциальных включений // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2011. №4. С. 23–39.

Динамика многозначных оценок множеств достижимости управляемых систем с неопределенностью*

Т. Ф. Филиппова

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

ftf@imm.uran.ru

Рассматриваются задачи оценивания множеств достижимости управляемой динамической системы, т.е. множеств состояний фазового пространства, куда фазовая точка может быть переведена из начального состояния (или множества начальных состояний) за заданное время при помощи допустимых управлений. Задачи, связанные с точным построением или приближенным оцениванием множеств достижимости управляемых систем, являются одними из фундаментальных проблем в теории управления и теории дифференциальных игр [1–3], их решение может быть использовано также в исследовании сложных реальных систем различной природы (механических, экономических, экологических и др.). Отметим, что форма и структура множеств достижимости динамических систем могут быть довольно сложными. В этих случаях представляет интерес приближение множеств достижимости областями определенной канонической формы. В качестве таких областей наиболее естественными являются эллипсоиды, параллелепипеды, многогранники и некоторые другие канонические множества.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09-01-00223-а, 11-01-12088-офи-м-2011).

В последние годы разработана полная теория построения оценок (внешних и внутренних) множеств достижимости линейных управляемых систем, основанная на технике эллипсоидального исчисления [4, 5]. В рамках этого подхода основная задача состоит в нахождении эллипсоида (или семейства эллипсоидов) в фазовом пространстве, оценивающего сверху или снизу по отношению к операции включения множеств искомую область достижимости. В работах [6, 7] техника эллипсоидального исчисления была использована для решения задач оценивания трубок траекторий некоторых нелинейных управляемых динамических систем с неопределенностью по начальным данным. При этом предполагалось, что динамическая система имеет специальную структуру, в которой нелинейные члены являются квадратичными по фазовым координатам, а значения неопределенных начальных состояний и допустимых управлений стеснены эллипсоидальными ограничениями. Рассматривались также схемы построения многозначных оценок множеств достижимости импульсных управляемых систем, основанные на идеях и методах эллипсоидального исчисления. При этом ограничение на управляющие импульсы задавалось в виде специального обобщенного “эллипсоида” в пространстве функций ограниченной вариации [8].

В данной работе техника эллипсоидального исчисления развивается для решения задач оценивания трубок траекторий нелинейных управляемых динамических систем с неопределенностью по начальным данным. Для оценивания множеств достижимости нелинейного дифференциального включения, соответствующего управляемой системе, используются результаты, полученные ранее в работах [6–8], а также результаты теории эллипсоидального оценивания линейных управляемых систем и теории эволюционных уравнений многозначных состояний нелинейных динамических систем, функционирующих в условиях неопределенности. Найдены дифференциальные уравнения, описывающие динамику эллипсоидальных оценок множеств достижимости нелинейной управляемой системы с неопределенностью по начальным данным.

Список литературы

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
2. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
3. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

4. *Kurzhanski A.B., Valyi I.* Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997.
5. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
6. *Филиппова Т.Ф.* Построение многозначных оценок множеств достижимости некоторых нелинейных динамических систем с импульсным управлением // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15, №4. С. 262–269.
7. *Filippova T.F.* Differential equations of ellipsoidal state estimates in nonlinear control problems under uncertainty // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2011. Suppl. P. 410–419.
8. *Филиппова Т.Ф., Матвийчук О.Г.* Алгоритмы оценивания множеств достижимости импульсных управляемых систем с эллипсоидальными фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. 2011. №9. С. 127–141.

Асимптотическая наблюдаемость систем с запаздыванием*

В. В. Фомичев

МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия

fomichev@cs.msu.su

Для систем с запаздыванием даже в простейшем случае линейных стационарных систем с соизмеримыми запаздываниями существуют различные определения наблюдаемости и соответственно различные постановки задачи наблюдения. Предполагается рассматривать один из возможных вариантов, а именно задачу асимптотического наблюдения.

Пусть задана система

$$\begin{cases} \dot{x} = A(d)x, \\ y = C(d)x, \end{cases} \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — неизвестный фазовый вектор системы, $y \in \mathbb{R}$ — известный выход системы, $A(d)$ и $C(d)$ — известные полиномиальные матрицы степени не выше k, где d — оператор запаздывания (т.е. $d(f(t)) = f(t-\tau)$).

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-07-00441).

Требуется по текущей информации ($y(t)$ и $y(\Theta)$, $\Theta \in [0,t]$) в режиме реального времени сформировать оценку $\tilde{x}(t)$ фазового вектора такую, что $|\tilde{x}(t) - x(t)| \to 0$ при $t \to \infty$. Считаем, что для системы (1) заданы начальные условия, гарантирующие существование и единственность решения при $t \geq 0$, однако сами они неизвестны.

