Ю. М. ЕРМОЛЬЕВ
В. П. ГУЛЕНКО
Т. И. ЦАРЕНКО

Конечно-разностный метод в задачах оптимального управления

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ КИБЕРНЕТИКИ

Ю. М. ЕРМОЛЬЕВ
В. П. ГУЛЕНКО
Т. И. ЦАРЕНКО

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

КИЕВ «НАУКОВА ДУМКА» 1978

УДК 681.3 : 51

Конечно-разностный метод в задачах оптимального управления. Ермольев Ю. М., Гуленко В. П., Царенко Т. И. К., «Наук. думка», 1978. 164 с.

В монографии рассматриваются задачи оптимального управления с детерминированными и стохастическими дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных. Предлагаются конечно-разностные аналоги таких задач, рассматриваются вопросы приближения и сходимости оптимальных управлений конечно-разностных аналогов к решению исходных задач, приводятся численные методы решения конечно-разностных аналогов задач управления.

Рассчитана на специалистов, занятых в области оптимального управления с детерминированными и стохастическими дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных.

Ил. 3. Список лит.: с. 161—162 (49 назв.).

Ответственный редактор В. С. МИХАЛЕВИЧ

Рецензенты Н. З. ШОР, Н. Ф. КИРИЧЕНКО

Редакция физико-математической литературы

Е $\frac{30501\text{-}344}{\text{М}221(04)\text{-}78}$ 195-78

ПРЕДИСЛОВИЕ

Неформальная постановка задач оптимального управления такова. Имеется некоторая система (объект управления, управляемая система), поведение которой характеризуется двумя видами параметров — состояния и управления. Требуется выбрать параметры управления таким образом, чтобы поведение системы было в некотором смысле наилучшим. При этом на нее могут влиять также случайные возмущения или другие неуправляемые параметры.

Формальные, математические постановки задач оптимального управления чаще всего формулируются с использованием интегро-дифференциального исчисления, записываются с помощью дифференциальных, интегральных или интегро-дифференциальных уравнений и являются существенным обобщением задач вариационного исчисления.

Модели, которые строятся с помощью аппарата интегро-дифференциального исчисления, основываются на концепции непрерывной среды и времени, т. е. предполагается, что изучаемая система достаточно точно описывается непрерывными величинами. Обычно для этого рассматривают конечные ячейки пространства и дискретные моменты времени, составляют определенные соотношения, отражающие различные законы сохранения, а затем в получаемых соотношениях дискретные шаги пространства и времени устремляют к нулю. В результате получаются математические задачи с дифференциальными, интегральными либо интегро-дифференциальными уравнениями, которые в ряде случаев поддаются аналитическому исследованию, но чаще всего требуют применения численных методов и современных ЭВМ.

Использование ЭВМ, как правило, связано с обратным процессом — заменой непрерывных величин дискретными, дифференциальных, интегральных либо интегро-дифференциальных уравнений — их разностными аналогами. Переход от уравнений для непрерывных процессов к конечно-разностным аналогам не является однозначным, его можно осуществить бесконечным числом способов, причем не все варианты являются допустимыми, ибо этот переход может существенно исказить сущность изучаемых процессов.

В связи с этим возникают задачи построения таких конечно-разностных схем, в которых были бы сохранены все существенные свойства рассматриваемых процессов. Большое значение приобретает построение моделей, приспособленных к непосредственному применению численных методов и современных ЭВМ, моделей, получаемых без перехода к непрерывным процессам и обратно.

В этой книге предполагается, что исходные процессы управления точно описываются дифференциальными, интегральными либо интегро-дифференциальными уравнениями, поэтому качество разностной схемы прежде всего оценивается тем, насколько точно решение разностного аналога задачи оптимального управления аппроксимирует решение исходной непрерывной задачи.

При построении конечно-разностного аналога задачи оптимального управления возникают следующие вопросы:

1. Будет ли при каких-либо условиях оптимальное управление разностного аналога аппроксимировать оптимальное управление исходного непрерывного процесса? Т. е. требуется установить сходимость последовательности оптимальных управлений разностных задач, получаемых при неограниченном уменьшении размеров сетки разбиения. Сложность при этом, в частности, состоит в том, что правые части дифференциальных уравнений или их коэффициенты зависят от управлений, которые могут быть разрывными функциями.

2. Если имеет место указанная выше сходимость, то возникает вопрос о поиске оптимального управления конечно-разностной задачи. При этом очень важно, что, несмотря на большое разнообразие типа уравнений, описывающих процесс непрерывного управления (обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, интегральные, интегро-дифференциальные, стохастические), поиск оптимального управления разностной задачи можно организовать довольно однообразными приемами, основанными на применении общих идей математического программирования.

3. Как и при решении дифференциальных уравнений, может рассматриваться вопрос о скорости сходимости оптимальных управлений разностных аналогов, о построении разностных схем с высокими порядками аппроксимации. Высокая точность аппроксимации оптимального управления непрерывной задачи оптимальным управ-

лением дискретной задачи может быть обусловлена выбором как разностной схемы, так и численного метода нелинейного программирования при поиске оптимального управления дискретной задачи. Обычно в задачах оптимального управления высокие скорости сходимости путем выбора разностной схемы формально получить не удается, поскольку оптимальное управление исходной задачи бывает разрывным (хотя часто может быть аппроксимировано последовательностью непрерывных управлений). Скорость сходимости итеративного процесса для поиска оптимального управления разностного аналога — вопрос, относящийся к области нелинейного программирования. Важная и пока еще не изученная проблема состоит в выяснении возможности изменения сетки разбиения в ходе итеративного процесса поиска оптимального управления разностного аналога. Каждый шаг итеративного процесса приводит к новому приближенному управлению дискретной задачи. Изменение сетки разбиения меняет параметры этой оптимизационной задачи, в частности ее размерность, так что новое приближение (после изменения сетки разбиения) будет строиться относительно новой оптимизационной задачи. Некоторые результаты в этой области можно получить с помощью общих идей решения предельных экстремальных задач [4, 20].

4. При фиксированной сетке разбиения возникает вопрос об устойчивости разностной схемы. Сложность состоит в том, что поиск оптимального управления осуществляется с помощью итеративной процедуры, каждый шаг которой связан с решением разностных уравнений. В ходе итеративного процесса меняется приближение, а вместе с ним и параметры разностной схемы, в результате чего из устойчивой она может превращаться в неустойчивую и наоборот. Можно изучать устойчивость разностной схемы при всевозможных допустимых управлениях, однако более правильно этот вопрос рассматривать в зависимости от применяемого итеративного метода нелинейного программирования. Например, в некоторых методах рассматривается система для сопряженных переменных, вид которой определяется разностной схемой процесса. В этом случае устойчивость разностной схемы должна обеспечить и устойчивость разностных уравнений для сопряженных переменных.

В этой книге изучается часть из перечисленных вопросов. Наиболее полно рассматриваются условия сходимости по функционалу оптимального управления разностного аналога к оптимальному управлению непрерывной задачи. При этом исследуются объекты, поведение которых описывается как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями в частных производных, интегро-дифференциальными, стохастическими уравнениями и полями.

Авторы не стремились придать излагаемым результатам максимальную общность. Глубже других исследованы вопросы сходимости, относящиеся к задачам оптимального управления с обыкновенными дифференциальными уравнениями. Более схематично рассматриваются задачи с уравнениями в частных производных, интегральными, интегро-дифференциальными и стохастическими уравнениями, ибо в подходах к изучению сходимости во всех этих случаях много общего.

В книге рассмотрены различные подходы к построению специальных методов нелинейного и стохастического программирования для решения разностного аналога задачи оптимального управления. Большинство из приводимых в монографии результатов получено авторами, начиная с 1965 г.

Авторы благодарны В. С. Михалевичу, критические замечания которого способствовали улучшению излагаемого материала.

ГЛАВА 1

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ОБЫКНОВЕННЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ (ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ)

В этой главе изучаются условия сходимости по функционалу оптимального управления разностного аналога к оптимальному управлению исходной задачи при неограниченном уменьшении шага разбиения разностной схемы. Первые результаты в этой области были получены Ю. М. Ермольевым и В. П. Гуленко [13, 18, 21, 22]. Аналогичные вопросы несколько позже были рассмотрены в работе [3]. При изложении этой главы авторы основывались на работах [13, 21, 22].

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1. Пусть процесс управления описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_i(t) = g_i(z_1(t), \ldots, z_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$z_i(t_0) = z_i^0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

которые сокращенно записываются также в векторной форме

$$\dot{z} = g(z, u, t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T;$$
$$z(t_0) = z^0$$

и понимаются, строго говоря, в смысле $dz = g(z, u, t)\, dt$. Здесь вектор $z(t) = (z_1(t), \ldots, z_n(t))$ описывает состояние управляемого объекта в момент времени t, вектор $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$ является вектором управления в момент t. Параметры управления $u(t)$ в момент времени t можно выбирать из некоторой области управления $U(t)$, которая обычно предполагается замкнутым множеством. Функция $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$, определенная при $t_0 \leqslant t \leqslant T$ и принимающая значения из области $U(t)$, называется управлением. Ввиду инерционности систем управления на эти функции накладываются еще требования гладкости, при которых управления называются допустимыми. Часто в качестве допустимых управлений рассматриваются кусочно-непрерывные функции. Выбирая некоторое управление и подставляя его в систему дифференциальных уравнений, описывающих поведение объекта, можно определить траекторию движения. В конкретных задачах она должна удовлетворять определенным требованиям, например, чтобы в конечный момент времени T управляемый объект находился на многообразии, заданном ограничениями

$$f^j(z(T)) \leqslant 0, \qquad j = 1, \ldots, r.$$

В частности, если

$$(z_1(T) - a_1)^2 + \cdots + (z_n(T) - a_n)^2 \leqslant \delta^2,$$

то объект должен быть переведен в δ-окрестность точки $a = (a_1, \ldots, a_n)$. К ограничениям указанного вида, заданным в момент T, преобразуются и ограничения типа

$$f\left(\int_{t_0}^{T} g_{n+1}(z, u, t)\,dt, \ldots, \int_{t_0}^{T} g_{n+p}(z, u, t)\,dt\right) \leqslant 0,$$

если ввести переменные

$$z_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} g_{n+1}(z, u, s)\,ds, \ldots, z_{n+p}(t) = \int_{t_0}^{t} g_{n+p}(z, u, s)\,ds,$$

для которых имеем уравнения

$$\dot{z}_{n+k} = g_{n+k}(z, u, t), \; z_{n+k}(t_0) = 0, \quad k = 1, \ldots, p$$

и ограничения, заданные уже в конечный момент времени T,

$$f(z_{n+1}(T), \ldots, z_{n+p}(T)) \leqslant 0.$$

Потери при управлении $u(t)$ характеризуются некоторым функционалом цели. В качестве весьма общих функционалов цели можно рассматривать функционалы типа

$$f^0(z(T)) = f^0(z_1(T), \ldots, z_n(T)),$$

зависящие от состояния системы в конечный момент времени T, который может быть как фиксированным, так и нефиксированным.

Далее рассматривается следующая задача оптимального управления, которую для краткости будем называть непрерывной задачей управления. Требуется минимизировать функцию

$$f^0(z(T)) \tag{1.1}$$

при условиях

$$\dot{z}(t) = g(z(t), u(t), t), \; t_0 \leqslant t \leqslant T; \; z(t_0) = z^0; \tag{1.2}$$

$$u(t) \in \mathrm{U}, \tag{1.3}$$

где $g(z, u, t) = (g_1(z_1, \ldots, z_n, u_1, \ldots, u_m, t), \ldots, g_n(z_1, \ldots, z_n, u_1, \ldots, u_m, t))$, $T < \infty$ — фиксированный момент времени.

Во всем последующем изложении, если не оговорено противное, предполагается, что множество U является замкнутым и ограниченным в m-мерном эвклидовом пространстве, а также, ради простоты выкладок, не зависящим от времени. Кроме того, предполагается, что при любом допустимом управлении $u(t)$ существует единственное и непрерывное решение (траектория) $z(t)$ уравнений (1.2).

Множество точек $z(t)$ при данном t, получаемых при различных допустимых управлениях, называется множеством достижимости (в момент t) и обозначается через $S(t)$. Пусть Z — наименьшее множество, для которого $z(t) \in Z$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$ при любом допустимом управлении. Чтобы при допустимом управлении $u(t)$ определить траекторию объекта или решение системы (1.2), в общем случае необходимо применить численный метод, основанный на разностной аппроксимации уравнений (1.2). В результате этого от задачи (1.1) — (1.3) переходим к некоторому ее разностному аналогу. Простейший разностный аналог имеет следующий вид:

минимизировать

$$f^0(x(Nh)) \tag{1.4}$$

при условиях

$$x((k+1)h) = x(kh) + hg(x(kh),\ u(kh),\ kh),\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1,$$

$$x(0) = z^0; \tag{1.5}$$

$$u(kh) \in U, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1, \tag{1.6}$$

где $Nh = T$. В целях экономии записи принято $t_0 = 0$. Для краткости задачу (1.4) — (1.6) условимся называть дискретной задачей.

В дальнейшем мы убедимся, что рассмотрение простейшего аналога вполне оправдано, ибо привлечение других разностных схем, вообще говоря, не приводит к повышению точности аппроксимации. Вопрос о повышении точности аппроксимации в каждом конкретном случае должен решаться особо.

При заданном управлении $\{u(kh)\}$ из уравнений (1.5) последовательно определяются векторы $x(0)$, $x(h)$, ..., $x(Nh)$, которые должны служить приближением к траектории $z(t)$ в моменты времени $t = 0, h, \ldots, Nh$. Доопределим траекторию $\{x(kh)\}$ до ломаной $x(t)$, соединяющей точки $x(0)$, $x(h)$, ..., $x(Nh)$, т. е. рассмотрим кусочно-линейную функцию

$$x(t) = x(kh) + (t - kh)\, g(x(kh),\ u(kh),\ kh),$$

где $kh \leqslant t \leqslant (k+1)h$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, и получим формулу для оценки близости ломаной $x(t)$ от траектории $z(t)$. Для этого потребуется величина

$$C = \sup_{z \in Z, u \in U, 0 \leqslant t \leqslant T} \|g(z,\ u,\ t)\|,$$

где $\|\cdot\|$ означает норму вектора. В дальнейшем предполагается, что $C < \infty$.

Замечание. В конкретных задачах величина C легко оценивается. Например, пусть функция $g(z, u, t)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|g(z',\ u,\ t) - g(z'',\ u,\ t)\| \leqslant L_z \|z' - z''\|,$$

где константа L_z выбирается равномерно в области $R_n \times U \times [0, T]$; по переменной u эта функция непрерывна, а по t — измерима и существенно ограничена. Тогда, как легко убедиться,

$$\sup_{u \in U, 0 \leqslant t \leqslant T} \|g(z^0,\ u,\ t)\| = K < \infty.$$

Отметим, что отсюда, используя локальную теорему существования и единственности решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений и теоремы его продолжимости [1], можно сделать вывод о том, что для любого допустимого измеримого управления соответствующая траектория на отрезке $[0, T]$ существует, единственна и непрерывна.

Далее, согласно условию (1.2) имеем

$$z(t) = z^0 + \int_0^t g(z, u, \tau)\, d\tau,$$

откуда получаем

$$\|z(t) - z^0\| \leqslant \int_0^t \|g(z, u, \tau)\| d\tau \leqslant \int_0^t \|g(z, u, \tau) - g(z^0, u, \tau)\| d\tau +$$

$$+ \int_0^t \|g(z^0, u, \tau)\| d\tau \leqslant L_z \int_0^t \|z(\tau) - z^0\| d\tau + Kt.$$

Решение этого интегрального неравенства легко приводит к оценке

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|z(t) - z^0\| \leqslant \frac{K}{L_z}(e^{L_z T} - 1).$$

Отсюда вытекает, что

$$C \leqslant K e^{L_z T}$$

Нетрудно показать, что эти оценки остаются справедливыми также для дискретной задачи (1.4) — (1.6).

Проиллюстрируем общую идею доказательства сходимости конечно-разностных аналогов задач оптимального управления, которой будем придерживаться в дальнейшем. Рассмотрим весьма общую задачу минимизации функционала $\Phi(z)$ на множестве Z некоторого топологического пространства Γ. Пусть

$$\inf_{z \in Z} \Phi(z) = \alpha > -\infty.$$

Наряду с этой общей задачей рассмотрим последовательность аппроксимирующих задач: найти $\inf \Phi_\Delta(x_\Delta)$ в области X_Δ, $\Delta \to 0$. Обозначим

$$\inf_{x_\Delta \in X_\Delta} \Phi_\Delta(x_\Delta) = \beta_\Delta,$$

где x_Δ — элемент некоторого другого пространства Γ_Δ, $X_\Delta \subseteq \Gamma_\Delta$, Φ_Δ — функция, определенная на множестве X_Δ.