Определение 1. Система (1) асимптотически наблюдаема, если из равенства выходов $y_1(t) = y_2(t)$ следует, что фазовые векторы удовлетворяют условию $|x_1(t) - x_2(t)| \to 0$ при $t \to \infty$.

Для решения задачи рассмотрим матрицу наблюдаемости Калмана

$$\mathcal{N}(C(d), A(d)) = \begin{bmatrix} C(d) \\ C(d)A(d) \\ \dots \\ C(d)A^{n-1}(d) \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Обозначим через $\gamma(d) = \det \mathcal{N}(C(d), A(d))$ определитель $\mathcal{N}(C, A)$, а через $\mathcal{N}^*(d)$ присоединенную матрицу для $\mathcal{N}(C, A)$. Тогда

$$\mathcal{N}^*(d)Y(t) = \gamma(d)x(t), \tag{3}$$

где $Y(t) = [y(t); y^{(1)}(t); \dots; y^{(n-1)}(t)]^{\mathrm{T}}$.

Имеет место

Теорема. *Система* (1) *асимптотически наблюдаема тогда и только тогда, когда устойчив полином* $\gamma(d)$ (*т.е. корни лежат внутри единичной окружности в* $\mathbb{C}$).

Для решения задачи при выполнении условий теоремы при доступной информации о выходе и его производных можно использовать следующий подход. Рассмотрим вектор $\mathcal{N}^*(d)Y(t) = [\tilde{y}_1(t); \dots; \tilde{y}_n(t)]$, где $\tilde{y}_i$ — некоторая линейная комбинация выхода и его производных в моменты времени $t, t-\tau, \dots, t-k\tau$. Тогда $x_i(t)$ (следует из (3)) удовлетворяет разностному уравнению

$$\gamma(d)x_i(t) = \tilde{y}_i(t).$$

В этом случае задачу решает разностный наблюдатель $\gamma(d)\tilde{x}_i(t) = \tilde{y}_i(t)$, $\tilde{x}_i(\Theta) = 0$ при $\Theta \in (-k\tau, 0]$. При этом в силу устойчивости $\gamma(d)$ следует $|x_i(t) - x(t)| \to 0$ при $t \to \infty$.

Об условии трансверсальности на бесконечности в задачах управления*

Д. В. Хлопин

Институт Математики и Механики УрО РАН,
Екатеринбург, Россия

khlopin@imm.uran.ru

Принцип максимума Понтрягина (ПМП) на бесконечном промежутке был выписан уже Л.С. Понтрягиным и его учениками в [1] для случая фиксированного правого конца. Общий ПМП для бесконечного промежутка был доказан в [2], но найти универсальное условие трансверсальности хотя бы для задачи со свободным правым концом пока не удается: большинство предложенных условий могут выделить слишком много решений ПМП или оказаться несовместными с ними (см. [4, §6, §16]). В отличие от них в цикле работ [3–5] начальное значение сопряженной переменной выражается через несобственный интеграл от разворачивающейся пары (управление, траектория). Полученная при этом краевая задача имеет для каждой такой оптимальной пары в точности одно решение. Анонсируемый доклад посвящен возможности распространения такого условия трансверсальности на более общие задачи.

Определим $\mathbf{T} \triangleq \{t \in \mathbf{R} \mid t \geq 0\}$, $\mathbf{X} \triangleq \mathbf{R}^m$, $\mathbf{U} \triangleq \mathbf{R}^r$. Пусть $\mathfrak{U}$ — семейство всех измеримых селекторов многозначного отображения $U\colon \mathbf{T} \multimap \mathbf{U}$. Поставим задачу

$$\dot{x} = f(t,x,u), \qquad x(0)=0, \quad t \in \mathbf{T}, \quad x \in \mathbf{X}, \quad u \in U(t), \tag{1a}$$

$$J_T[u] \triangleq \int_0^T g\big(t, x(t), u(t)\big)\,dt \overset{T\to\infty}{\rightsquigarrow} \max. \tag{1b}$$

Далее будем считать, что U компактнозначно, локально интегрально ограничено с измеримым графиком; f, g и их производные по x — локально липшицевые по x отображения Каратеодори, интегрально ограниченные на компактах; f удовлетворяет условию подлинейного роста.

Для каждой последовательности $\tau \triangleq (\tau_n)_{n\in\mathbf{N}} \uparrow \infty$ моментов времени будем говорить, что управление $u^0 \in \mathfrak{U}$ *равномерно τ-оптимально*, если

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-90432-укр-ф-а).

$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall u \in \mathfrak{U}\ \forall n \in \overrightarrow{N,\infty}\ J_{\tau_n}[u] \leq J_{\tau_n}[u^0] + \varepsilon$. Пусть для некоторой последовательности $\tau \uparrow \infty$ такое управление u^0 существует.