Обозначим оптимальные решения рассматриваемых задач через $\bar{z}$ и $\bar{x}_\Delta$. Эти решения, вообще говоря, понимаются в смысле существования таких последовательностей элементов $z^{(k)} \in Z$ и $x_\Delta^{(k)} \in X_\Delta$, для которых

$$\lim_{k\to\infty} \Phi(z^{(k)}) = \alpha, \quad \lim_{k\to\infty} \Phi_\Delta(x_\Delta^{(k)}) = \beta_\Delta.$$

Утверждение. Пусть

1) для оптимального решения $\bar{z}$ исходной задачи можно указать такое допустимое решение $\tilde{x}_\Delta$ аппроксимирующей задачи, для которого

$$\overline{\lim_{\Delta\to 0}}\, \Phi_\Delta(\tilde{x}_\Delta) = \alpha;$$

2) для оптимального решения $\bar{x}_\Delta$ аппроксимирующей задачи можно построить такое допустимое решение $\bar{z}_\Delta$ исходной задачи, для которого

$$\overline{\lim_{\Delta\to 0}}\, (\Phi(\bar{z}_\Delta) - \beta_\Delta) = 0.$$

Тогда

$$0 \leqslant \Phi(\bar{z}_\Delta) - \alpha = \alpha_\Delta - \alpha \underset{\Delta\to 0}{\to} 0, \tag{1.7}$$

т. е. имеет место сходимость по функционалу Φ решения $\bar{z}_\Delta$ исходной задачи, построенного на основе оптимального решения аппроксимирующей задачи, к оптимальному решению исходной задачи.

Доказательство. 1. Рассмотрим сначала такие Δ, для которых

$$0 < \beta_\Delta - \alpha.$$

Тогда, используя первое условие теоремы, в силу допустимости построенного решения $\tilde{x}_\Delta$ аппроксимирующей задачи можем записать

$$0 < \beta_\Delta - \alpha \leqslant \Phi_\Delta(\tilde{x}_\Delta) - \alpha \underset{\Delta\to 0}{\to} 0.$$

Значит, в этом случае

$$\beta_\Delta \underset{\Delta\to 0}{\to} \alpha.$$

2. Теперь рассмотрим такие Δ, для которых

$$0 < \alpha - \beta_\Delta.$$

В силу второго условия и допустимости решения $\bar{z}_\Delta$ исходной задачи получим, что

$$0 < \alpha - \beta_\Delta \leqslant \Phi(\bar{z}_\Delta) - \beta_\Delta = \alpha_\Delta - \beta_\Delta \underset{\Delta\to 0}{\to} 0.$$

Следовательно, и в этом случае $\beta_\Delta \underset{\Delta\to 0}{\to} \alpha$.

На основании предыдущих выкладок с учетом оптимальности решения $\bar{\bar{z}}$ имеем

$$0 \leqslant \alpha_\Delta - \alpha = (\alpha_\Delta - \beta_\Delta) + (\beta_\Delta - \alpha) \leqslant \max\{0,\ \alpha_\Delta - \beta_\Delta\} + \\ + \max\{0,\ \beta_\Delta - \alpha\} \underset{\Delta\to 0}{\to} 0,$$

что и требовалось доказать.

§ 2. ОСНОВНАЯ ЛЕММА

Применим эту общую идею для доказательства сходимости решения дискретной задачи оптимального управления (1.4) — (1.6) к решению исходной непрерывной задачи при $\Delta \to 0$.

Обозначим через $\Delta_h(k)$ величину

$$\max_{(k-1)h \leqslant t \leqslant kh} \| z(t) - x(t) \|, \quad k = 1, \ldots, N,$$

и пусть

$$\Delta_h = \max_{k=1,\ldots,N} \Delta_h(k). \tag{1.8}$$

Лемма 1. Пусть управление $u(t)$ интегрируемо по Риману и выполнено условие

$$\| g(z', u', t') - g(z'', u'', t'') \| \leqslant L_z \| z' - z'' \| + L_u \| u' - u'' \| + \\ + L_t | t' - t'' |, \tag{1.9}$$

где константа L_z выбирается равномерно в области $R_n \times \mathrm{U} \times [0, T]$, а константы L_u, L_t — равномерно в области $Z \times \mathrm{U} \times [0, T]$. Тогда имеет место оценка

$$\Delta_h \leqslant \frac{1}{2} (C + L_{t/z}) (e^{L_z T} - 1) h + L_u \sum_{k=1}^{N} I_{u,h}(k) (1 + L_z h)^{N-k}, \tag{1.10}$$

где

$$I_{u,h}(k) = \int_{(k-1)h}^{kh} \| u(s) - u((k-1)h) \| ds, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{1.11}$$

$$L_{t/z} = Lt/Lz.$$

Доказательство. В качестве $u((k-1)h)$ в интеграле (1.11) условимся принимать $\lim\limits_{s \to (k-1)h+0} u(s)$, если он существует, либо произвольное значение $u(s)$ в промежутке $(k-1)h < s \leqslant kh$ — в противном случае. Для $kh \leqslant t \leqslant (k+1)h$ из уравнений (1.2) имеем

$$z(t) = z(kh) + \int_{kh}^{t} g(z, u, s) ds, \tag{1.12}$$

а согласно уравнениям (1.5)

$$x(t) = x(kh) + \int_{kh}^{t} g(x(kh), u(kh), kh) ds. \tag{1.13}$$

Тогда с учетом условия (1.9) легко получаем

$$\| z(t) - x(t) \| \leqslant \| z(kh) - x(kh) \| + L_z \int_{kh}^{(k+1)h} \| z(s) - \\ - x(kh) \| ds + L_u I_{u,h}(k+1) + \frac{1}{2} L_t h^2.$$

Представив затем подынтегральную функцию в виде $\|z(s) - x(kh)\| = \|z(s) - z(kh) + z(kh) - x(kh)\|$, придем к оценке

$$\|z(t) - x(t)\| \leqslant (1 + L_z h)\Delta_h(k) + L_z \int\limits_{kh}^{(k+1)h} \|z(s) - z(kh)\| ds + L_u l_{u,h}(k+1) + \frac{1}{2} L_t h^2.$$

Но из выражения (1.12) следует, что

$$\|z(s) - z(kh)\| \leqslant \int\limits_{kh}^{s} \|g(z, u, \tau)\| d\tau \leqslant C(s - kh).$$

Таким образом, получается, что

$$\Delta_h(k+1) \leqslant (1 + L_z h)\Delta_h(k) + \frac{1}{2}(CL_z + L_t)h^2 + L_u l_{u,h}(k+1),$$
$$k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Решая эти рекуррентные неравенства с учетом того, что $\Delta_h(0) = 0$, получаем

$$\Delta_h \leqslant (1 + L_z h)^N \Delta_h(0) + \sum_{k=1}^{N} (1 + L_z h)^{N-k} \left(\frac{1}{2}(CL_z + L_t)h^2 + L_u l_{u,h}(k)\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(C + \frac{L_t}{L_z}\right)[(1 + L_z h)^N - 1]h + L_u \sum_{k=1}^{N} l_{u,h}(k)(1 + L_z h)^{N-k},$$

откуда и следует утверждение леммы.

§ 3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Обозначим оптимальное решение исходной непрерывной задачи через $\bar{u}(t)$, $\bar{z}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, а дискретной задачи — через $\bar{u}_h(kh)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$; $\bar{x}_h(kh)$, $k = 0, 1, \ldots, N$. Через $\bar{u}_h(t)$ будем обозначать кусочно-постоянное управление, совпадающее в точках $t = kh$ с $\bar{u}_h(kh)$, а соответствующую ему траекторию (решение (1.2)) — через $\bar{z}_h(t)$. Обозначим через $S_h(t)$ множество достижимости к моменту t в дискретной задаче, а через $\varphi(h)$ — оценку сверху разности $f^0(\bar{z}_h(T)) - f^0(\bar{z}(T))$, т. е.

$$0 \leqslant f^0(\bar{z}_h(T)) - f^0(\bar{z}(T)) \leqslant \varphi(h).$$

Теорема 1. При выполнении условий леммы 1, а также условия

$$|f^0(z') - f^0(z'')| \leqslant L_z^0 \|z' - z''\|, \qquad (1.14)$$

где константа L_z^0 выбирается равномерно в области $\tilde{S}(T)$, содержащей область $S(T) \cup S_h(T)$ для любого h, имеем

$$\varphi(h) = L_z^0 \left\{ (C + L_{t/z})(e^{L_z T} - 1) h + L_u \sum_{k=1}^{N} I_{\bar{u},h}(k)(1 + L_z h)^{N-k} \right\}. \tag{1.15}$$

Доказательство. 1. Пусть $f^0(\bar{x}_h(T)) - f^0(\bar{z}(T)) > 0$. Тогда в качестве допустимого управления дискретной задачи выберем управление $\bar{u}(kh)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Соответствующую ему кусочно-линейную траекторию обозначим через $\tilde{x}_h(t)$. Тогда согласно лемме 1 имеем следующую оценку:

$$\| \tilde{x}_h(T) - \bar{z}(T) \| \leqslant \frac{1}{2}(C + L_{t/z})(e^{L_z T} - 1) h + \\ + L_u \sum_{k=1}^{N} I_{\bar{u},h}(k)(1 + L_z h)^{N-k}. \tag{1.16}$$

С учетом допустимости управления $\{\bar{u}(kh)\}$ для дискретной задачи, условия (1.14) и оценки (1.16) получаем

$$0 < f^0(\bar{x}_n(T)) - f^0(\bar{z}(T)) \leqslant f^0(\tilde{x}_n(T)) - f^0(\bar{z}(T)) \leqslant L_z^0 \| \tilde{x}_h(T) - \\ - \bar{z}(T) \| \leqslant L_z^0 \left\{ \frac{1}{2}(C + L_{t/z})(e^{L_z T} - 1) h + L_u \sum_{k=1}^{N} I_{\bar{u},h}(k) \times \right. \\ \left. \times (1 + L_z h)^{N-k} \right\}. \tag{1.17}$$

2. Пусть теперь $f^0(\bar{z}(T)) - f^0(\bar{x}_h(T)) > 0$. Выберем в качестве управления непрерывной задачи кусочно-постоянное управление $\bar{u}_h(t)$. Согласно лемме 1 справедлива оценка

$$\| \bar{z}_h(T) - \bar{x}_h(T) \| \leqslant \frac{1}{2}(C + L_{t/z})(e^{L_z T} - 1) h,$$

так как в этом случае величина $\sum_{k=1}^{N} I_{\bar{u}_h,h}(k)(1 + L_z h)^{N-k} = 0$. Рассуждения, аналогичные предыдущим, приводят к заключению, что

$$0 < f^0(\bar{z}(T)) - f^0(\bar{x}_h(T)) \leqslant f^0(\bar{z}_h(T)) - f^0(\bar{x}_h(T)) \leqslant L_z^0 \| \bar{z}_h(T) - \\ - \bar{x}_h(T) \| \leqslant \frac{1}{2} L_z^0 (C + L_{t/z})(e^{L_z T} - 1) h.$$

Теперь можно получить окончательную оценку, используя только что полученную и (1.17):

$$0 \leqslant f^0(\bar{z}_h(T)) - f^0(\bar{z}(T)) \leqslant f^0(\bar{z}_h(T)) - f^0(\bar{x}_h(T)) + f^0(\bar{x}_h(T)) -$$

$$-f^0(\bar z(T)) \leqslant L_z^0\left\{(C + L_{t/z})(e^{L_zT} - 1)h + L_u\sum_{k=1}^{N} l_{\bar u,h}(k)\times\right.$$
$$\left.\times(1 + L_zh)^{N-k}\right\},$$

что и требовалось доказать.

§ 4. СХОДИМОСТЬ ДЛЯ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Обозначим: множество индексов $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ тех интервалов вида $(k-1)h \leqslant t \leqslant kh$, на которых оптимальное управление $\bar u(t)$ непрерывно,— через $\mathrm{K}(h)$; максимальное из колебаний функции $\bar u(t)$ (в смысле выбранной нормы) на этих интервалах — через $\varepsilon_{\bar u}(h)$; оценки сверху диаметра области U и числа точек разрыва (первого рода) функции $\bar u(t)$ — соответственно через D и $\bar\nu$; $L_u/L_z = L_{u/z}$.

Теорема 2. В предположениях теоремы 1 для кусочно-непрерывного оптимального управления

$$\varphi(h) = L_z^0\{((C + L_{t/z})h + L_{u/z}\varepsilon_{\bar u}(h))(e^{L_zT} - 1) + L_uD\bar\nu e^{L_zT}h\}. \quad (1.18)$$

Доказательство. Согласно теореме 1 имеем

$$0 \leqslant f^0(\bar z_h(T)) - f^0(\bar z(T)) \leqslant$$
$$\leqslant L_z^0\left\{(C + L_{t/z})(e^{L_zT} - 1)h + L_u\sum_{k=1}^{N} l_{\bar u,h}(k)(1 + L_zh)^{N-k}\right\}. \quad (1.19)$$

Рассмотрим сумму, фигурирующую в правой части неравенства (1.19):

$$\sum_{k=1}^{N} l_{\bar u,h}(k)(1 + L_zh)^{N-k} = \sum_{k\in \mathrm{K}(h)}(1 + L_zh)^{N-k}\int_{(k-1)h}^{kh}\|\bar u(s) -$$
$$-\bar u((k-1)h)\|\,ds + \sum_{k\notin \mathrm{K}(h)}(1 + L_zh)^{N-k}\int_{(k-1)h}^{kh}\|\bar u(s) -$$
$$-\bar u((k-1)h)\|\,ds \leqslant D\bar\nu e^{L_zT}h + \varepsilon_{\bar u}(h)\,\frac{e^{L_zT} - 1}{L_z}. \quad (1.20)$$

После подстановки в выражение (1.19) оценки (1.20) получаем

$$0 \leqslant f^0(\bar z_h(T)) - f^0(\bar z(T)) \leqslant L_z^0\{(C + L_{t/z})(e^{L_zT} - 1)h +$$
$$+ L_uD\bar\nu e^{L_zT}h + L_{u/z}\varepsilon_{\bar u}(h)(e^{L_zT} - 1)\} =$$
$$= L_z^0\{((C + L_{t/z})h + L_{u/z}\varepsilon_{\bar u}(h))(e^{L_zT} - 1) + L_uD\bar\nu e^{L_zT}h\},$$

что и требовалось показать.

Тогда при равношаговой аппроксимации шаг дискретизации h, обеспечивающий заданную точность ε_0 по функционалу, можно выбирать так:

$$h(\varepsilon_0) = \begin{cases} h_*(\varepsilon_0), \text{ если } \dfrac{T}{h_*(\varepsilon_0)} \text{ целое}, \\ \dfrac{T}{\left[\dfrac{T}{h_*(\varepsilon_0)}\right]+1}, \text{ если } \dfrac{T}{h_*(\varepsilon_0)} \text{ нецелое}, \end{cases} \qquad (1.21)$$

где $h_*(\varepsilon_0)$ — корень уравнения $\varphi(h) = \varepsilon_0$.

Замечания. Пусть управление $\bar{u}(t)$ на отрезках его непрерывности удовлетворяет условию Липшица с константой $L^{(\bar{u})}$. Тогда

$$h_*(\varepsilon_0) = \frac{\varepsilon_0}{L_z^0\left\{\left(C + L_{t/z} + \frac{1}{2}L_{u/z}L^{(\bar{u})}\right)(e^{L_zT}-1) + L_uD\bar{v}e^{L_zT}\right\}}. \qquad (1.22)$$

Действительно, так как в этом случае

$$\|\bar{u}(s) - \bar{u}((k-1)h)\| \leqslant L^{(\bar{u})}(s-(k-1)h), \ (k-1)h \leqslant s \leqslant kh,$$
$$k \in \mathrm{K}(h),$$

то оценка (1.20) запишется в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{N} I_{\bar{u},h}(k)(1+L_zh)^{N-k} \leqslant D\bar{v}e^{L_zT}h + \frac{1}{2}L^{(\bar{u})}h\,\frac{e^{L_zT}-1}{L_z},$$

отсюда получаем, что

$$0 \leqslant f^0(\bar{z}_h(T)) - f^0(\bar{z}(T)) \leqslant L_z^0\left\{\left(C + L_{t/z} + \frac{1}{2}L_{u/z}L^{(\bar{u})}\right)\times\right.$$
$$\left.\times(e^{L_zT}-1) + L_uD\bar{v}e^{L_zT}\right\}h = \varphi(h),$$

откуда и следует формула (1.22). Полагая в ней $L^{(\bar{u})} = 0$, получаем величину шага разностной схемы для кусочно-постоянного оптимального управления.