Для всякого $\xi \in \mathbf{X}$ введем x_ξ — решение (1a) при $x_\xi(0) = \xi$, $u \equiv u^0$; A_ξ — решение матричной задачи Коши

$$\frac{dA_\xi(t)}{dt} = \frac{\partial f(t, x_\xi(t), u^0(t))}{\partial x} A_\xi(t), \qquad A_\xi(0) = 1_{\mathbf{L}},$$

и для всех $T \in \mathbf{T}$ вектор $I_\xi(T) \triangleq \int_0^T \frac{\partial g(t,x_\xi(t),u^0(t))}{\partial x} A_\xi(t)\,dt$.

Воспользовавшись полунепрерывностью соотношений ПМП, а также соображениями типа устойчивости, можно показать, что среди решений ПМП найдется такое (далее $A_0(\tau)$-*нулевое*) решение, что график всякой содержащей его открытой трубки решений системы ПМП пересекается с гиперплоскостями $\{(\tau_n, x(\tau_n), \psi) \mid \psi A_0(\tau_n) = 0_{\mathbf{X}}\}$ при неограниченно больших $n \in \mathbf{N}$. Как следствие, имеет место

Теорема. *Пусть выполнено одно из двух условий*:

$$\exists I_* \triangleq \lim_{n\to\infty,\ \xi\to 0} I_\xi(\tau_n) \in \mathbf{X}, \tag{2a}$$

$$\exists \varpi \triangleq \lim_{n\to\infty,\ \xi\to 0} \frac{I_\xi(\tau_n)}{\|I_\xi(\tau_n)\|_{\mathbf{X}}} \in \mathbf{X}, \qquad \lim_{n\to\infty,\ \xi\to 0} \|I_\xi(\tau_n)\|_{\mathbf{X}} = \infty. \tag{2b}$$

Тогда существует единственная (с точностью до положительного множителя) пара (λ^0, ψ^0), для которой $(x^0, u^0, \lambda^0, \psi^0)$ — $A_0(\tau)$-нулевое решение принципа максимума; при этом соответственно $\forall T \in \mathbf{T}$

$$\lambda^0 = 1, \qquad \psi^0(T) \triangleq \bigg(I_* - \int_0^T \frac{\partial g(t, x^0(t), u^0(t))}{\partial x} A_0(t)\,dt\bigg) A_0^{-1}(T), \tag{3a}$$

$$\lambda^0 = 0, \qquad \psi^0(T) \triangleq \varpi A_0^{-1}(T). \tag{3b}$$

Отметим, что условие (3a) ранее было показано А.В. Кряжимским, С.М. Асеевым и В.М. Вельевым в удобных для проверки предположениях на рост функций f, g (см. [4, теорема 12.1; 5, Theorem 1]). Из них следует (2a); с другой стороны, в [5] не требуется равномерная оптимальность.

Отметим также, что на основе [6] можно построить пример невырожденной задачи, в которой формула (3a) не удовлетворяет условию максимума, следовательно, такое условие не является универсальным, в частности, равномерность предела по ξ в (2a) не может быть пропущена.

Список литературы

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
2. *Halkin H.* Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons // Econometrica. 1974. V. 42. P. 267–272.
3. *Aseev S.M., Kryazhimskii A.V.* The Pontryagin maximum principle and transversality conditions for a class of optimal control problems with infinite time horizons // SIAM J. Control Optim. 2004. V. 43. P. 1094–1119.
4. *Асеев С.М., Кряжимский А.В.* Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста. М.: Наука, 2007. (Тр. МИАН; Т. 257).
5. *Aseev S.M., Veliov V.M.* Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems with dominating discount // Dyn. Contin. Discrete Impulsive Syst. B: Appl. Algorithms. 2012. V. 19. P. 43–63.
6. *Арнольд В.И.* Оптимизация в среднем и фазовые переходы в управляемых динамических системах // Функц. анализ и его прил. 2002. Т. 36, №2. С. 1–11.

Ультрафильтры в абстрактных задачах о достижимости с ограничениями асимптотического характера*

А. Г. Ченцов

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

chentsov@imm.uran.ru

Рассматривается задача о построении множеств притяжения (МП) в топологических пространствах (ТП), являющихся асимптотическими аналогами областей достижимости в теории управления. Используются несеквенциальные аналоги приближенных решений Дж. Варги [1, гл. III].

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 10-01-96020, 10-08-00484) и программы фундаментальных исследований Президиума РАН (проекты 09-П-1-1007, 09-П-1-1014).