Иногда бывает известна оценка снизу $\underline{\nu}$ числа точек переключения оптимального управления. Тогда оценочную функцию в теореме 2 можно улучшить так:

$$\varphi(h) = L_z^0\{((C + L_{t/z})h + L_{u/z}\varepsilon_{\bar{u}}(h))(e^{L_zT}-1) + L_uD\bar{v}e^{L_zT}h -$$
$$- L_u\underline{\nu}\varepsilon_{\bar{u}}(h)h\}.$$

При этом вместо $h_*(\varepsilon_0)$, которое фигурирует в выражении (1.21), следует брать $\min\{h_*(\varepsilon_0), \Delta t\}$, где Δt — минимальный промежуток времени между двумя соседними точками переключения оптимального управления, а $h_*(\varepsilon_0)$ — минимальный корень уравнения $\varphi(h) = \varepsilon_0$. Это утверждение легко вытекает из того, что вторая сумма в выражении (1.20) может быть оценена так:

$$\sum_{k\in K(h)} (1+L_z h)^{N-k} \int\limits_{(k-1)h}^{kh} \|\bar u(s) - \bar u((k-1)h)\| ds \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_{\bar u}(h)\, h \sum_{k\in \overline{K}(h)} (1+L_z h)^{N-k} = \varepsilon_{\bar u}(h)\, h \left(\sum_{k=1}^{N} (1+L_z h)^{N-k} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k\in \overline{K}(h)} (1+L_z h)^{N-k} \right) \leqslant \varepsilon_{\bar u}(h)\, h \left(\frac{e^{L_z T}-1}{L_z h} - \underline{\nu} \right) =$$

$$= \varepsilon_{\bar u}(h) \frac{e^{L_z T}-1}{L_z} - \underline{\nu}\varepsilon_{\bar u}(h)\, h.$$

В случае кусочно-липшицевого оптимального управления оценочная функция приобретает относительно h квадратический вид.

§ 5. СЛУЧАЙ НЕФИКСИРОВАННОГО КОНЕЧНОГО ВРЕМЕНИ

Рассмотрим теперь случай, когда конечное время управления в задаче (1.1) — (1.3) $T \leqslant T_* < \infty$, но не фиксировано. Простейший разностный аналог этой задачи имеет следующий вид: минимизировать

$$f^0(x(Nh),\ Nh) \tag{1.23}$$

при условиях

$$x(t+h) = x(t) + hg(x(t),\ u(t),\ t),\ t = 0,\ h,\ \dots,\ (N-1)h, \tag{1.24}$$

$$u(t) \in U,\ t = 0,\ h,\ \dots,\ (N-1)h, \tag{1.25}$$

где $N = 0, 1, \dots, N_*$, $N_* h = T_*$.

Введем необходимые обозначения. Пусть $\bar u(t), \bar z(t), 0 \leqslant t \leqslant \bar T$ — оптимальное решение непрерывной задачи, а $\bar u_h(kh)$, $k = 0, 1, \dots$ $\dots, \bar N_h - 1$; $\bar x_h(kh)$, $k = 0, 1, \dots, \bar N_h$ — дискретной задачи (1.23) — (1.25). Через $\bar u_h(t)$, $\bar z_h(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \bar T_h$, как и ранее, обозначим решение непрерывной задачи для кусочно-постоянного управления $\bar u_h(t)$, совпадающего в точках $t = kh$ с $\bar u_h(kh)$. Наконец, положим

$$Z = \bigcup_{t=0}^{T_*} S(t),\quad X_h = \bigcup_{t=0}^{T_*} S_h(t),\quad Z \cup X_h \subset \tilde Z,$$

где, по-прежнему, $S(t)$ и $S_h(t)$ — области достижимости к моменту t соответственно непрерывной и дискретной задач, и обозначим через $\varphi(h)$ оценку сверху разности $f^0(\bar z_h(\bar T_h), \bar T_h) - f^0(\bar z(\bar T), \bar T) \geqslant$ $\geqslant 0$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия леммы 1, а также условие

$$|f^0(z',\ T') - f^0(z'',\ T'')| \leqslant L_z^0 \|z' - z''\| + L_T^0 |T' - T''|, \tag{1.26}$$

где константы L_z^0 и L_T^0 выбираются равномерно в области $\tilde{Z} \times [0, T_*]$. Тогда

$$\varphi(h) = L_z^0 \left\{ ((C + L_{t/z})(e^{L_z T_*} - 1) + C + L_{T/z}^0) h + L_u \sum_{k=1}^{\tilde{N}_h} l_{\bar{u},h}(k) \times \right.$$
$$\left. \times (1 + L_z h)^{\tilde{N}_h - k} \right\},$$

где

$$L_{T/z}^0 = \frac{L_T^0}{L_z^0}, \quad \tilde{N}_h = \left[\frac{\bar{T}}{h} \right].$$

Доказательство. 1. Пусть $f^0(\bar{x}_h(\bar{T}_h), \bar{T}_h) - f^0(\bar{z}(\bar{T}), \bar{T}) > 0$. В качестве допустимого управления дискретной задачи выбираем управление $\bar{u}(kh)$, $k = 0, 1, \ldots, \tilde{N}_h$; $\tilde{N}_h h = \tilde{T}_h$. Соответствующую ему кусочно-линейную траекторию обозначим $\tilde{x}_h(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tilde{T}_h$. Тогда согласно лемме 1

$$\| \tilde{x}_h(\tilde{T}_h) - \bar{z}(\tilde{T}_h) \| \leqslant \frac{1}{2}(C + L_{t/z})(e^{L_z T_*} - 1) h +$$
$$+ L_u \sum_{k=1}^{\tilde{N}_h} l_{\bar{u},h}(k)(1 + L_z h)^{\tilde{N}_h - k}. \qquad (1.27)$$

В силу допустимости построенного указанным выше образом управления дискретной задачи с учетом условия (1.26) имеем

$$0 < f^0(\bar{x}_h(\bar{T}_h), \bar{T}_h) - f^0(\bar{z}(\bar{T}), \bar{T}) \leqslant f^0(\tilde{x}_h(\tilde{T}_h), \tilde{T}_h) -$$
$$- f^0(\bar{z}(\bar{T}), \bar{T}) \leqslant L_z^0 \| \tilde{x}_h(\tilde{T}_h) - \bar{z}(\bar{T}) \| + L_T^0 h. \qquad (1.28)$$

Используя оценку (1.27), легко получаем

$$\| \tilde{x}_h(\tilde{T}_h) - \bar{z}(\bar{T}) \| \leqslant \| \tilde{x}_h(\tilde{T}_h) - \bar{z}(\tilde{T}_h) \| + \| \bar{z}(\tilde{T}_h) - \bar{z}(\bar{T}) \| \leqslant$$
$$\leqslant \left[\frac{1}{2}(C + L_{t/z})(e^{L_z T_*} - 1) + C \right] h + L_u \sum_{k=1}^{\tilde{N}_h} l_{\bar{u},h}(k)(1 + L_z h)^{\tilde{N}_h - k}. \qquad (1.29)$$

Подставляя теперь оценку (1.29) в (1.28), находим

$$0 < f^0(\bar{x}_h(\bar{T}_h), \bar{T}_h) - f^0(\bar{z}(\bar{T}), \bar{T}) \leqslant$$
$$\leqslant L_z^0 \left\{ \left(\frac{1}{2}(C + L_{t/z})(e^{L_z T_*} - 1) + C + L_{T/z}^0 \right) h + \right.$$
$$\left. + L_u \sum_{k=1}^{\tilde{N}_h} l_{\bar{u},h}(k)(1 + L_z h)^{\tilde{N}_h - k} \right\}. \qquad (1.30)$$

2. Пусть теперь $f^0(\bar z, (\bar T), \bar T) - f^0(\bar x_h(\bar T_h), \bar T_h) > 0$. В качестве управления непрерывной задачи выбираем кусочно-постоянное управление $\bar u_h(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \bar T_h$. Тогда использование основной леммы дает

$$\|\bar z_h(\bar T_h) - \bar x_h(\bar T_h)\| \leqslant \frac{1}{2}(C + L_{t/z})(e^{L_z T_*} - 1)h.$$

Используя те же рассуждения, что и в п.1, получаем

$$0 < f^0(\bar z(\bar T), \bar T) - f^0(\bar x_h(\bar T_h), \bar T_h) \leqslant f^0(\bar z_h(\bar T_h), \bar T_h) -$$
$$- f^0(\bar x_h(\bar T_h), \bar T_h) \leqslant \frac{1}{2} L_z^0 (C + L_{t/z})(e^{L_z T_*} - 1)h. \qquad (1.31)$$

Теперь с учетом оценок (1.30) и (1.31) окончательно имеем

$$0 \leqslant f^0(\bar z_h(\bar T_h), \bar T_h) - f^0(\bar z(\bar T), \bar T) = f^0(\bar z_h(\bar T_h), \bar T_h) -$$
$$- f^0(\bar x_h(\bar T_h), \bar T_h) + f^0(\bar x_h(\bar T_h), \bar T_h) - f^0(\bar z(\bar T), \bar T) \leqslant$$
$$\leqslant L_z^0 \Big\{((C + L_{t/z})(e^{L_z T_*} - 1) + C + L_{T/z}^0)h + L_u \sum_{k=1}^{\tilde N_h} I_{\bar u, h}(k) \times$$
$$\times (1 + L_z h)^{\tilde N_h - k}\Big\},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 4. В предположениях теоремы 3 для кусочно-непрерывного оптимального управления в задачах с нефиксированным конечным временем

$$\varphi(h) = L_z^0 \{((C + L_{t/z})h + L_{u/z}\varepsilon_{\bar u}(h))(e^{L_z T_*} - 1) +$$
$$+ (L_u D\bar v e^{L_z T_*} + C + L_{T/z}^0)h\}. \qquad (1.32)$$

Доказательство. Согласно выводу теоремы 3 имеем

$$0 \leqslant f^0(\bar z_h(\bar T_h), \bar T_h) - f^0(\bar z(\bar T), \bar T) \leqslant L_z^0 \Big\{((C + L_{t/z})(e^{L_z T_*} - 1) +$$
$$+ C + L_{T/z}^0)h + L_u \sum_{k=1}^{\tilde N_h} I_{\bar u, h}(k)(1 + L_z h)^{\tilde N_h - k}\Big\}. \qquad (1.33)$$

Оценим сумму в выражении (1.33), принимая во внимание, что $\tilde N_h \leqslant N_*$:

$$\sum_{k=1}^{\tilde N_h} I_{\bar u, h}(k)\ (1 + L_z h)^{\tilde N_h - k} = \sum_{k \in K(h)} (1 + L_z h)^{\tilde N_h - k} \int_{(k-1)h}^{kh} \|\bar u(s) -$$

$$-\bar{u}((k-1)h)\|ds+\sum_{k\in K(h)}(1+L_zh)^{\tilde{N}_h-k}\int\limits_{(k-1)h}^{kh}\|\bar{u}(s)-$$

$$-\bar{u}((k-1)h)\|ds\leqslant D\bar{v}e^{L_zT_*}h+\varepsilon_{\bar{u}}(h)\frac{e^{L_zT_*}-1}{L_z}. \quad (1.34)$$

Подставим полученную оценку (1.34) в (1.33):

$$0\leqslant f^0(\bar{z}_h(\bar{T}_h),\ \bar{T}_h)-f^0(\bar{z}(\bar{T}),\ \bar{T})\leqslant$$

$$\leqslant L_z^0\{((C+L_{t/z})(e^{L_zT_*}-1)+C+L_{T/z}^0)h+L_uD\bar{v}e^{L_zT_*}h+$$

$$+L_{u/z}\varepsilon_{\bar{u}}(h)(e^{L_zT_*}-1)\}=L_z^0\{((C+L_{t/z})h+$$

$$+L_{u/z}\varepsilon_{\bar{u}}(h))(e^{L_zT_*}-1)+(L_uD\bar{v}e^{L_zT_*}+C+L_{T/z}^0)h\},$$

что и утверждается в теореме.

Шаг дискретизации вычисляется по формуле (1.21) для фиксированного T, причем вместо T нужно брать T_*.

В ряде практических случаев формула (1.32) может быть уточнена с указанием конкретных выражений для этого шага.

§ 6. ОБОБЩЕНИЯ ДЛЯ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 1 для фиксированного T либо теоремы 3 для нефиксированного T, за исключением условия Липшица для функции $g(z,\ u,\ t)$ по переменной u, которое заменяется условием ее непрерывности по этой переменной в области U. Тогда в случае фиксированного T

$$\varphi(h)=L_z^0\left\{\left((C+L_{t/z})h+\frac{\varepsilon(h)}{L_z}\right)(e^{L_zT}-1)+2C\bar{v}e^{L_zT}h\right\},$$

а для нефиксированного T

$$\varphi(h)=L_z^0\left\{\left((C+L_{t/z})h+\frac{\varepsilon(h)}{L_z}\right)(e^{L_zT_*}-1)+(2C\bar{v}e^{L_zT_*}+\right.$$

$$\left.+C+L_{T/z}^0)h\right\}, \quad (1.35)$$

где через $\varepsilon(h)$ обозначено максимальное из колебаний семейства функций $g(z,\bar{u}(s),\ t),\ z\in Z,\ t\in[0,\ T]$ по переменной s (в смысле выбранной нормы) на тех интервалах вида $(k-1)h\leqslant s\leqslant kh$, где функция $\bar{u}(s)$ непрерывна.

Доказательство Проведем соответствующее доказательство основной леммы для этого случая. Из выражений (1.12) и (1.13) вытекает, что

$$\|z(t)-x(t)\|\leqslant\|z(kh)-x(kh)\|+\int\limits_{kh}^{t}\|g(z,\ u,\ s)-g(x(kh),$$

$$u(kh),\ kh)\|\,ds \leqslant \|z(kh)-x(kh)\| + \int\limits_{kh}^{t} \|g(z,\ u,\ s)-g(z,$$

$$u(kh),\ s)\|\,ds + \int\limits_{kh}^{t} \|g(z,\ u(kh),\ s) - g(x(kh),\ u(kh),\ kh)\|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \|z(kh)-x(kh)\| + L_z \int\limits_{kh}^{(k+1)h} \|z(s)-x(kh)\|\,ds + \frac{1}{2}L_t h^2 +$$

$$+ \int\limits_{kh}^{(k+1)h} \|g(z,\ u,\ s) - g(z,\ u(kh),\ s)\|\,ds \leqslant (1+L_z h)\,\Delta_h(k) +$$

$$+ \frac{1}{2}(CL_z + L_t)\,h^2 + \int\limits_{kh}^{(k+1)h} \|g(z,\ u,\ s) - g(z,\ u(kh),\ s)\|\,ds.$$

Поэтому оценка (1.10) в упомянутой лемме запишется так:

$$\Delta_h \leqslant \frac{1}{2}(C + L_{t/z})(e^{L_z T} - 1)\,h + \sum_{k=1}^{N}(1+L_z h)^{N-k} \int\limits_{(k-1)h}^{kh} \|g(z,\ u,\ s) -$$
$$- g(z,\ u((k-1)h),\ s)\|\,ds,$$

в связи с чем вместо (1.15) теоремы 1 будем иметь:

$$0 \leqslant f^0(\bar{z}_h(T)) - f^0(\bar{z}(T)) \leqslant L_z^0\Big\{(C + L_{t/z})(e^{L_z T} - 1)\,h +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N}(1+L_z h)^{N-k} \int\limits_{(k-1)h}^{kh} \|g(\bar{z},\ \bar{u},\ s) - g(\bar{z},\ \bar{u}((k-1)h),\ s)\|\,ds\Big\}.$$

Ввиду ограниченности множества Z и конечности T заключаем, что семейство функции $g(z,\ \bar{u}(s),\ t)$ равномерно-непрерывно по s на участках непрерывности функции $\bar{u}(s)$. Поэтому утверждение (1.18) теоремы 2 принимает вид

$$0 \leqslant f^0(\bar{z}_h(T)) - f^0(\bar{z}(T)) \leqslant L_z^0\Big\{(C + L_{t/z})(e^{L_z T} - 1)\,h +$$

$$+ 2\bar{C}ve^{L_z T}h + \varepsilon(h)\frac{e^{L_z T} - 1}{L_z}\Big\} = L_z^0\Big\{\Big((C +$$

$$+ L_{t/z})\,h + \frac{\varepsilon(h)}{L_z}\Big)(e^{L_z T} - 1) + 2\bar{C}ve^{L_z T}h\Big\},$$

что и требовалось доказать.

Проводя совершенно аналогичные выкладки для нефиксированного T, придем к следующей оценке близости по функционалу:

$$0 \leqslant f^0(\bar{z}_h(\bar{T}_h),\ \bar{T}_h) - f^0(\bar{z}(\bar{T}),\ \bar{T}) \leqslant$$
$$\leqslant L_z^0\Big\{\Big((C + L_{t/z})\,h + \frac{\varepsilon(h)}{L_z}\Big)(e^{L_z T_*} - 1) + (2\bar{C}ve^{L_z T_*} + C + L_{T/z}^0)\,h\Big\},$$

доказывающей утверждение (1.35) теоремы.