1. Пусть E — непустое множество (обычных решений), а $\mathcal{E}$ — непустое семейство подмножеств (п/м) E, определяющее ограничения асимптотического характера. Заданы непустое множество $\mathbf{H}$ и отображение $\psi\colon E \to \mathbf{H}$, именуемое целевым. Элементы пересечения E_0 всех множеств из $\mathcal{E}$ интерпретируем как точные решения, а множество-образ $\psi^1(E_0) \triangleq \{\psi(x)\colon x \in E_0\}$ — как достижимое в обычном смысле множество в $\mathbf{H}$. Вариант построения асимптотического аналога $\psi^1(E_0)$ можно связать с построением компакта ультрафильтров (у/ф) множества $\mathbb{H} \triangleq \psi^1(E)$: непустое множество $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]$ всех у/ф $\mathbb{H}$ оснащаем топологией $\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}]$, базу которой составляют множества $\{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}] \mid A \in \mathcal{U}\}$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{H})$; здесь $\mathcal{P}(\mathbb{H})$ — семейство всех п/м $\mathbb{H}$. В нульмерный компакт $(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}], \tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}])$ погружаем $\mathbb{H}$ посредством инъективного оператора $\mathbf{n}\colon \mathbb{H} \to \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]$, для которого $\mathbf{n}(h) \triangleq \{S \in \mathcal{P}(\mathbb{H}) \mid h \in S\}\ \forall h \in \mathbb{H}$. Оператор $\mathbf{n} \circ \psi$ переводит E в п/м $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]$, состоящее из тривиальных у/ф $\mathbb{H}$, и является несущественным преобразованием ψ; ему соответствует МП $(\mathbf{as})[E; \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]; \tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}]; \mathbf{n} \circ \psi; \mathcal{E}]$ [2, с. 228], которое может рассматриваться в качестве асимптотического аналога $\psi^1(E_0)$. Данное МП является [2, теорема 4.1] непрерывным образом замкнутого п/м компакта $(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]; \tau_{\mathbf{fi}}[E])$ [2, с. 227], определяемого по аналогии с $(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]; \tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}])$. Это п/м имеет вид $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E \mid \mathcal{E}] \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{U}\}$. Элементы $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E \mid \mathcal{E}]$ рассматриваются в качестве обобщенных элементов, а представление [2, теорема 4.1] связывается с процедурой расширения: E погружается в компакт $(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E])$ в виде всюду плотного множества $\mathbf{m}^1(E)$, где $\mathbf{m}\colon E \to \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ таково, что $\mathbf{m}(x) \triangleq \{T \in \mathcal{P}(E) \mid x \in T\}\ \forall x \in E$. С другой стороны, у/ф из $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E \mid \mathcal{E}]$ можно [3, (2.2)] рассматривать и в качестве несеквенциальных аналогов приближенных решений Дж. Варги. Основная трудность связана с отсутствием конструктивного представления свободных [4, с. 271] у/ф.

2. Естественный вариант модификации конструкций расширения [5] с использованием у/ф связан с пространствами Стоуна, когда у/ф семейства всех п/м того или иного множества заменяются у/ф измеримого пространства (ИП) с алгеброй множеств (см. [2, 3]). Возможны и более общие постановки, в рамках которых используются у/ф π-систем [6] с “нулем” и “единицей”, в рамках которых удается осуществить оценивание МП в $(\mathbf{H}, \tau)$, где τ — хаусдорфова топология $\mathbf{H}$; в этом случае роль свободных у/ф $\mathbb{H}$ может “перекладываться” на точки из $\mathbf{H} \setminus \mathbb{H}$ (общие положения см. в [7]). При этом широко используется сходимость баз фильтров [8, гл. I] для представления МП в $(\mathbf{H}, \tau)$.

В [2, 9] указаны варианты ИП, для которых удается получить исчерпывающее описание компактов Стоуна, включая представления свободных у/ф упомянутых ИП. Наиболее существенным представляется вариант [9], для которого удается реализовать представление МП в тихоновской степени ТП, метризуемого полной метрикой, в условиях, когда пространство решений — отрезок вещественной прямой с алгеброй, порожденной промежутками (открытыми, полуоткрытыми и замкнутыми), содержащимися в данном отрезке. Целевой оператор задачи должен обладать компонентами в виде ярусных отображений в полном метрическом пространстве (имеются в виду равномерные пределы ступенчатых).

Список литературы

1. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
2. *Ченцов А.Г.* Об одном представлении результатов действия приближенных решений в задаче с ограничениями асимптотического характера // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, №2. С. 225–239.
3. *Ченцов А.Г.* Ультрафильтры измеримых пространств как обобщенные решения в абстрактных задачах о достижимости // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, №1. С. 268–293.
4. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
5. *Ченцов А.Г.* Расширения абстрактных задач о достижимости: несеквенциальная версия // Тр. ИММ УрО РАН. 2007. Т. 13, №2. С. 184–217.
6. *Булинский А.В., Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005.
7. *Ченцов А.Г.* Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2011. №1. С. 113–143.
8. *Бурбаки Н.* Общая топология. М.: Наука, 1968.
9. *Ченцов А.Г.* Об одном примере представления пространства ультрафильтров алгебры множеств // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, №4. С. 293–311.