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 1 для фиксированного T либо теоремы 3 для нефиксированного T, за исключением условия Липшица для функции $g(z, u, t)$ по переменной t, которое заменяется условием ее кусочной непрерывности по этой переменной в области $0 \leqslant t \leqslant T$ (T_*). Тогда оценки близости по функционалу соответственно для фиксированного и нефиксированного T следующие:

$$\varphi(h) = L_z^0 \left\{ \left(Ch + L_{u/z}\varepsilon_{\bar{u}}(h) + \frac{2\varepsilon_1(h)}{L_z} \right) (e^{L_z T} - 1) + \right.$$
$$\left. + (L_u D\bar{\nu} + 4C\bar{\nu}_1) e^{L_z T} h \right\}, \tag{1.36}$$

$$\varphi(h) = L_z^0 \left\{ \left(Ch + L_{u/z}\varepsilon_{\bar{u}}(h) + \frac{2\varepsilon_1(h)}{L_z} \right) (e^{L_z T_*} - 1) + \right.$$
$$\left. + ((L_u D\bar{\nu} + 4C\bar{\nu}_1) e^{L_z T_*} + C + L_{T/z}^0) h \right\}, \tag{1.37}$$

где $\varepsilon_1(h)$ — максимальное из колебаний семейства функций $g(z, u, s)$, $z \in \mathrm{Z}$, $u \in \mathrm{U}$ (в смысле выбранной нормы) на тех интервалах $(k-1)h \leqslant s \leqslant kh$, где оно непрерывно, а $\bar{\nu}_1$ — число точек разрыва.

Доказательство. Приведем для этого случая доказательство основной леммы. Из выражений (1.12) и (1.13) получаем

$$\|z(t) - x(t)\| \leqslant \|z(kh) - x(kh)\| + \int_{kh}^{t} \|g(z, u, s) - g(x(kh), u(kh),$$
$$kh)\| ds \leqslant \|z(kh) - x(kh)\| + \int_{kh}^{t} \|g(z, u, s) - g(z, u, kh)\| ds +$$
$$+ \int_{kh}^{t} \|g(z, u, kh) - g(x(kh), u(kh), kh)\| ds \leqslant \|z(kh) - x(kh)\| +$$
$$+ L_z \int_{kh}^{(k+1)h} \|z(s) - x(kh)\| ds + L_u I_{u,h}(k+1) + \int_{kh}^{(k+1)h} \|g(z, u, s) -$$
$$- g(z, u, kh)\| ds \leqslant (1 + L_z h)\Delta_h(k) + \frac{1}{2} C L_z h^2 + L_u I_{u,h}(k+1) +$$
$$+ \int_{kh}^{(k+1)h} \|g(z, u, s) - g(z, u, kh)\| ds.$$

Поэтому заключение (1.10) леммы запишется так:

$$\Delta_h \leqslant \frac{1}{2} C (e^{L_z T} - 1) h + L_u \sum_{k=1}^{N} I_{u,h}(k)(1 + L_z h)^{N-k} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{N} (1 + L_z h)^{N-k} \int_{(k-1)h}^{kh} \|g(z, u, s) - g(z, u, (k-1)h)\| ds,$$

а, следовательно, заключение (1.15) теоремы 1 примет следующий вид:

$$0 \leqslant f^0(\bar z_h(T)) - f^0(z,\ (T)) \leqslant L_z^0 \Big\{ C(e^{L_zT} - 1)h + L_u \sum_{k=1}^{N} I_{\bar u,h}(k) \times$$

$$\times (1 + L_z h)^{N-k} + 2 \sum_{k=1}^{N} (1 + L_z h)^{N-k} \max \Big(\int_{(k-1)h}^{kh} \| g(\bar z,\ \bar u,\ s) -$$

$$- g(\bar z,\ \bar u,\ (k-1)h) \| ds,$$

$$\int_{(k-1)k}^{kh} \| g(\bar z_h,\ \bar u_h,\ s) - g(\bar z_h,\ \bar u_h,\ (k-1)h) \| ds \Big) \Big\}.$$

Так как семейство функций $g(z,\ u,\ s)$, $z \in Z$, $u \in U$ в силу ограниченности множеств Z и U равномерно-непрерывно по переменной s на участках его непрерывности, то заключение (1.18) теоремы 2 принимает следующий вид:

$$0 \leqslant f^0(\bar z_h(T)) - f^0(\bar z(T)) \leqslant L_z^0 \Big\{ \Big(Ch + L_{u/z} \varepsilon_{\bar u}(h) + \frac{2\varepsilon_1(h)}{L_z} \Big) (e^{L_zT} -$$

$$- 1) + (L_u D\bar v + 4C\bar v_1) e^{L_zT} h \Big\}.$$

Значит, утверждение (1.36) доказано.

Утверждение (1.37) доказывается аналогично, только принимаются во внимание теоремы 3 и 4.

З а м е ч а н и я. Остановимся вкратце на практическом использовании полученных результатов.

Предположим, что функции g и u на отрезках их непрерывности по переменной t удовлетворяют условию Липшица соответственно с константами L_t и $L^{(\bar u)}$. Тогда шаг дискретизации для фиксированного и нефиксированного T можно выбирать, исходя из того, что

$$h_*(\varepsilon_0) = \\ = \frac{\varepsilon_0}{L_z^0 \Big\{ \Big(C + L_{t/z} + \frac{1}{2} L_{u/z} L^{(\bar u)} \Big) (e^{L_zT} - 1) + (L_u D\bar v + 4C\bar v_1) e^{L_zT} \Big\}}, \quad (1.38)$$

$$h_*(\varepsilon_0) = \\ = \frac{\varepsilon_0}{L_z^0 \Big\{ \Big(C + L_{t/z} + \frac{1}{2} L_{u/z} L^{(\bar u)} \Big) (e^{L_zT_*} - 1) + (L_u D\bar v + 4C\bar v_1) e^{L_zT_*} + C + L_{T/z}^0 \Big\}}. \quad (1.39)$$

Формулы (1.38), (1.39) вытекают из (1.36) и (1.37), если вместо величин $\varepsilon_{\bar u}(h)$ и $\varepsilon_1(h)$ подставить соответственно величины $\frac{1}{2} L^{(\bar u)} h$ и $\frac{1}{2} L_t h$.

Полагая в выражении (1.38), (1.39) $L_{t/z} = 0$ либо $L^{(\bar{u})} = 0$, получим соответственно шаг дискретизации для кусочно-постоянных по t правых частей дифференциальных уравнений либо для кусочно-постоянного оптимального управления.

Оценки (1.36) и (1.37) можно улучшить следующим очевидным образом:

$$\varphi(h) = L_z^0 \left\{ \left(Ch + L_{u/z} \varepsilon_{\bar{u}}(h) + \frac{2\varepsilon_1(h)}{L_z} \right) (e^{L_z T} - 1) + (L_u D\bar{v} + \right.$$
$$\left. + 4C\bar{v}_1) e^{L_z T} h - L_u \underline{v} \varepsilon_{\bar{u}}(h) h - 2\bar{v}_1 \varepsilon_1(h) h \right\},$$

$$\varphi(h) = L_z^0 \left\{ \left(Ch + L_{u/z} \varepsilon_{\bar{u}}(h) + \frac{2\varepsilon_1(h)}{L_z} \right) (e^{L_z T_*} - 1) + ((L_u D\bar{v} + \right.$$
$$\left. + 4C\bar{v}_1) e^{L_z T_*} + C + L_{T/z}^0) h - L_u \underline{v} \varepsilon_{\bar{u}}(h) h - 2\bar{v}_1 \varepsilon_1(h) h \right\},$$

откуда, в частности, если функции $\bar{u}$ и g удовлетворяют по переменной t условию Липшица на отдельных интервалах, имеем квадратические оценки:

$$\varphi(h) = L_z^0 \left\{ \left[\left(C + L_{t/z} + \frac{1}{2} L_{u/z} L^{(\bar{u})} \right) (e^{L_z T} - 1) + \right. \right.$$
$$\left. \left. + (L_u D\bar{v} + 4C\bar{v}_1) e^{L_z T} \right] h - \frac{1}{2} (L_u L^{(\bar{u})} \underline{v} + 2L_t \bar{v}_1) h^2 \right\},$$

$$\varphi(h) = L_z^0 \left\{ \left[\left(C + L_{t/z} + \frac{1}{2} L_{u/z} L^{(\bar{u})} \right) (e^{L_z T_*} - 1) + (L_u D\bar{v} + \right. \right.$$
$$\left. \left. + 4C\bar{v}_1) e^{L_z T_*} + C + L_{T/z}^0 \right] h - \frac{1}{2} (L_u L^{(\bar{u})} \underline{v} + 2L_t \bar{v}_1) h^2 \right\}.$$

При этом в данном случае вместо $h_*(\varepsilon_0)$ следует принимать $\min\{h_*(\varepsilon_0), \Delta t, (\Delta t)'\}$, где $h_*(\varepsilon_0)$ — минимальный корень уравнения $\varphi(h) = \varepsilon_0$; Δt — минимальный промежуток времени между двумя соседними точками переключения оптимального управления; $(\Delta t)'$ — минимальный промежуток времени между двумя точками разрыва функции g по переменной t.

Теорема 7. Пусть выполнены условия теоремы 1 для фиксированного T либо теоремы 3 для нефиксированного T, кроме условий Липшица для функции $g(z, u, t)$ по переменным u и t, которые заменяются соответственно условиями непрерывности ее по переменной u в области U и кусочной непрерывности по переменной t в области $0 \leqslant t \leqslant T\ (T_*)$. Тогда оценочные функции для фиксированного и нефиксированного T запишутся следующим образом:

$$\varphi(h) = L_z^0 \left\{ \left(Ch + \frac{\varepsilon(h) + 2\varepsilon_1(h)}{L_z} \right) (e^{L_z T} - 1) + 2C(\bar{v} + 2\bar{v}_1) e^{L_z T} h \right\}, \tag{1.40}$$

$$\varphi(h) = L_z^0 \left\{ \left(Ch + \frac{\varepsilon(h) + 2\varepsilon_1(h)}{L_z} \right) (e^{L_z T_*} - 1) + (2C(\bar{\nu} + 2\bar{\nu}_1) e^{L_z T_*} + \right.$$

$$\left. + C + L_{T/z}^0) h \right\}. \quad (1.41)$$

Доказательство. В этом случае доказательство основной леммы будет более громоздким. Из выражений (1.12) и (1.13) последовательно находим, что

$$\| z(t) - x(t) \| \leqslant \| z(kh) - x(kh) \| + \int_{kh}^{t} \| g(z, u, s) - g(x(kh),$$

$$u(kh), kh) \| ds \leqslant \| z(kh) - x(kh) \| + \int_{kh}^{t} \| g(z, u, s) - g(z, u, kh) \| ds +$$

$$+ \int_{kh}^{t} \| g(z, u, kh) - g(z, u(kh), kh) \| ds + \int_{kh}^{t} \| g(z, u(kh), kh) -$$

$$- g(x(kh), u(kh), kh) \| ds \leqslant \| z(kh) - x(kh) \| + L_z \int_{kh}^{(k+1)h} \| z(s) -$$

$$- x(kh) \| ds + \int_{kh}^{(k+1)h} \| g(z, u, s) - g(z, u, kh) \| ds +$$

$$+ \int_{kh}^{(k+1)h} \| g(z, u, kh) - g(z, u(kh), kh) \| ds \leqslant$$

$$\leqslant (1 + L_z h) \Delta_h(k) + \frac{1}{2} C L_z h^2 + \int_{kh}^{(k+1)h} \| g(z, u, s) -$$

$$- g(z, u, kh) \| ds + \int_{kh}^{(k+1)h} \| g(z, u, kh) - g(z, u(kh), kh) \| ds.$$

Следовательно, оценка (1.10) трансформируется так:

$$\Delta_h \leqslant \frac{1}{2} C (e^{L_z T} - 1) h + \sum_{k=1}^{N} (1 + L_z h)^{N-k} \int_{(k-1)h}^{kh} \| g(z, u, s) -$$

$$- g(z, u, (k-1)h) \| ds + \sum_{k=1}^{N} (1 + L_z h)^{N-k} \int_{(k-1)h}^{kh} \| g(z, u, (k-1)h) -$$

$$- g(z, u((k-1)h), (k-1)h) \| ds,$$

вследствие чего (1.15) преобразуется к следующему выражению:

$$0 \leqslant f^0(\bar{z}_h(T)) - f^0(\bar{z}(T)) \leqslant L_z^0 \left\{ C (e^{L_z T} - 1) h + \sum_{k=1}^{N} (1 + L_z h)^{N-k} \times \right.$$

$$\times \int\limits_{(k-1)h}^{kh} \|g(\bar{z}, \bar{u}, (k-1)h) - g(\bar{z}, \bar{u}((k-1)h), (k-1)h)\| ds +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{N} (1 + L_z h)^{N-k} \max\left(\int\limits_{(k-1)h}^{kh} \|g(\bar{z}, \bar{u}, s) - g(\bar{z}, \bar{u}, (k-1)h)\| ds, \right.$$

$$\left.\left. \int\limits_{(k-1)h}^{kh} \|g(\bar{z}_h, \bar{u}_h, s) - g(\bar{z}_h, \bar{u}_h, (k-1)h)\| ds \right)\right\}.$$

Наконец, в силу предположений теоремы приходим к окончательной оценке:

$$0 \leqslant f^0(\bar{z}_h(T)) - f^0(\bar{z}(T)) \leqslant L_z^0 \left\{ \left(Ch + \frac{\varepsilon(h) + 2\varepsilon_1(h)}{L_z} \right) (e^{L_z T} - 1) + \right.$$

$$\left. + (2C\bar{v} + 4C\bar{v}_1) e^{L_z T} h \right\},$$

откуда и следует формула (1.40). Аналогично доказывается справедливость формулы (1.41). Таким образом, в случае кусочно-непрерывного оптимального управления, часто встречающегося на практике, имеется возможность выбора шага дискретизации, обеспечивающего требуемую точность решения задачи.

§ 7. ТЕОРЕМЫ СХОДИМОСТИ ДЛЯ ДРУГИХ КЛАССОВ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

1. Пусть оптимальное управление непрерывной задачи интегрируемо по Риману. Ради простоты выкладок будем считать время T фиксированным. Положим $\mathfrak{M}(h) = \bigcup\limits_{k \in K(h)} \{(k-1)h \leqslant t \leqslant kh\}$, $\overline{\mathfrak{M}}(h) = \bigcup\limits_{k \bar{\in} K(h)} \{(k-1)h \leqslant t \leqslant kh\}$.

Теорема 8. Если выполнены условия теоремы 1 (теоремы 3) и мера $\mu(\overline{\mathfrak{M}}(h)) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$, то имеет место сходимость по функционалу, т. е.

$$f^0(\bar{z}_h(T)) \to f^0(\bar{z}(T)) \qquad \text{при } h \to 0.$$

Доказательство. В силу утверждения теоремы 1

$$0 \leqslant f^0(\bar{z}_h(T)) - f^0(\bar{z}(T)) \leqslant$$

$$\leqslant L_z^0 \left\{ (C + L_{t/z})(e^{L_z T} - 1) h + L_u \sum_{k=1}^{N} l_{\bar{u},h}(k) (1 + L_z h)^{N-k} \right\}. \quad (1.42)$$

Пусть ε — сколь угодно малое положительное число. Поскольку $\mu(\overline{\mathfrak{M}}(h)) \to 0$ при $h \to 0$, можно указать такое $h_1(\varepsilon) = \frac{T}{N_1(\varepsilon)}$, что для $h = \frac{T}{N} \leqslant h_1(\varepsilon)$ будет выполнено

$$L_z^0 \{(C + L_{t/z})(e^{L_z T} - 1)h + 3L_u D e^{L_z T} \mu(\overline{\mathfrak{M}}(h))\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.43)$$

Обозначим максимальное из колебаний функции $\bar{u}(t)$ на интервалах $\{(k-1)h \leqslant t \leqslant kh\} = i_k \in \mathfrak{A}(\varepsilon) = \mathfrak{M}(h_1(\varepsilon))$ через $\varepsilon_{\bar{u}}(h, \mathfrak{A}(\varepsilon))$. Выберем теперь шаг дискретизации $h(\varepsilon) \leqslant h_1(\varepsilon)$ таким, чтобы для всех $h \leqslant h(\varepsilon)$

$$L_z^0 L_u \sum_{k/i_k \in \mathfrak{A}(\varepsilon)} (1+L_z h)^{N-k} \int\limits_{(k-1)h}^{kh} \|\bar{u}(s) - \bar{u}((k-1)h)\| ds \leqslant$$

$$\leqslant L_z^0 L_{u/z} (e^{L_z T} - 1)\, \varepsilon_{\bar{u}}(h, \mathfrak{A}(\varepsilon)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1.44)$$

Очевидно, что оценка (1.42) может быть записана и продолжена следующим образом:

$$0 \leqslant f^0(\bar{z}_h(T)) - f^0(\bar{z}(T)) \leqslant L_z^0 \Big\{(C + L_{t/z})(e^{L_z T} - 1)h +$$

$$+ L_u \sum_{k/i_k \bar{\in} \mathfrak{A}(\varepsilon)} (1+L_z h)^{N-k} \int\limits_{(k-1)h}^{kh} \|\bar{u}(s) - \bar{u}((k-1)h)\| ds +$$

$$+ L_u \sum_{k/i_k \in \mathfrak{A}(\varepsilon)} (1+L_z h)^{N-k} \int\limits_{(k-1)h}^{kh} \|\bar{u}(s) - \bar{u}((k-1)h)\| ds \Big\} \leqslant$$

$$\leqslant L_z^0 \{(C + L_{t/z})(e^{L_z T} - 1)h + 3L_u D e^{L_z T} \mu(\overline{\mathfrak{M}}(h)) + L_{u/z}(e^{L_z T} - 1) \times$$

$$\times\, \varepsilon_{\bar{u}}(h, \mathfrak{A}(\varepsilon))\}, \qquad (1.45)$$

что напоминает вывод теоремы 2.

Теперь благодаря выбору шага дискретизации $h(\varepsilon)$ из выражений (1.43) — (1.45) заключаем, что для всех $h = \frac{T}{N} \leqslant h(\varepsilon)$ будет выполнено неравенство

$$0 \leqslant f^0(\bar{z}_h(T)) - f^0(\bar{z}(T)) \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ следует заключение теоремы.

Аналогично, используя теорему 3, устанавливаем для данного случая факт сходимости при нефиксированном времени T.

Замечания. Применяя приведенную схему доказательства и используя выводы теорем 5—7, легко убедиться в том, что сходимость по функционалу имеет место для рассматриваемого здесь класса оптимальных управлений также в следующих более общих случаях: непрерывность функции g по переменной u, интегрируемость ее по t по Риману и ограниченность, непрерывность целевой функции.

2. Рассмотрим теперь случай, когда оптимальное управление является измеримой функцией. Множество измеримых функций на отрезке $[0, T]$ со значениями в замкнутой ограниченной области U будем обозначать через $L_U[0, T]$.

Теорема 9. Пусть функция $f^0(z(T))$ непрерывна, функция $g(z, u, t)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной z, непрерывна по переменной u, а также интегрируема по Риману в собственном смысле по переменной t, множество U ограничено *, а оптимальное управление $\bar{u}(t) \in L_U\,[0, T]$. Тогда имеет место

$$f^0(\bar{z}_h(T)) \xrightarrow[h\to 0]{} f^0(\bar{z}(T)).$$

Доказательство. Пусть $u(t)$ — некоторое ступенчатое управление, которое определим впоследствии.

Траекторию, соответствующую этому управлению, обозначим $z(t)$. Тогда, очевидно,

$$z(t) = z^0 + \int_0^t g(z, u, \tau)\, d\tau, \tag{1.46}$$

$$\bar{z}(t) = z^0 + \int_0^t g(\bar{z}, \bar{u}, \tau)\, d\tau. \tag{1.47}$$

Полагая $\Delta(t) = \|\bar{z}(t) - z(t)\|$, из выражений (1.46) — (1.47) при использовании условия Липшица получаем

$$\Delta(t) \leqslant L_z \int_0^t \Delta(\tau)\, d\tau + S(u(t)), \tag{1.48}$$

где

$$S(u(t)) = \max_{0\leqslant t\leqslant T} \left\| \int_0^t [g(\bar{z}(t), u(t), t) - g(\bar{z}(t), \bar{u}(t), t)]\, dt \right\|. \tag{1.49}$$

Тогда из интегрального неравенства (1.48) получаем

$$\Delta(T) \leqslant S(u(t))\, e^{L_z T}. \tag{1.50}$$

Поэтому вследствие измеримости и ограниченности оптимального управления $\bar{u}(t)$ и сделанных предположений относительно функции g заключаем, что можно указать такое ступенчатое управление $\bar{u}^\varepsilon(t)$, при котором для соответствующе траектории

$$0 \leqslant f^0(\bar{z}^\varepsilon(T)) - f^0(\bar{z}(T)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot \tag{1.51}$$

Далее, на основе выводов теоремы 2 и ее обобщений, примененных к решению $\{\bar{u}^\varepsilon(t), \bar{z}^\varepsilon(t)\}$, получаем оценку сверху

$$f^0(\bar{z}_h(T)) - f^0(\bar{z}^\varepsilon(T)) = f^0(\bar{z}_h(T)) - f^0(\bar{x}_h(T)) + f^0(\bar{x}_h(T)) - \\ - f^0(\bar{z}^\varepsilon(T)) \leqslant \varphi_\varepsilon(h), \tag{1.52}$$

из которой выводим, что

$$f^0(\bar{z}_h(T)) - f^0(\bar{z}^\varepsilon(T)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad h \leqslant h(\varepsilon). \tag{1.53}$$

---

* Это условие можно заменить условием ограниченности функции g по переменной u.

Используя оценки (1.51) и (1.53), окончательно заключаем, что для $h \leqslant h(\varepsilon)$

$$0 \leqslant f^0(\bar{z}_h(T)) - f^0(\bar{z}(T)) = f^0(\bar{z}_h(T)) - f^0(\bar{z}^\varepsilon(T)) +$$
$$+ f^0(\bar{z}^\varepsilon(T)) - f^0(\bar{z}(T)) \leqslant \varepsilon.$$

Ввиду произвольной малости ε полученное неравенство означает сходимость по функционалу. Заметим, что для задачи с нефиксированным временем T сходимость доказывается таким же образом с использованием теоремы 3.

Замечание. Из теоремы 9 вытекает, что в том случае, когда оптимальное управление $\bar{u}(t) \in L_2[0, T]$ (см. [3]), имеет место лишь сходимость сверху по функционалу. При этом должно еще выполняться условие роста по u

$$\|g(z_0, u, t)\| \leqslant K + \tilde{K}\|u\|^2, \tag{1.54}$$

которое гарантирует также существование, единственность и непрерывность оптимальной траектории. Кроме того, должно быть выполнено следующее условие: величина

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left\| \int_0^t [g(\bar{z}(t), \hat{u}(t), t) - g(\bar{z}(t), \bar{u}(t), t)]\, dt \right\| \tag{1.55}$$

может быть сделана сколь угодно малой выбором частичной суммы ряда Фурье $\hat{u}(t)$ оптимального управления $\bar{u}(t)$. Это условие выполняется, в частности, для функции g, которая может быть представлена в виде суммы липшицевой функции по переменной u и квадратической формы по этой переменной.

В этом случае полная сходимость по функционалу, понимаемая в смысле утверждения теоремы 9, будет обеспечена, если применить разностную аппроксимацию непрерывной задачи, при которой оптимальное управление ищется в виде частичной суммы некоторого ряда Фурье.

3. Во всем предыдущем изложении считалось, что оптимальное управление является измеримым. Рассмотрим тот наиболее общий случай, когда оптимальное управление, вообще говоря, не достигается в классе измеримых управлений (скользящие режимы и пр.), а существует минимизирующая последовательность измеримых управлений.

Теорема 10. Пусть выполнены условия теоремы 9. Тогда имеет место сходимость по функционалу, т. е.

$$f_0(\bar{z}_h(T)) \xrightarrow[h \to 0]{} \inf_{z(T) \in S(T)} f^0(z(T)) = \min_{z(T) \in \bar{S}(T)} f^0(z(T)).$$

Доказательство. Множество достижимости в непрерывной задаче $S(T)$ при сделанных предположениях всегда ограничено. Рассмотрим его замыкание $\bar{S}(T)$, т. е. рассмотрим его вместе с предельными точками, порожденными всевозможными последовательностями измеримых управлений $\{u^k(t)\}$. Для каждой такой последовательности соответствующая последовательность $z^k(T)$ имеет из-за ограниченности множества достижимости ограниченное множество предельных точек. Для любой предельной точки из этого множества $z^*(T)$ можно указать такую подпоследовательность $\{u^{k_s}(t)\}$ измеримых управлений, для которой $z^{k_s}(T) \underset{s\to\infty}{\to} z^*(T)$.

Пусть минимум функции $f^0(z(T))$ реализуется на какой-либо предельной точке $\bar{z}^*(T)$. Пусть, далее, $\varepsilon > 0$ — произвольное сколь угодно малое число. Тогда согласно вышесказанному можно указать такой номер последовательности $k_s(\varepsilon)$, при котором выполняется неравенство

$$0 \leqslant f^0(\bar{z}^{k_s(\varepsilon)}(T)) - f^0(\bar{z}^*(T)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot \qquad (1.56)$$

Согласно теореме 9, справедливой при измеримом управлении $\bar{u}^{k_s(\varepsilon)}(t)$, можно указать такой шаг дискретизации $h(\varepsilon)$, при котором для всех $h \leqslant h(\varepsilon)$

$$f^0(\bar{z}_h(T)) - f^0(\bar{z}^{k_s(\varepsilon)}(T)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot \qquad (1.57)$$

Тогда, складывая неравенства (1.56) и (1.57), получаем, что для $h \leqslant h(\varepsilon)$

$$0 \leqslant f^0(\bar{z}_h(T) - f^0(\bar{z}^*(T)) \leqslant \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

§ 8. СХОДИМОСТЬ ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Предположим, что задача (1.1) — (1.3) решается при наличии фазовых ограничений вида

$$f^j(z(T)) \leqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, r. \qquad (1.58)$$

Множество $\{z f^j(z) \leqslant 0, \ j = 1, \ldots, r\}$ обозначим через Φ. Пусть $\min\limits_{\Phi \cap \bar{S}(T)} f^0(z(t))$ реализуется в некоторой точке $\bar{z}(T)$.

Теорема 11. Пусть выполнены условия теоремы 10, функции $f^j(z), j = 0, \ldots, r$ непрерывны, а область Φ такова, что существует последовательность $\{\bar{u}^k(t)\}$, для которой $\bar{z}^k(T) \underset{k\to\infty}{\to} \bar{z}(T)$ и

$$f^j(\bar{z}^k(T)) < 0, \ j = 1, \ldots, r. \qquad (1.59)$$

Тогда имеет место сходимость по функционалу.

Доказательство 1. Рассмотрим сначала тот случай, когда $0 < f^0(\bar{x}_h(T)) - f^0(\bar{z}(T))$, и покажем, что в этом случае можно указать допустимое решение дискретной задачи, сколь угодно близкое по функционалу к решению непрерывной задачи. В силу способа доказательства сходимости в задаче без фазовых ограничений для управления $\bar{u}^k(t)$ непрерывной задачи всегда можно построить управление дискретной задачи, переводящее объект в такую точку $\tilde{x}_h^k(T)$ фазового пространства, для которой

$$f^0(\tilde{x}_h^k(T)) - f^0(\bar{z}^k(T)) \leqslant L_z^0 \alpha_k(h), \tag{1.60}$$

причем $\alpha_k(h) \to 0$, когда $h \to 0$. Кроме того,

$$0 \leqslant f^0(\bar{z}^k(T)) - f^0(\bar{z}(T)) \leqslant L_z^0 \| \bar{z}^k(T) - \bar{z}(T) \|. \tag{1.61}$$

Таким образом, из неравенств (1.60) и (1.61) получается, что

$$f^0(\tilde{x}_h^k(T)) - f^0(\bar{z}(T)) \leqslant L_z^0(\alpha_k(h) + \| \bar{z}^k(T) - \bar{z}(T) \|). \tag{1.62}$$

Ввиду того, что $\bar{z}^k(T) \xrightarrow[k \to \infty]{} \bar{z}(T)$, можно указать для всякого $\varepsilon > 0$ такой номер последовательности $k(\varepsilon)$, при котором выполняется неравенство

$$L_z^0 \| \bar{z}^{k(\varepsilon)}(T) - \bar{z}(T) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{4},$$

а поскольку $\alpha_{k(\varepsilon)}(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$, то можно указать такой шаг дискретизации $h_1(\varepsilon)$, при котором для $h \leqslant h_1(\varepsilon)$

$$L_z^0 \alpha_{k(\varepsilon)}(h) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Поэтому из неравенства (1.62) заключаем, что

$$f^0(\tilde{x}_h^{k(\varepsilon)}(T)) - f^0(\bar{z}(T)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad h \leqslant h_1(\varepsilon). \tag{1.63}$$

Предполагая ради удобства записи выполненным условие Липшица для функций f^j, оценим выражение

$$f^j(\tilde{x}_h^{k(\varepsilon)}(T)) - f^j(\bar{z}^{k(\varepsilon)}(T)) \leqslant L_z^1 \| \tilde{x}_h^{k(\varepsilon)}(T) - \bar{z}^{k(\varepsilon)}(T) \| \leqslant L_z^1 \alpha_{k(\varepsilon)}(h),$$

откуда

$$f^j(\tilde{x}_k^{k(\varepsilon)}(T)) \leqslant L_z^1 \alpha_{k(\varepsilon)}(h) + f^j(\bar{z}^{k(\varepsilon)}(T)) \leqslant L_z^1 \alpha_{k(\varepsilon)}(h) + \varphi(\varepsilon), \tag{1.64}$$

где обозначено $\varphi(\varepsilon) = \max\limits_{j=1,\ldots,r} f^j(\bar{z}^{k(\varepsilon)}(T))$.

Используя теперь условие (1.59), вследствие которого величина $\varphi(\varepsilon) < 0$, выберем шаг разностной схемы $h_2(\varepsilon) \leqslant h_1(\varepsilon)$ так, чтобы для всех $h \leqslant h_2(\varepsilon)$ было выполнено неравенство

$$L_z^1 \alpha_{k(\varepsilon)}(h) + \varphi(\varepsilon) \leqslant 0,$$

ввиду чего из (1.64) вытекает

$$f^j(\tilde{x}^{k(\varepsilon)}(T)) \leqslant 0, \; j = 1, \ldots, r; \quad h \leqslant h_2(\varepsilon),$$

т. е. допустимость построенного управления дискретной задачи. Поэтому на основе выражения (1.63) сможем оценить интересующую нас величину для $h \leqslant h_2(\varepsilon)$:

$$0 < f^0(\bar{x}_h(T)) - f^0(\bar{z}(T)) \leqslant f^0(\tilde{x}_h^{k(\varepsilon)}(T)) - f^0(\bar{z}(T)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

2. Осталось рассмотреть тот случай, когда $0 < f^0(\bar{z}(T)) - f^0(\bar{x}_h(T))$.

В этом случае в качестве управления непрерывной задачи выберем сначала кусочно-постоянное управление $\bar{u}_h(t)$, переводящее объект в точку $\bar{z}_h(T)$, для которой согласно ранее полученным результатам, относящимся к задачам управления без фазовых ограничений, имеет место неравенство

$$\|\bar{z}_h(T) - \bar{x}_h(T)\| \leqslant \beta(h),\ \ \beta(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0. \qquad (1.65)$$

Но построенное таким образом управление непрерывной задачи будет, вообще говоря, недопустимым по фазовым ограничениям. Оценим, насколько могут быть нарушены эти ограничения:

$$f^j(\bar{z}_h(T)) \leqslant f^j(\bar{z}_h(T)) - f^j(\bar{x}_h(T)) \leqslant L_z^1\|\bar{z}_h(T) - \bar{x}_h(T)\| \leqslant L_z^1\beta(h). \qquad (1.66)$$

Образуем теперь множество

$$\Phi_h = \{z \mid f^j(z) \leqslant L_z^1\beta(h),\ j = 1, \ldots, r\} \supset \Phi$$

и рассмотрим непрерывную задачу (1.1) — (1.3) при фазовых ограничениях вида

$$f^j(z) \leqslant L_z^1\beta(h), \qquad j = 1, \ldots, r.$$

Так как для измененной таким образом задачи построенное управление $\bar{u}_h(t)$ будет допустимым, то с учетом неравенства (1.65) получим

$$\min_{z(T)\in\Phi_h\cap\bar{S}(T)} f^0(z(T)) - f^0(\bar{x}_h(T)) \leqslant f^0(\bar{z}_h(T)) - f^0(\bar{x}_h(T)) \leqslant L_z^0\beta(h). \qquad (1.67)$$

Используем полученный результат для вывода оценки интересующей нас величины:

$$0 < f^0(\bar{z}(T)) - f^0(\bar{x}_h(T)) = \min_{z(T)\in\Phi\cap\bar{S}(T)} f^0(z(T)) - \min_{z(T)\in\Phi_h\cap\bar{S}(T)} f^0(z(T)) +$$

$$+ \min_{z(T)\in\Phi_h\cap\bar{S}(T)} f^0(z(T)) - f^0(\bar{x}_h(T)) \leqslant \gamma(h) + L_z^0\beta(h). \qquad (1.68)$$

Ввиду ограниченности и замкнутости множества $\bar{S}(T)$, а также непрерывности функций $f^0, f^1, \ldots, f^r$ величина

$$\gamma(h) = \min_{z(T)\in\Phi\cap\bar{S}(T)} f^0(z(T)) - \min_{z(T)\in\Phi_h\cap\bar{S}(T)} f^0(z(T)) \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Поэтому можно выбрать такой шаг разностной аппроксимации $h \leqslant h_3(\varepsilon)$, чтобы было выполнено неравенство

$$\gamma(h) + L_z^0\beta(h) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (1.69)$$

на основании чего из оценки (1.68) получим, что для $h \leqslant h_3(\varepsilon)$

$$0 < f^0(\bar{z}(T)) - f^0(\bar{x}_h(T)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Обозначая $h(\varepsilon) = \min(h_2(\varepsilon), \; h_3(\varepsilon))$ и объединяя выводы обоих пунктов, приходим к заключению, что для $h \leqslant h(\varepsilon)$ во всяком случае выполняется неравенство

$$|f^0(\bar{x}_h(T)) - f^0(\bar{z}(T))| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (1.70)$$

из чего ввиду произвольности ε вытекает сходимость по функционалу решения дискретной задачи к решению непрерывной задачи.