Bony and Thick Attractors*

Yu. S. Ilyashenko

Moscow State University; Independent University of Moscow; Steklov Mathematical Institute; National Research University "Higher School of Economics," Moscow, Russia; Cornell University, USA

yulijs@gmail.com

Understanding the structure of attractors of generic dynamical systems is one of the major goals of the theory of these systems. A vast general program suggested by Palis presents numerous conjectures about this structure. Various particular cases of these conjectures are proved in numerous papers that we do not quote here. Main part of these investigations is related to diffeomorphisms of closed manifolds.

Our investigation is in a sense parallel to this direction of research. In the first part of the talk, attractors of *manifolds with boundary onto themselves* are studied. At present, locally generic properties of attractors of such maps are established, that are not yet observed (and plausibly do not hold) for the case of closed manifolds. For instance, an open set of diffeomorphisms of manifolds with boundary onto themselves may have attractors with intermingled basins [5, 1, 4]. The strongest result of this kind is obtained by Kleptsyn and Saltykov in [6]

Another property of this kind is *having thick attractors*. It is a general belief that attractors of typical smooth dynamical systems (diffeomorphisms and flows) on closed manifolds either coincide with the whole phase space or have Lebesgue measure zero. In this talk we show that this is not the case for diffeomorphisms of manifolds with boundary onto themselves. Namely, in the space of diffeomorphisms of a product $T^2 \times I$, $I = [0, 1]$, there exists an open set such that any map from a complement of this set to a countable number of hypersurfaces has a thick attractor: a transitive attractor that has positive Lebesgue measure together with its complement [2]

The problem of whether or not thick attractors exist for locally generic diffeomorphisms of a closed manifold remains widely open.

In the second part we study so called bony attractors. These are attractors of skew products over a Bernoulli shift with the following unexpected

*The research was supported in part by the NSF (project no. 0700973), RFBR (project no. 10-01-00739-a), and RFBR–CNRS (project no. 10-01-93115-NTSNIL-a).

property: the map has an invariant manifold, and the intersection of the attractor with that manifold, called a *bone*, is much larger than the attractor of the restriction of the map to the invariant manifold. Bony attractors with one-dimensional bones were discovered in [7]. We construct bones of arbitrary dimension [3].

It is expected that bony attractors are in a sense locally generic in the space of diffeomorphisms of a closed manifold.

References

1. *Bonatti C., Diaz L., Viana M.* Dynamics beyond uniform hyperbolicity. Berlin: Springer, 2004.
2. *Ilyashenko Yu.* Thick attractors of boundary preserving diffeomorphisms // Indag. Math. 2011. V. 22, N 3–4. P. 257–314.
3. *Ilyashenko Yu.* Multidimensional bony attractors // Funct. Anal. Appl. (in press).
4. *Ilyashenko Yu., Kleptsyn V., Saltykov P.* Openness of the set of boundary preserving maps of an annulus with intermingled attracting basins // J. Fixed Point Theory Appl. 2008. V. 3. P. 449–463.
5. *Kan I.* Open sets of diffeomorphisms having two attractors, each with everywhere dense basin // Bull. Amer. Math. Soc. 1994. V. 31. P. 68–74.
6. *Kleptsyn V., Saltykov P.* On C^2-robust attractors with intermingled basins for boundary preserving maps // Proc. Moscow Math. Soc. 2011. V. 72, N 2. P. 249–280.
7. *Kudryashov Yu.G.* Bony attractors // Funct. Anal. Appl. 2010. V. 44, N 3. P. 73–76.

On Tracking Solutions of Dynamical Systems by Feedback Rules*

V. I. Maksimov

Institute of Mathematics and Mechanics, Ekaterinburg, Russia

maksimov@imm.uran.ru

In the report we discuss a technical approach, based on the method of regularized extremal shift (RES) [1–3], intended to help solve problems of stable control of uncertain dynamical systems. Our goal is to demonstrate the essence and abilities of the RES technique; for this purpose we construct feedback controller for approximate tracking a prescribed trajectory of an inaccurately observed dynamical system affected by uncertain non-observable input disturbances. Here, we present one of results. Let H and V be real Hilbert spaces, and let V be a dense subspace of H and $V \subset H \subset V^*$ algebraically and topologically. We assume that $(\cdot,\cdot)$ stands for the inner product in H and $\langle\cdot,\cdot\rangle$ stands for the duality relation between V and V^*. We consider a parabolic variational inequality

$$\begin{gathered}\langle \dot w(t) + Aw(t), x(t) - z\rangle + \varphi(w(t)) - \varphi(z) \le (Bv(t) + f(t), x(t) - z)\\ \text{for a.a. } t \in T \text{ and all } z \in V, \quad w(t_0) = w_0.\end{gathered} \tag{1}$$