Покажем, что эта сходимость имеет место также для управления $\bar{u}_h(t)$ непрерывной задачи, реализующего траекторию $\bar{z}_h(t)$ и построенного на основе оптимального управления дискретной задачи. В самом деле, для $h \leqslant h(\varepsilon)$ из неравенств (1.67), (1.69), (1.70) получается, что

$$|f^0(\bar{z}_h(T)) - f^0(\bar{z}(T))| \leqslant |f^0(\bar{z}_h(T)) - f^0(\bar{x}_h(T))| +$$
$$+ |f^0(\bar{x}_h(T)) - f^0(\bar{z}(T))| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

причем из выражения (1.66) имеем

$$f^j(\bar{z}_h(T)) \leqslant L_z^1\beta(h), \qquad j = 1, 2, \ldots, r.$$

Таким образом, выбором надлежащего шага всегда можно получить такое оптимальное решение дискретной задачи, при котором решение непрерывной задачи, построенное на его основе, будет сколь угодно мало отличаться от оптимального решения этой же задачи по функционалу и иметь сколь угодно малую погрешность по фазовым ограничениям. Заметим, что выбрать шаг h, обеспечивающий заданную погрешность по фазовым ограничениям, практически легко, так как величина $\beta(h)$ для большинства практических задач имеет явное аналитическое выражение.

§ 9. ОБОБЩЕНИЕ

В некоторых задачах оптимального управления недопустимо какое-либо нарушение фазовых ограничений. Для такого класса задач результат предыдущего параграфа нуждается в модификации.

Теорема 12. Пусть выполнены условия теоремы 11. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать интервал $[\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)]$ и шаг $h(\varepsilon)$, при которых для $\delta_1(\varepsilon) \leqslant \delta \leqslant \delta_2(\varepsilon)$ и $h \leqslant h(\varepsilon)$ решение непрерывной задачи, построенное по оптимальному решению дискретной задачи с фазовыми ограничениями вида

$$\Phi_{-\delta} = \{x \mid f^j(x) \leqslant -\delta, \quad j = 1, 2, \ldots, r\},$$

является допустимым и отличается по функционалу от оптимального решения исходной задачи не более чем на ε.

Доказательство. Обозначим оптимальное управление дискретной задачи с урезанными фазовыми ограничениями $\Phi_{-\delta}$ через $\bar{u}_h^\delta(t)$. Оно переводит дискретный объект в точку $\bar{x}_h^\delta(T)$.

Как и ранее, доказательство проведем в два этапа.

1. Считая сначала величину $f^0(\bar{x}_h^\delta(T)) - f^0(\bar{z}(T))$ положительной, дословно повторим начальную часть доказательства этого же пункта теоремы 11, заключая ее получением неравенства (1.64).

Выберем теперь величину $\delta_2(\varepsilon) < -\varphi(\varepsilon)$, а затем шаг дискретизации $h_2(\varepsilon) \leqslant h_1(\varepsilon)$ таким, чтобы для всех $h \leqslant h_2(\varepsilon)$ выполнялось неравенство

$$L_z^1 \alpha_{k(\varepsilon)}(h) + \varphi(\varepsilon) \leqslant -\delta_2(\varepsilon), \tag{1.71}$$

вследствие чего согласно оценке (1.64) для всех $\delta \leqslant \delta_2(\varepsilon)$ и $h \leqslant$ $\leqslant h_2(\varepsilon)$ будет иметь место неравенство

$$f^j(\tilde{x}_h^{k(\varepsilon)}(T)) \leqslant -\delta, \qquad j = 1, 2, \ldots, r,$$

так что в силу допустимости построенного решения дискретной задачи с фазовыми ограничениями $\Phi_{-\delta}$ из выражения (1.63) получаем для $\delta \leqslant \delta_2(\varepsilon)$ и $h \leqslant h_2(\varepsilon)$, что

$$0 < f^0(\bar{x}_h^\delta(T)) - f^0(\bar{z}(T)) \leqslant f^0(\tilde{x}_h^{k(\varepsilon)}(T)) - f^0(\bar{z}(T)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.72}$$

2. Пусть $f^0(\bar{z}(T)) - f^0(\bar{x}_h^\delta(T)) > 0$. Построим кусочно-постоянное управление $\bar{u}_h^\delta(t)$, переводящее управляемый объект в точку $\bar{z}_h^\delta(T)$ фазового пространства.

Как и в § 8, имеет место оценка

$$\| \bar{z}_h^\delta(T) - \bar{x}_h^\delta(T) \| \leqslant \beta(h),$$

а также

$$f^j(\bar{z}_h^\delta(T)) - f^j(\bar{x}_h^\delta(T)) \leqslant L_z^1 \| \bar{z}_h^\delta(T) - \bar{x}_h^\delta(T) \| \leqslant \max\{L_z^0, L_z^1\} \beta(h). \tag{1.73}$$

Выберем $h_3(\varepsilon)$ таким образом, чтобы для $h \leqslant h_3(\varepsilon)$ выполнялось неравенство

$$\max\{L_z^0, L_z^1\} \beta(h) \leqslant \min\left\{\delta_2(\varepsilon), \frac{\varepsilon}{2}\right\} = \delta_1(\varepsilon). \tag{1.74}$$

Кроме того, выбирая величину $\delta \geqslant \delta_1(\varepsilon)$, из выражений (1.73), (1.74) убеждаемся в допустимости построенного выше управления $\bar{u}_h^\delta(t)$:

$$f^j(\bar{z}_h^\delta(T)) \leqslant f^j(\bar{x}_h^\delta(T)) + \delta_1(\varepsilon) \leqslant -\delta_1(\varepsilon) + \delta_1(\varepsilon) = 0.$$

Теперь сможем оценить интересующую нас величину для $h \leqslant h_3(\varepsilon)$, $\delta \geqslant \delta_1(\varepsilon)$ следующим образом:

$$0 < f^0(\bar{z}(T)) - f^0(\bar{x}_h^\delta(T)) \leqslant f^0(\bar{z}_h^\delta(T)) - f^0(\bar{x}_h^\delta(T)) \leqslant$$
$$\leqslant L_z^0 \| \bar{z}_h^\delta(T) - \bar{x}_h^\delta(T) \| \leqslant \min\left\{\delta_2(\varepsilon), \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.75)$$

Наконец, основываясь на полученных оценках (1.72) и (1.75) обоих пунктов, можно получить требуемое утверждение:

$$0 \leqslant f^0(\bar{z}_h^\delta(T)) - f^0(\bar{z}(T)) \leqslant f^0(\bar{z}_h^\delta(T)) - f^0(\bar{x}_h^\delta(T)) +$$
$$+ f^0(\bar{x}_h^\delta(T)) - f^0(\bar{z}(T)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для $h \leqslant h(\varepsilon) = \min\{h_2(\varepsilon), h_3(\varepsilon)\}$ и $\delta_1(\varepsilon) \leqslant \delta \leqslant \delta_2(\varepsilon)$. Теорема доказана.

Заметим, что для нефиксированного времени T справедливы теоремы, аналогичные теоремам 11 и 12. При этом условия (1.59) должны выполняться в оптимальный конечный момент $\bar{T}$, а функции $f^j(z, T)$, $j = 0, 1, \ldots, r$ должны быть непрерывными также и по переменной T.

§ 10. СХОДИМОСТЬ ПРИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ПРОСТРАНСТВА ПЕРЕМЕННЫХ

В ряде случаев, например, при решении задач оптимального управления с помощью уравнений Беллмана, методом последовательного анализа вариантов, удобно применять конечно-разностную схему, основанную на дискретизации как переменной времени с шагом h, так и пространства состояний с шагами $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$. Часто при этом и область U сужается до некоторого дискретного множества U^Δ. Например, область U покрывается сеткой с шагами $\Delta u = (\Delta u_1, \ldots, \Delta u_m)$, так что допустимыми управлениями в произвольный момент времени считаются узлы сетки. В результате этого исходная непрерывная задача аппроксимируется задачей управления дискретной системой (автоматом). Состояния автомата, его переходы можно определить различными способами.

Находясь в состоянии $x(kh)$ и выбирая различные управления из множества U^Δ, получим состояния

$$x((k+1)h) = x(kh) + hg(x(kh), u(kh), kh),$$
$$x(0) = z^0, \; k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Объединим все состояния, попавшие в один элементарный гиперпараллелепипед с размерами $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, в одно состояние автомата, которое будем характеризовать одной из точек гиперпараллелепипеда. Переход автомата из одного состояния в другое возможен только в том случае, когда найдется управление из U^Δ, при котором за время h в силу разностных уравнений движения возможен переход между какими-либо точками соответствующих гиперпараллелепипедов. Одно из таких управлений (неважно какое) принимается за управление, вызывающее соответствующий переход автомата (см. также п. 4, § 11 гл. III). Желая подчеркнуть зависимость получающегося по такой процедуре оптимального решения от величины шагов h, Δu, Δx, будем обозначать его через

$$\begin{gathered}\bar{u}_h^{\Delta u, \Delta x}(0),\ \bar{u}_h^{\Delta u, \Delta x}(h),\ \ldots,\ \bar{u}_h^{\Delta u, \Delta x}(T-h); \\ \bar{x}_h^{\Delta u, \Delta x}(0),\ \bar{x}_h^{\Delta u, \Delta x}(h),\ \ldots,\ \bar{x}_h^{\Delta u, \Delta x}(T).\end{gathered} \tag{1.76}$$

По дискретному управлению $\bar{u}_h^{\Delta u, \Delta x}(kh)$ можно построить кусочно-постоянное управление исходной непрерывной задачи и получить траекторию $\bar{z}_h^{\Delta u, \Delta x}(t)$. Ради краткости записи будем рассматривать задачу оптимального управления с фиксированным конечным временем T.

Напомним, что оптимальное решение начальной непрерывной задачи мы условились обозначать через $\bar{u}(t)$, $\bar{z}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, а оптимальное решение ее конечно-разностного аналога — $\bar{u}_h(kh)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$; $\bar{x}_h(kh)$, $k = 0, 1, \ldots, N$. Обозначим еще оптимальное решение этого аналога с множеством U^{Δ} вместо U следующим образом:

$$\begin{gathered}\bar{u}_h^{\Delta u}(0), \bar{u}_h^{\Delta u}(h),\ \ldots,\ \bar{u}_h^{\Delta u}(T-h); \\ \bar{x}_h^{\Delta u}(0),\ \bar{x}_h^{\Delta u}(h),\ \ldots,\ \bar{x}_h^{\Delta u}(T).\end{gathered}$$

Теорема 13. Пусть выполнены условия теоремы 10 и условие $\|\Delta x\| = 0(h)$. Тогда

$$f^0(\bar{z}_h^{\Delta u, \Delta x}(T)) \xrightarrow[h, \|\Delta u_i\| \to 0]{} f^0(\bar{z}(T)).$$

Доказательство. Представим интересующую нас величину следующим образом:

$$\begin{gathered}0 \leqslant f^0(\bar{z}_h^{\Delta u, \Delta x}(T)) - f^0(\bar{z}(T)) = [f^0(\bar{z}_h^{\Delta u, \Delta x}(T)) - f^0(\bar{x}_h^{\Delta u, \Delta x}(T))] + \\ + [f^0(\bar{x}_h^{\Delta u, \Delta x}(T)) - f^0(\bar{x}_h^{\Delta u}(T))] + [f^0(\bar{x}_h^{\Delta u}(T)) - f^0(\bar{x}_h(T))] + \\ + [f^0(\bar{x}_h(T)) - f^0(\bar{z}(T))] = \tilde{r}_h^{\Delta u, \Delta x} + \bar{r}_h^{\Delta u, \Delta x} + \bar{r}_h^{\Delta u} + \bar{r}_h.\end{gathered}$$

Нетрудно увидеть, что сумма $\tilde{r}_h^{\Delta u, \Delta x} + \bar{r}_h$ имеет ту же оценку $\varphi(h)$, что и величина $f^0(\bar{z}_h(T)) - f^0(\bar{z}(T))$, которая служила предметом исследований во всех предыдущих параграфах. Следовательно,

$$\tilde{r}_h^{\Delta u, \Delta x} + \bar{r}_n \leqslant \varphi(h),$$

где величина $\varphi(h)$, а вместе с ней и величины $\tilde{r}_h^{\Delta u, \Delta x}$, $\bar{r}_h$ стремятся к нулю, когда $h \to 0$.

Займемся теперь оценкой величины

$$0 \leqslant \bar{r}_h^{\Delta u} = f^0(\bar{x}_h^{\Delta u}(T)) - f^0(\bar{x}_h(T)).$$

С этой целью выберем в качестве решения задачи с дискретным временем и дискретным множеством допустимых управлений решение

$$\hat{u}_h^{\Delta u}(0),\ \hat{u}_h^{\Delta u}(h),\ \ldots,\ \hat{u}_h^{\Delta u}(T-h);\ \hat{x}_h^{\Delta u}(0)=z^0,\ \hat{x}_h^{\Delta u}(h),\ldots$$
$$\ldots,\ \hat{x}_h^{\Delta u}(T), \tag{1.77}$$

для которого

$$\|\hat{u}_h^{\Delta u}(kh)-\bar{u}_h(kh)\|\leqslant\|\Delta u\|,\qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1.$$

Такое управление, очевидно, всегда можно указать.

Из разностных уравнений для соответствующих задач легко убеждаемся в справедливости рекуррентных соотношений

$$\|\hat{x}_h^{\Delta u}(kh)-\bar{x}_h(kh)\|\leqslant(1+L_zh)\|\hat{x}_h^{\Delta u}((k-1)h)-$$
$$-\bar{x}_h((k-1)h)\|+hL_u\|\Delta u\|,\ k=1,\ \ldots,\ N,$$

откуда без труда находим, что

$$\|\hat{x}_h^{\Delta h}(T)-\bar{x}_h(T)\|\leqslant L_{u/z}(e^{L_zT}-1)\|\Delta u\|, \tag{1.78}$$

где, как и ранее, $L_{u/z}=L_u/L_z$. Тогда в силу допустимости построенного решения (1.77) можно оценить величину $\bar{r}_h^{\Delta u}$ следующим образом:

$$0\leqslant\bar{r}_h^{\Delta u}=f^0(\bar{x}_h^{\Delta u}(T))-f^0(\bar{x}_h(T))\leqslant f^0(\hat{x}_h^{\Delta u}(T))-f^0(\bar{x}_h(T)),$$

откуда вследствие непрерывности целевой функции и оценки (1.78) заключаем, что $\bar{r}_h^{\Delta u}\to 0$, когда $\|\Delta u\|\to 0$.