Here $A\colon V \to V^*$ is a linear continuous and symmetrical operator satisfying (for some $c > 0$ and real ω_0) the coercivity condition

$$\langle Aw, w\rangle + \omega_0|w|_H^2 \ge c|w|_V^2 \qquad \forall y \in V,$$

U is a Hilbert space, $f \in L_2(T;H)$ is a given function, $|\cdot|_H$, $|\cdot|_U$ and $|\cdot|_V$ stand for the norms in H, U and V, respectively, $B\colon U \to H$ is a linear continuous operator, and $\varphi\colon V \to \overline{\mathbb{R}} = \{r \in \mathbb{R}\colon -\infty < r \le +\infty\}$ is a lower semicontinuous convex function.

Assume that along with inequality (1) we have another inequality of the same form:

$$\begin{gathered}\langle \dot x(t) + Ax(t), x(t) - z\rangle + \varphi(x(t)) - \varphi(z) \le (Bu(t) + f(t), x(t) - z)\\ \text{for a.a. } t \in T \text{ and all } z \in V\end{gathered} \tag{2}$$

*This work was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research (11-01-12112-ofi-m) and by the Ural–Siberian Integration Project (12-C-1-1017).

with an initial state $x(t_0) = x_0$. This inequality (we call it etalon) is subject to the action of some etalon control $u(\cdot) \in L_2(T; U)$. The etalon control and the corresponding solution $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$ of inequality (2) are a priori unknown. At discrete, frequent enough, time moments

$$\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m \qquad (\tau_0 = t_0, \quad \tau_m = \vartheta, \quad \tau_{i+1} = \tau_i + \delta),$$

the states $w(\tau_i) = w(\tau_i; t_0, w_0, v(\cdot))$ of inequality (1), as well as the states $x(\tau_i) = x(\tau_i; t_0, x_0, u(\cdot))$ of etalon inequality (2), are measured. The states $w(\tau_i)$ are measured with an error. The results of measurements are elements $\xi_i^h \in H$ satisfying the inequalities

$$|w(\tau_i) - \xi_i^h|_H \leq h, \qquad i \in [1 : m-1].$$

Here, the value $h \in (0, 1)$ is the measurement accuracy. It is required to design an algorithm for forming the control $v = v^h(\cdot)$ in inequality (1) allowing us to track the solution $x(\cdot)$ of inequality (2) by the solution $w(\cdot)$ of inequality (1). Along with measuring the phase states at discrete time moments, we also consider the case of "continuous" measuring of the states $x(t)$ and $w(t)$; i.e., at every time $t \in T$, the phase states of inequalities (1) and (2) are measured; as a result, we have the functions $x(t)$ and $\xi^h(t) \in H$. The latter has the property

$$|\xi^h(t) - w(t)|_H \leq h, \qquad t \in T.$$

Consider the case of "continuous" measuring of solutions of inequalities (1) and (2). In this case, the problem consists in designing a rule forming (by the feedback principle) a control $v = v(\cdot, \xi^h(\cdot), w(\cdot))$ on the right-hand side of inequality (1) such that the deviation of $w(\cdot) = w(\cdot; t_0, w_0, v^h(\cdot))$ from $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$ in the metric of the space $C(T; H) \cap L_2(T; V)$ is small if the measurement accuracy h is small enough.

Let a function $\alpha = \alpha(h) \colon (0, 1) \to (0, 1)$ be fixed. Let the control $v^{\alpha,h}(t)$ in inequality (1) be defined by the formula

$$v = v^{\alpha,h}(t) = \alpha^{-1} B^*(x(t) - \xi^h(t)). \tag{3}$$

Here B^* denotes the adjoint operator.

Theorem. *Let $\omega > 0$ and $\alpha = \alpha(h) = h^{2/3}$. Then the inequality*

$$|x(\cdot) - w^{\alpha,h}(\cdot)|_{C(T;H)} + |x(\cdot) - w^{\alpha,h}(\cdot)|_{L_2(T;V)} \leq d_0 h^{1/3}, \qquad t \in T,$$

is fulfilled.

Here $d_0 = \text{const} > 0$ is a constant, which does not depend on $h \in (0, 1)$, and $w^{\alpha,h}(\cdot)$ is the solution of inequality (1) corresponding to the function $v = v^{\alpha,h}(\cdot)$ of form (3).

References

1. *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-theoretical control problems. Springer: New York, 1988.
2. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse problems for ordinary differential equations: Dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995.
3. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I.* Methods of dinamical reconstruction of inputs of controlled systems. Ekaterinburg, 2011 (in Russian).