Оценим величину $\bar{r}_h^{\Delta u,\Delta x}$. Оптимальное управление $\bar{u}_h^{\Delta u}(0)$ переводит управляемый объект из точки $\bar{x}_h^{\Delta v}(0)=z^0$ в точку $\bar{x}_h^{\Delta u}(h)$. Таким образом, существует управление $\hat{u}_h^{\Delta u,\Delta x}(0)$, переводящее дискретный объект в такое состояние $\hat{x}_h^{\Delta u,\Delta x}(h)$, для которого

$$\|\hat{x}_h^{\Delta u,\Delta x}(h)-\bar{x}_h^{\Delta u}(h)\|\leqslant\|\Delta x\|. \tag{1.79}$$

С помощью оптимального управления $\bar{u}_h^{\Delta u}(h)$ полученное состояние объекта $\hat{x}_h^{\Delta u,\Delta x}(h)$ преобразуется в состояние

$$x_h^{\Delta u,\Delta x}(2h)=\hat{x}_h^{\Delta u,\Delta x}(h)+hg(\hat{x}_h^{\Delta u,\Delta x}(h),\ \bar{u}_h^{\Delta u}(h),\ h), \tag{1.80}$$

при этом

$$\bar{x}_h^{\Delta u}(2h)=\bar{x}_h^{\Delta u}(h)+hg(\bar{x}_h^{\Delta u}(h),\ \bar{u}_h^{\Delta u}(h),\ h). \tag{1.81}$$

Из (1.80) и (1.81) с учетом (1.79) имеем

$$\|x_h^{\Delta u,\Delta x}(2h)-\bar{x}_h^{\Delta u}(2h)\|\leqslant(1+L_zh)\|\Delta x\|. \tag{1.82}$$

Кроме того, из определения состояний автомата и его переходов следует, что найдется такое управление $\hat{u}_h^{\Delta u, \Delta x}(h)$, при котором

$$\| \hat{x}_h^{\Delta u, \Delta x}(2h) - \bar{x}_h^{\Delta u, \Delta x}(2h) \| \leqslant \| \Delta x \|. \qquad (1.83)$$

С учетом неравенств (1.82) и (1.83) получаем следующую оценку:

$$\| \hat{x}_h^{\Delta u, \Delta x}(2h) - x_h^{\Delta u}(2h) \| \leqslant \| \Delta x \| \sum_{k=0}^{1} (1 + L_z h)^k .$$

Поступая и далее аналогичным образом, получим

$$\| \hat{x}_h^{\Delta u, \Delta x}(T) - \bar{x}_h^{\Delta u}(T) \| \leqslant \| \Delta x \| \sum_{k=0}^{N-1} (1 + L_z h)^k \leqslant \frac{e^{L_z T} - 1}{L_z} \frac{\| \Delta x \|}{h} . \qquad (1.84)$$

В силу допустимости построенного таким образом управления $(\ldots, \hat{u}_h^{\Delta u, \Delta x}(T - h))$, переводящего объект в точку $\hat{x}_h^{\Delta u, \Delta x}(T)$,

$$0 \leqslant \bar{r}_h^{\Delta u, \Delta x} = f^0(\bar{x}_h^{\Delta u, \Delta x}(T)) - f^0(\bar{x}_h^{\Delta u}(T)) \leqslant f^0(\hat{x}_h^{\Delta u, \Delta x}(T)) - f^0(\bar{x}_h^{\Delta u}(T)).$$

Полученное неравенство с учетом непрерывности функции f^0, оценки (1.84) и условия теоремы $\| \Delta x \| = o(h)$ позволяет утверждать, что $\bar{r}_h^{\Delta u, \Delta x} \to 0$, когда $h \to 0$.

Теорема доказана. Она остается справедливой со всеми полученными здесь оценками для задач с нефиксированным конечным временем (роль T в этих оценках играет T_*), а также при наличии фазовых ограничений.

Следствие. Если функция цели удовлетворяет условию Липшица, а управление кусочно-непрерывно, то для обеспечения требуемой точности ε_0 решения шаг дискретизации по времени достаточно выбрать равным $h_* \left(\frac{\varepsilon_0}{3} \right)$, где $h_*(\varepsilon_0)$ — функция, фигурировавшая ранее при исследовании скорости сходимости (см. § 4); шаги дискретизации в пространстве управлений достаточно взять из условия

$$\| \Delta u \| = \frac{\varepsilon_0}{3 L_z^0 L_{u/z} (e^{L_z T} - 1)} ,$$

а шаги дискретизации в пространстве состояний — из условия

$$\| \Delta x \| = \frac{\varepsilon_0 h_* \left(\frac{\varepsilon_0}{3} \right) L_z}{3 L_z^0 (e^{L_z T} - 1)} .$$

В самом деле, в этом случае на основании предыдущих неравенств

$$0 \leqslant f^0(\bar{z}_h^{\Delta u, \Delta x}(T)) - f_0(\bar{z}(T)) \leqslant \varphi(h) + L_z^0 L_{u/z} (e^{L_z T} - 1) \| \Delta u \| + \\ + \frac{L_z^0 (e^{L_z T} - 1) \| \Delta x \|}{L_z h} . \qquad (1.85)$$

Ограничивая теперь каждый член неравенства (1.85) величиной $\frac{\varepsilon_0}{3}$, придем к утверждению следствия.

Замечание. Как видим, доказательство сходимости по функционалу при различных способах дискретизации пространства переменных должно состоять из доказательства сходимости решения конечно-разностного аналога к решению исходной непрерывной задачи при $h \to 0$ с последующим доказательством сходимости при фиксированном h решения, полученного после дискретизации пространства переменных, к решению конечно-разностного аналога при $\| \Delta u \|$, $\| \Delta x \| \to 0$.

Сходимость метода динамического программирования, основанного на дискретизации пространства состояний с применением элементарной операции, исследовалась в [28, 44] и имеет место в предположениях теоремы 13 при дополнительном условии устойчивости элементарной операции по функционалу в окрестности оптимальной траектории конечно-разностного аналога.

Кроме того, так как при указанном подходе используются вариации в пространстве состояний, а не управлений, то для обеспечения сходимости рассматриваемого метода требуется, чтобы величина шага дискретизации по пространству $\| \Delta x \|$ была существенно более высокого порядка, чем величина шага по времени h. В частности, как вытекает из исследований сходимости метода локальных вариаций [44], для обычной задачи вариационного исчисления, являющейся простейшей задачей оптимального управления, должно выполняться условие $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\| \Delta x \|}{h^p} = 0$, где $p > 2$.

* * *

Результаты, полученные в этой главе, позволяют подойти к вопросу о выборе экономного шага дискретизации в зависимости от точности решения задачи, что чрезвычайно важно с точки зрения понижения размерности задачи, экономии машинного времени. Зачастую (это в особенности касается линейных систем) имеются априорные соображения относительно структуры оптимального управления (кусочно-постоянные, кусочно-липшицевые, оценка числа точек переключения и др.), которые с успехом могут быть использованы при выборе надлежащего шага дискретизации.

Заметим, что в этой главе при довольно общих и практически всегда выполненных предпосылках удалось распространить факт сходимости на случай ограниченных измеримых оптимальных управлений и случай, когда оптимальное управление не существует в классе измеримых управлений. Заметим, что требование ограниченности оптимального управления (либо функции g по переменной u) является при этом весьма существенным, ибо в противном случае сходимость, как правило, не имеет места.

Полученные в § 9 условия сходимости при наличии фазовых ограничений не являются обременительными и представляются естественными. Эти условия, по существу, означают требование устойчивости оптимального значения функционала исходной непрерывной задачи по отношению к малым уменьшениям области фазовых ограничений задачи. Результаты, аналогичные результатам § 8, 9, можно получить также для фазовых ограничений, заданных в произвольны момент времени. Условие (1.59) можно снять, применив штрафные функции. При этом легло показать сходимость конечно-разностного метода, т. е. правомерность их применения.

Как следует из результатов исследований, изложенных в настоящей главе, оценка близости по функционалу для простейшего разностного аналога имеет порядок не выше порядка h. Вообще говоря, порядок этой оценки нельзя увеличить, какова бы ни была разностная схема, в связи с наличием у оптимального управления точек переключения. Привлечение других разностных аппроксимаций априори вряд ли целесообразно, так как, не увеличивая порядка скорости сходимости, оно усложняет реализацию рассматриваемых в гл. 3 алгоритмов поиска решения разностного аналога, даже в случае двухшаговых разностных схем.

Заметим, наконец, что все оценки и результаты гл. 1 проведены не для решения дискретной задачи, которое само по себе не представляет никакого интереса, а для решения $\{\overline{u}_h(t), \overline{z}_h(t)\}$ непрерывной задачи, реализуемого в непрерывных системах.

ГЛАВА 2

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В этой главе рассматриваются объекты, поведение которых описывается системой интегро-дифференциальных уравнений специального вида, системой интегральных уравнений, системой уравнений в частных производных гиперболического типа (задача Гурса для уравнений Дарбу) и некоторые другие объекты. Рассматриваемые для них задачи оптимального управления представляют собой задачи неклассического вариационного исчисления. Для каждой из них выясняются условия, при которых имеет место сходимость по функционалу решения разностного аналога задачи к решению непрерывной задачи оптимального управления.

Исследование сходимости для рассматриваемых здесь задач может быть осуществлено принципиально по той же схеме, которая была предложена в первой главе. Поэтому мы ограничились установлением лишь основополагающих лемм, с помощью которых без труда можно получить оценки близости по функционалу решений непрерывной и дискретной задач, как это делалось в гл. 1.

При изложении этой главы авторы основывались на работах [13], [16]. При этом сохранены все обозначения, принятые в гл. 1.

§ 1. ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Зачастую будущее состояние управляемого объекта определяется не только параметрами текущего момента, но и его предысторией.

Пусть поведение управляемого объекта описывается системой интегро-дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\dot{z}(t) = g(z(t),\ u(t),\ t) + \int_{t_0}^{t} g^1(z(\tau),\ u(\tau),\ \tau,\ t)\,d\tau,\quad z(t_0) = z^0, \tag{2.1}$$

$$u(t) \in \mathrm{U},\quad t_0 \leqslant t \leqslant T \tag{2.2}$$

Требуется минимизировать

$$f^0(z(T)). \tag{2.3}$$

Заметим, что если функции g, g^1 удовлетворяют равномерному условию Липшица по переменной z с константами L_z, L_z' соответственно, непрерывны по переменной u и являются существенно ограниченными измеримыми функциями по переменным (τ, t), множество U является ограниченным и замкнутым, то величина

$$\sup_{u\in U, t_0\leqslant t\leqslant T} \| g(z^0, u, t)\| = K < \infty, \quad \sup_{u\in U, t_0\leqslant \tau\leqslant t\leqslant T} \| g^1(z^0, u, \tau, t)\| = K' < \infty.$$

Тогда, как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений (см. замечание к § 1), легко показать существование, единственность и непрерывность соответствующей траектории при любом допустимом измеримом управлении.

Как и в гл. 1, в дальнейшем потребуются величины

$$C = \sup_{z\in Z, u\in U, t_0\leqslant t\leqslant T} \| g(z, u, t)\|, \quad C' = \sup_{z\in Z, u\in U, t_0\leqslant \tau\leqslant t\leqslant T} \| g^1(z, u, \tau, t)\|,$$

где $Z = \bigcup_{t=t_0}^{T} S(t)$, а $S(t)$ — область достижимости за время t.

Замечание. Если выполняются указанные выше предположения, то C и C' легко оценить.

Действительно, из уравнения (2.1) следует, что

$$z(t) = z^0 + \int_{t_0}^{t} \left\{ g(z, u, s) + \int_{t_0}^{s} g^1(z, u, \tau, s)\, d\tau \right\} ds,$$

так что с учетом условий Липшица по переменной z для подынтегральных функций имеем

$$\| z(t) - z^0\| \leqslant \int_{t_0}^{t} \left\{ \| g(z, u, s) - g(z^0, u, s)\| + \int_{t_0}^{s} \| g^1(z, u, \tau, s) - g^1(z^0, u, \tau, s)\| d\tau \right\} ds + \int_{t_0}^{t} \left\| g(z^0, u, s) + \int_{t_0}^{s} g^1(z^0, u, \tau, s)\, d\tau \right\| ds \leqslant$$

$$\leqslant L_z \int_{t_0}^{t} \| z(s) - z^0\| ds + L_z' \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} \| z(\tau) - z^0\| d\tau ds + K(t - t_0) + \frac{1}{2} K'(t - t_0)^2.$$

Вводя функции $\alpha(t) = \int_{t_0}^{t} \| z(s) - z^0\| ds$, $\beta(t) = \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\, ds$, сведем последнее неравенство к системе дифференциальных неравенств

$$\begin{cases} \dot\alpha(t) \leqslant L_z \alpha(t) + L_z'\beta(t) + K(t - t_0) + \frac{1}{2} K'(t - t_0)^2, \\ \dot\beta(t) = \alpha(t), \quad \alpha(t_0) = \beta(t_0) = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы неравенств приводит к следующей оценке:

$$\|z - z^0\| = \max_{t_0 \leqslant t \leqslant T} \|z(t) - z^0\| \leqslant \frac{K}{\sqrt{L_z^2 + 4L_z'}} \left(e^{\lambda_1(T-t_0)} - e^{\lambda_2(T-t_0)}\right) +$$

$$+ \frac{K'}{\sqrt{L_z^2 + 4L_z'}} \left(\frac{e^{\lambda_1(T-t_0)} - 1}{\lambda_1} - \frac{e^{\lambda_2(T-t_0)} - 1}{\lambda_2}\right) = M,$$

где $\lambda_1 = \dfrac{L_z + \sqrt{L_z^2 + 4L_z'}}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{L_z - \sqrt{L_z^2 + 4L_z'}}{2}$. Следовательно,

$$C \leqslant K + L_z M, \quad C' \leqslant K' + L_z' M.$$

Разностный аналог задачи (2.1) — (2.3) выглядит так (ради экономии записи принимаем $t_0 = 0$):

$$\min f^0(x(Nh)),$$

$$x((k+1)h) = x(kh) + h\Bigg[g(x(kh),\ u(kh),\ kh) +$$

$$+ h\sum_{j=0}^{k} g^1(x(jh),\ u(jh),\ jh,\ kh)\Bigg], \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$x(0) = z^0, \tag{2.4}$$

$$u(kh) \in \mathrm{U}, \quad k = 0,\ h,\ \ldots,\ (N-1)h.$$

Лемма 1. Пусть управление $u(t)$ интегрируемо по Риману, в области $R_n \times \mathrm{U} \times [0, T]$ выполнено равномерное условие Липшица

$$\|g(z', u', t') - g(z'', u'', t'')\| \leqslant L_z\|z' - z''\| + L_u\|u' - u''\| + $$
$$+ L_t|t' - t''|, \tag{2.5}$$

а в области $R_n \times \mathrm{U} \times [0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T]$ — равномерное условие Липшица

$$\|g^1(z', u'\ \tau'\ t') - g^1(z'', u'', \tau'', t'')\| \leqslant L_z'\|z' - z''\| + L_u'\|u' - u''\| +$$
$$+ L_\tau'|\tau' - \tau''| + L_t'|t' - t''|. \tag{2.6}$$

Тогда

$$\Delta_h \leqslant \frac{1}{2}\left(C + TC' + \frac{L_t + C' + (L_\tau' + L_t')T}{L_z + L_z'T}\right)\left(e^{(L_z + L_z'T)T} - 1\right)h +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} I_{u,h}(k)\left\{\frac{L_u'\left(e^{(L_z + L_z'T)T} - 1\right)}{L_z + L_z'T} + L_u\left(1 + (L_z + L_z'T)h\right)^{N-k}\right\}, \tag{2.7}$$

где $\Delta_h = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant N} \Delta_h(k)$, $\Delta_h(k) = \max\limits_{(k-1)h \leqslant t \leqslant kh} \|z(t) - x(t)\|$,

$$I_{u,h}(k) = \int_{(k-1)h}^{kh} \|u(s) - u((k-1)h)\|\,ds, \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Доказательство. Для $kh \leqslant t \leqslant (k+1)h$ из уравнения (2.1) имеем

$$z(t) = z(kh) + \int_{kh}^{t} \Big\{ g(z(s),\ u(s),\ s) + \sum_{j=0}^{k} \int_{jh}^{(j+1)h} g^1(z(\tau),\ u(\tau),$$

$$\tau,\ s)\, d\tau - \int_{s}^{(k+1)h} g^1(z(\tau),\ u(\tau),\ \tau,\ s)\, d\tau \Big\} ds,$$

а из выражения (2.4)

$$x(t) = x(kh) + \int_{kh}^{t} \Big\{ g(x(kh),\ u(kh),\ kh) + \sum_{j=0}^{k} \int_{jh}^{(j+1)h} g^1(x(jh),\ u(jh),$$

$$jh,\ kh)\, d\tau \Big\} ds.$$

Тогда с учетом условий (2.5), (2.6) находим

$$\| z(t) - x(t) \| \leqslant \| z(kh) - x(kh) \| + \int_{kh}^{(k+1)h} L_z \| z(s) - x(kh) \| ds +$$

$$+ L_u I_{u,h}(k+1) + \frac{1}{2} L_t h^2 + \int_{kh}^{(k+1)h} \sum_{j=0}^{k} \Big\{ \int_{jh}^{(j+1)h} (L_z' \| z(\tau) - x(jh) \| +$$

$$+ L_t'(s - kh))\, d\tau + L_u' I_{u,h}(j+1) + \frac{1}{2} L_\tau' h^2 \Big\} ds + \frac{1}{2} C' h^2 \leqslant$$

$$\leqslant \| z(kh) - x(kh) \| + \int_{kh}^{(k+1)h} (L_z \| z(s) - x(kh) \| + L_z' \sum_{j=0}^{k} \int_{jh}^{(j+1)h} \| z(\tau) -$$

$$- x(jh) \| d\tau) ds + L_u I_{u,h}(k+1) + h L_u' \sum_{j=0}^{k} I_{u,h}(j+1) + \frac{1}{2} (L_t + C' +$$

$$+ (L_\tau' + L_t') T) h^2.$$

Так как $\| z(s) - x(kh) \| \leqslant \| z(s) - z(kh) \| + \| z(kh) - x(kh) \|$,

$$\| z(\tau) - x(jh) \| \leqslant \| z(\tau) - z(jh) \| + \| z(jh) - x(jh) \|,$$

то можем записать

$$\| z(t) - x(t) \| \leqslant [1 + (L_z + L_z' T) h] \Delta_h(k) + \int_{kh}^{(k+1)h} \Big\{ L_z \| z(s) - z(kh) \| +$$

$$+ L_z' \sum_{j=0}^{k} \int_{jh}^{(j+1)h} \| z(\tau) - z(jh) \| d\tau \Big\} ds + L_u I_{u,h}(k+1) +$$

$$+ h L_u' \sum_{j=0}^{k} I_{u,h}(j+1) + \frac{1}{2} (L_t + C' + (L_\tau' + L_t') T) h^2. \qquad (2.8)$$