Canard Cycles in Generic Slow–Fast Systems on the Two-Torus*

I. V. Schurov

National Research University "Higher School of Economics," Moscow, Russia

ilya@schurov.com

We show that there exist generic slow–fast systems with only one (time-scaling) parameter on the two-torus, which have attracting canard cycles for arbitrary small values of this parameter. This is in drastic contrast with the planar case, where canards usually occur in two-parametric families. The number of canard cycles is no more than the number of fold points of the slow curve. This estimate is exact for every system from some open set.

Consider a generic slow–fast system:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon), \end{cases} \qquad \varepsilon \in (\mathbb{R}, 0). \tag{1}$$

For the planar case (i.e. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$), there is a rather simple description of its behavior for small ε. It consists of interchanging phases of slow motion

*This work is supported in part by the RFBR (project no. 07-01-00017-a), RFBR/CNRS (project no. 10-01-93115-НЦНИЛ-a) and by a grant of the President of the Russian Federation (project no. MK-2790.2011.1).

along stable parts of the slow curve $M := \{(x, y) \mid f(x, y, 0) = 0\}$ and fast jumps along straight lines $y = \text{const}$. Given additional parameters, which depend on ε, one can observe more complicated behavior: appearance of *duck* (or *canard*) solutions (particularly limit cycles), i.e. solutions whose phase curves contain an arc of length bounded away from 0 uniformly in ε, that keeps close to the unstable part of the slow curve.

In [1], Yu.S. Ilyashenko and J. Guckenheimer discovered a new kind of behavior of slow–fast systems on the two-torus. It was shown that for some particular family with no auxiliary parameters there exists a sequence of intervals accumulating at 0, such that for any ε from these intervals, the system has exactly two limit cycles, both of which are canards, where one is stable and the other unstable. Yu.S. Ilyashenko and J. Guckenheimer conjectured that there exists an open domain in the space of slow–fast systems on the two-torus with the same property. Here we present a proof of this conjecture.

Results. Consider system (1) and assume that the phase space is the two-torus:

$$(x, y) \in \mathbb{T}^2 \cong \mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z}^2). \tag{2}$$

Assume that the speed of the slow motion is bounded away from zero ($g > 0$), the slow curve M is a smooth connected curve, and its lift to the covering coordinate plane is contained in the interior of the fundamental square $\{|x| < \pi,\ |y| < \pi\}$. We also assume that all fold points (i.e. the points of M where the tangent to M is parallel to the x-axis) are nondegenerate (the tangency rate is quadratic). In this case, the number of fold points is finite and even: let us denote it by $2N$.

Theorem 1. *For any generic slow–fast system on the two-torus with the described properties, under some additional nondegeneracy assumptions, the following properties hold. There exists a positive number $k \le N$ and a sequence of intervals accumulating to zero, such that for every ε that belongs to these intervals the system has exactly k attracting and k repelling limit cycles, which make one rotation along the y-axis during the period. All these cycles are canards. The measure of their basins is bounded from below uniformly for $\varepsilon \to 0^+$. For any small $\varepsilon > 0$, the number of limit cycles that make one rotation along the y-axis is bounded by $2k$.*

Theorem 2. *There exists an open set in the space of slow–fast systems on the two-torus for which the number k of attracting canard cycles is maximal and equal to N.*

The presented proof of these theorems uses well-developed techniques of geometric singular perturbation theory pioneered by Pontryagin and Mishchenko as well as recent results in the theory of normal forms and new technical results on the slow–fast dynamics on the two-torus.

Acknowledgements. The author would like to express his sincere appreciation to Yu.S. Ilyashenko for the statement of the problem and his assistance with the work and to V. Kleptsyn for fruitful discussions, valuable comments and ideas.

References

1. *Guckenheimer J., Ilyashenko Yu. S.* The duck and the devil: Canards on the staircase // Moscow Math. J. 2001. V. 1, N 1. P. 27–47.
2. *Schurov I.* Ducks on the torus: existence and uniqueness // J. Dyn. Control Syst. (in press); arXiv: 0910.1888.
3. *Shchurov I. V.* Canard cycles in generic fast–slow systems on the torus // Trans. Moscow Math. Soc. 2010. P. 175–207.

Canards, Canard Cascades and Black Swans

E. A. Shchepakina, V. A. Sobolev

Samara Aerospace University, Samara, Russia

hsablem@yahoo.com

A canard trajectory is a trajectory of a singularly perturbed system of differential equations if it follows at first a stable invariant manifold and then an unstable one. In both cases the distances travelled are not infinitesimally small. If a trajectory at first follows an unstable invariant manifold and then a stable one, it is called a false canard.

In a majority of papers devoted to canards the term *canard* is associated with periodic trajectories. In our work a canard is a trajectory of a singularly perturbed system of differential equations if it, at first, follows a stable integral manifold and then an unstable one. In both cases the distances travelled are more than infinitesimally small. A canard may be considered as the result of gluing stable (attractive) and unstable (repelling) slow integral manifolds at one point of the breakdown surface, due to the availability of an additional scalar parameter in the differential system. If we take an additional function of a vector variable parameterizing the breakdown surface, we can glue the stable (attractive) and unstable (repelling) slow integral manifolds at all points of the breakdown curve at the same time. As a result we obtain the continuous stable/unstable (attractive/repelling) integral surface or black swan. Such surfaces are considered as a multidimensional analogue of the notion of a canard. In the case of planar system, if we take an additional function whose arguments are a vector parameter and slow variable, we can glue the stable (attractive) and unstable (repulsive) slow invariant manifolds at all breakdown points at the same time. As a result we obtain a canard cascade. It is possible to consider the gluing function as a special kind of partial feedback control. The goal of the paper is to discuss the notions of *canard cascade* and *black swan* as a natural generalization of the term *canard*, to derive sufficient conditions for the existence of canard cascades, and to demonstrate how canard cascades arise in the van der Pol equation.

To illustrate the idea of the canard cascade construction, consider the van der Pol model.

Consider the differential system

$$\dot{x} = y - \mu, \qquad \varepsilon\dot{y} = p_3(y) - x, \tag{1}$$

where $p_3 = Ay^3 + By^2 + Cy + D$ is a cubic polynomial in y. The corresponding slow curve $x = p_n(y)$ can have two jump points. The derivative of $p_3(y)$ is $3Ay^2 + 2By + C$. In the case $B^2 - 3AC > 0$ it has two roots $(-B \pm \sqrt{B^2 - 3AC})/3A$, which correspond to two jump points; it seems natural to seek μ in the form of a polynomial with two coefficients, i.e. $\mu = ax + b$.

It is possible to try to search for a slow invariant manifold in the form of a polynomial $x = p_3(y) + \varepsilon q_m(y,\varepsilon)$ where $q_m(y,\varepsilon)$ is an mth-degree polynomial in y. Balancing the degrees of polynomials on both sides of the corresponding invariance equation implies that $m = 1$ and therefore $q_m(y,\varepsilon) = \alpha y + \beta$.

It is straightforward to obtain the following expressions:

$$a = 3\alpha, \qquad b = -3\alpha D - \varepsilon 2\alpha\beta + \beta C, \qquad \beta = \frac{B}{3A}\alpha,$$

where α is a root of the quadratic equation

$$2\varepsilon\alpha^2 - 2\left(\frac{B^2}{3A} - C\right)\alpha - 1 = 0.$$

Using the condition $B^2 - 3AC > 0$ guarantees the existence of two jump points, with

$$\alpha = \left(\frac{B^2 - 3AC}{3A}\right)\frac{1 - \sqrt{1 + 2\varepsilon\big(3A/(B^2 - 3AC)\big)^2}}{2\varepsilon}.$$

In the case of the van der Pol equation we have $p_3(y) = y - y^3/3$, i.e. $A = -1/3$, $B = 0$, $C = 1$, $D = 0$, and, therefore, $\beta = b = 0$. Thus, we obtain

$$\mu = \mu(x,\varepsilon) = 3\alpha(\varepsilon)x,$$

and for a canard cascade

$$x = y - y^3/3 + \varepsilon\alpha(\varepsilon)y, \qquad \alpha(\varepsilon) = (\sqrt{1 + 2\varepsilon} - 1)/2\varepsilon.$$

Thus the following statements are true.

Theorem. *Let $n = 3$ and $B^2 - 3AC > 0$. Then the differential system* (1) *possesses a canard cascade.*

Corollary. *The van der Pol system possesses a canard cascade.*

In this case, to obtain a canard cascade, we use one additional parameter only. Moreover, both the *canard cascade value* of this parameter and the canard cascade are given by exact analytical expressions.

In the general case, when the slow curve of the system under consideration has k jump (turning) points, it is necessary to use k additional parameters to construct a canard cascade.

A similar study has been done in the case of a degenerate turning point.

The author is greatly thankful to Eric Benoit, Robert O'Malley and Nikolas Rozov for very helpful discussions.

Научное издание

Конференция
“Дифференциальные уравнения
и оптимальное управление”,
посвященная 90-летию со дня рождения
академика Евгения Фроловича Мищенко,
Москва, 16–17 апреля 2012 г.: Тезисы докладов

Подписано к печати 07.04.2012
Тираж 120 экз.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
119991, Москва, ул. Губкина, 8

ISBN 978-5-98419-045-9
9 785984 190459