Но из уравнения (2.1) следует, что

$$\| z(s) - z(kh) \| \leqslant (C + TC')(s - kh), \quad \| z(\tau) - z(jh) \| \leqslant$$

$$\leqslant (C + TC')(\tau - jh).$$

Следовательно, неравенство (2.8) приводится к виду

$$\Delta_h(k+1) \leqslant [1+(L_z+L_z'T)h]\Delta_h(k)+\frac{1}{2}[(C+TC')(L_z+TL_z')+$$
$$+L_t+C'+(L_\tau'+L_t')T]h^2+L_uI_{u,h}(k+1)+hL_u'\sum_{j=0}^{k}I_{u,h}(j+1).$$

Решая теперь эти рекуррентные неравенства с учетом того, что $\Delta_h(0)=0$, получаем

$$\Delta_h \leqslant (1+(L_z+L_z'T)h)^N\Delta_h(0)+\sum_{k=1}^{N}(1+(L_z+L_z'T)h)^{N-k}\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{2}[(C+TC')(L_z+TL_z')+L_t+C'+(L_\tau'+L_t')T]h^2+\right.$$
$$\left.+L_uI_{u,h}(k)+hL_u'\sum_{j=1}^{k}I_{u,h}(j)\right\} \leqslant \frac{1}{2}\left(C+TC'+\right.$$
$$\left.+\frac{L_t+C'+(L_\tau'+L_t')T}{L_z+L_z'T}\right)[(1+(L_z+L_z'T)h)^N-1]h+$$
$$+\sum_{k=1}^{N}(L_uI_{u,h}(k)+hL_u'\sum_{j=1}^{N}I_{u,h}(j))(1+(L_z+L_z'T)h)^{N-k}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left(C+TC'+\frac{L_t+C'+(L_\tau'+L_t')T}{L_z+L_z'T}\right)(e^{(L_z+L_z'T)T}-1)h+$$
$$+\sum_{k=1}^{N}I_{u,h}(k)\left\{\frac{L_u'(e^{(L_z+L_z'T\,T}-1)}{L_z+L_z'T}+L_u(1+(L_z+L_z'T)h)^{N-k}\right\},$$

что и требовалось показать.

Основываясь на этом заключении леммы, без труда можно получить оценки, аналогичные оценкам гл. 1. Поэтому все выводы о сходимости, полученные в гл. 1, остаются справедливыми для рассматриваемой здесь задачи. При этом функция $g^1(z, u, \tau, t)$ должна быть интегрируема в смысле Римана и ограничена по переменным (τ, t) в области $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$.

§ 2. ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Рассмотрим отдельно два типа задач управления — с интегральными уравнениями Фредгольма первого рода и с интегральными уравнениями Фредгольма второго рода. Это вызвано различием условий сходимости, а также разностных схем этих задач.

С целью простоты записи мы рассматриваем в задаче одну независимую переменную состояния и управления. Все выводы этого параграфа останутся в силе также для случая многомерного параметра τ.

1. Остановимся сначала на объектах управления, поведение которых описывается системой интегральных уравнений первого рода. Задача управления ставится так:

$$\min f^0(z(T)), \tag{2.9}$$

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} g(z(\tau), u(\tau), \tau, t)\,d\tau + z^*(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \quad z(t_0) = z^0 = z^*(t_0), \tag{2.10}$$

$$u(t) \in \mathrm{U}. \tag{2.11}$$

Ясно, что интегральный функционал сводится к виду (2.9) с сохранением вида уравнений (2.10).

Будем предполагать, что функция g по переменной z удовлетворяет равномерному условию Липшица с константой L_z, непрерывна по переменным u и t, измерима и существенно ограничена по переменной τ, функция $z^*(t)$ непрерывна, множество U ограничено и замкнуто. Тогда

$$\sup_{u \in \mathrm{U}, t_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T} \| g(z^0, u, \tau, t) \| = K < \infty.$$

Эти условия обеспечивают существование, единственность и непрерывность траектории, соответствующей произвольному измеримому допустимому управлению.

Пусть

$$C = \sup_{z \in \mathrm{Z}, u \in \mathrm{U}, t_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T} \| g(z, u, \tau, t) \|,$$

где множество Z имеет тот же смысл, что и в § 1.

Замечание. Константа C легко оценивается. Действительно, из интегрального уравнения (2.10) с учетом сделанных предположений вытекает

$$\| z(t) - z^0 \| \leqslant L_z \int_{t_0}^{t} \| z(\tau) - z^0 \| d\tau + K(t - t_0) + \| z^*(t) - z^*(t_0) \|.$$

Обозначив $\max\limits_{t_0 \leqslant t \leqslant T} \| z^*(t) - z^*(t_0) \| = \Omega$, из этого неравенства находим

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \| z(t) - z^0 \| \leqslant \frac{K}{L_z} \left(e^{L_z(T - t_0)} - 1\right) + \Omega e^{L_z(T - t_0)},$$

на основании чего легко заключить, что

$$C \leqslant (K + L_z \Omega)\, e^{L_z(T - t_0)}.$$

Запишем разностный аналог задачи (2.9) — (2.11), принимая, как и ранее, ради удобства записи $t_0 = 0$:

$$\min f^0(x(Nh)),$$

$$x((k+1)h) = h \sum_{j=0}^{k} g(x(jh), u(jh), jh, (k+1)h) + z^*((k+1)h),$$

$$k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1,\quad x(0) = z^0, \tag{2.12}$$
$$u(kh) \in \mathrm{U},\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1.$$

Лемма 2. Пусть управление $u(t)$ интегрируемо по Риману, в области $R_n \times \mathrm{U} \times [0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T]$ выполнено равномерное условие Липшица:

$$\|g(z',\ u',\ \tau',\ t') - g(z'',\ u'',\ \tau'',\ t'')\| \leqslant L_z\|z' - z''\| +$$
$$+ L_u\|u' - u''\| + L_\tau|\tau' - \tau''| + L_t|t' - t''|. \tag{2.13}$$

Тогда

$$\Delta_h \leqslant e^{L_z T}\left\{\frac{T}{2}((C + L_t T)L_z + L_\tau)h + L_z T\varepsilon_{z^*}(h) + L_u\sigma_u(h)\right\},$$

где

$$\Delta_h = \max_{k=0,1,\ldots,N} \Delta_h(k),\quad \Delta_h(k) = \|z(kh) - x(kh)\|;$$

$$\dot{I}_{u,h}(k) = \int\limits_{(k-1)h}^{kh} \|u(s) - u((k-1)h)\|\,ds,$$

$k = 1,\ \ldots,\ N$, $\sigma_u(h) = \sum\limits_{k=1}^{N} \dot{I}_{u,h}(k)$; $\varepsilon_{z^*}(h)$ — максимальное из колебаний функции $z^*(t)$ (в смысле выбранной нормы) на отрезках $i_k = \{(k-1)h \leqslant t \leqslant kh\}$, $k = 1,\ \ldots,\ N$.

Доказательство. Из уравнений (2.10), (2.12) получаем соответственно

$$z(k+1)h = \sum_{j=0}^{k} \int\limits_{jh}^{(j+1)h} g(z,\ u,\ \tau,\ (k+1)h)\,d\tau + z^*((k+1)h),$$

$$x((k+1)h) = \sum_{j=0}^{k} \int\limits_{jh}^{(j+1)h} g(x(jh),\ u(jh),\ jh,\ (k+1)h)\,d\tau + z^*((k+1)h)$$

Использование условия (2.13) приводит к оценке

$$\Delta_h(k+1) \leqslant \sum_{j=0}^{k}\left\{L_z \int\limits_{jh}^{(j+1)h} \|z(\tau) - x(jh)\|\,d\tau + L_u\dot{I}_{u,h}(j+1) +\right.$$
$$\left.+ \frac{1}{2}L_\tau h^2\right\} \leqslant L_z h \sum_{j=0}^{k} \Delta_h(j) + \sum_{j=0}^{k}\left\{L_z \int\limits_{jh}^{(j+1)h} \|z(\tau) - z(jh)\|\,d\tau +\right.$$
$$\left.+ L_u\dot{I}_{u,h}(j+1) + \frac{1}{2}L_\tau h^2\right\}.$$

Но из интегрального уравнения (2.10) вытекает с учетом упомянутого условия и принятых обозначений, что

$$\|z(\tau) - z(jh)\| \leqslant \int\limits_{jh}^{\tau} \|g(z,\ u,\ \tau',\ \tau)\|\,d\tau' + \int\limits_{0}^{jh} \|g(z,\ u,\ \tau',\ \tau) -$$
$$- g(z,\ u,\ \tau',\ jh)\|\,d\tau' + \|z^*(\tau) - z^*(jh)\| \leqslant (C + L_t T)(\tau - jh) + \varepsilon_{z^*}(h).$$

Поэтому

$$\Delta_h(k+1) \leqslant L_z h \sum_{j=0}^{k} \Delta_h(j) + \sum_{j=0}^{k} \left\{ \frac{1}{2}((C + L_t T) L_z + L_\tau) h^2 + \right.$$

$$\left. + L_z \varepsilon_{z^*}(h) h + L_u \dot{I}_{u,h}(j+1) \right\} \leqslant L_z h \sum_{j=0}^{k} \Delta_h(j) + \frac{T}{2}((C + L_t T) L_z +$$

$$+ L_\tau) h + L_z T \varepsilon_{z^*}(h) + L_u \sigma_u(h) = L_z h \sum_{j=0}^{k} \Delta_h(j) + \omega(h). \quad (2.14)$$

Вводя новую переменную $Q_h(k) = \sum_{j=0}^{k} \Delta_h(j)$, перепишем последнее соотношение следующим образом:

$$Q_h(k+1) - Q_h(k) \leqslant L_z h Q_h(k) + \omega(h), \quad Q_h(k+1) \leqslant (1 + L_z h) Q_h(k) +$$

$$+ \omega(h), \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Решение этого рекуррентного неравенства с учетом того, что $Q_h(0) = \Delta_h(0) = 0$, дает

$$Q_h(N) \leqslant \sum_{k=1}^{N} (1 + L_z h)^{N-k} \omega(h) \leqslant \frac{e^{L_z T} - 1}{L_z h} \omega(h).$$

Тогда после подстановки полученной оценки в выражение (2.14) получаем

$$\Delta_h \leqslant e^{L_z T} \left\{ \frac{T}{2}((C + L_t T) L_z + L_\tau) h + L_z T \varepsilon_{z^*}(h) + L_u \sigma_u(h) \right\},$$

что и требовалось показать.

Легко увидеть, что в случае, если функция $z^*(t)$ удовлетворяет условию Липшица, имеем

$$\Delta_h \leqslant e^{L_z T} \left\{ \frac{T}{2}((C + L_t T + L^{(z^*)}) L_z + L_\tau) h + L_u \sigma_u(h) \right\}.$$

Используя эту лемму, легко получить оценки, аналогичные полученным в гл. 1. При этом дополнительное условие, касающееся переменных τ и t, состоит в предположении непрерывности по t функции

$$\dot{I}(z, u, t) = \int_0^t g(z, u, \tau, t) \, d\tau,$$

где интеграл является собственным интегралом в смысле Римана.

2. Пусть в предыдущей задаче вместо уравнения (2.10) имеется уравнение вида

$$z(t) = \int_{t_0}^{T} g(z(\tau), u(\tau), \tau, t) \, d\tau + z^*(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \quad u \in \mathrm{U}. \quad (2.15)$$

Множество U, как и ранее, ограничено и замкнуто.

Пусть решение этого уравнения существует, единственно и непрерывно на отрезке $[t_0, T]$ при любом допустимом управлении. Чтобы последнее предположение выполнялось, следует считать функцию $z^*(t)$ и интеграл $I(z, u, t) = \int_0^T g(z, u, \tau, t)\, d\tau$ непрерывными функциями времени. Будем предполагать, что интеграл является собственным интегралом в смысле Римана, оптимальное управление задачи является интегрируемым в том же смысле, а функция $g(z, u, \tau, t)$ непрерывна по переменным z и u. Кроме того, саму задачу (2.15) следует считать корректной, т. е. решение уравнения (2.15) является устойчивым по отношению к малым изменениям функции $z^*(t)$.

Запишем разностную аппроксимацию уравнения (2.15):

$$x(kh) = h\sum_{j=0}^{N-1} g(x(jh), u(jh), jh, kh) + z^*(kh), \qquad (2.16)$$

$$k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Сходимость по функционалу вытекает из следующих соображений. Из уравнения (2.15) имеем

$$z(kh) = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{jh}^{(j+1)h} g(z(\tau), u(\tau), \tau, kh)\, d\tau + z^*(kh),$$

$$k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Применяя теперь теорему о среднем значении, получим

$$z(kh) = h\sum_{j=0}^{N-1} g(z(\tau^*_{jk}), u(\tau^*_{jk}), \tau^*_{jk}, kh) + z^*(kh),$$

$$k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

где τ^*_{jk} — некоторая точка из промежутка $[jh, (j+1)h]$.

Очевидно, что

$$z(kh) = h\sum_{j=0}^{N-1} g(z(jh), u(jh), jh, kh) + z^*(kh) + \eta_k, \qquad (2.17)$$

$$k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

где $\eta_k = h\sum_{j=0}^{N-1} \{g(z(\tau^*_{jk}), u(\tau^*_{jk}), \tau^*_{jk}, kh) - g(z(jh), u(jh), jh, kh)\}$.

Величина $\|\eta_k\| \to 0$ при $h \to 0$ в силу сделанных предположений как разность римановых сумм одного и того же интеграла. С учетом этого обстоятельства, соотношений (2.16) и (2.17), а также существования единственности, непрерывности решения исходной задачи и ее корректности заключаем, что

$$\|z(kh) - x(kh)\| \underset{h\to 0}{\to} 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Факт сходимости по функционалу является простым следствием полученного результата.

Таким образом, для объектов управления с интегральными уравнениями Фредгольма второго рода уже не имеют места обобщения факта сходимости на случай оптимальных управлений, являющихся измеримыми функциями либо их последовательностями, справедливые для объектов управления с интегральными уравнениями Фредгольма первого рода.

В частности, для линейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} K(t, \tau, u(\tau))\, z(\tau)\, d\tau + z^*(t)$$

сходимость в указанном случае имеет место, если ядро $K(t, \tau, u)$ непрерывно в целом (интеграл при этом понимается в собственно римановом смысле) и непрерывно по переменной u, а функция $z^*(t)$ непрерывна.

Для линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$z(t) = \int_{t_0}^{T} K(t, \tau, u(\tau))\, z(\tau)\, d\tau + z^*(t)$$

в случае существования, единственности его решения, корректности задачи и выполнения вышеуказанных условий сходимость обеспечивается лишь для интегрируемых по Риману оптимальных управлений.

Область допустимых управлений при этом предполагается ограниченной и замкнутой.

§ 3. ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ С УРАВНЕНИЯМИ ДАРБУ

Пусть поведение объекта описывается системой уравнений Дарбу вида (задача Гурса)*

$$\begin{cases} z_{xy} = g(z, u, x, y); \quad z(x, y_0) = \alpha(x), \quad x_0 \leqslant x \leqslant X; \\ z(x_0, y) = \beta(y), \quad y_0 \leqslant y \leqslant Y; \quad \alpha(x_0) = \beta(y_0) = z^0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Требуется выбрать такое управление

$$u(x, y) \in \mathrm{U}, \quad x_0 \leqslant x \leqslant X, \quad y_0 \leqslant y \leqslant Y, \tag{2.19}$$

которое бы минимизировало следующий функционал:

$$\Phi(u(x, y)) = f(0)(z(X, Y)) + \int_{x_0}^{X} f(1)(z(x, Y))\, dx + \int_{y_0}^{Y} f(2)(z(X, y))\, dy. \tag{2.20}$$

* Строго говоря, уравнение понимается в смысле $d_{xy} z = g(z, u, x, y)\, dxdy$.

Здесь $z = \{z_1, \ldots, z_n\}$, $u = \{u_1, \ldots, u_m\}$. Заметим, что функционал

$$\Phi + \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} f_3(z(x, y))\,dxdy,$$

как и интегральные функционалы в гл. 1 (см. § 1), сводится к функционалу вида (2.20) введением дополнительной переменной с сохранением вида уравнений (2.18). К задаче Гурса приводит изучение сорбции и десорбции газов, сушки и других процессов.

Будем предполагать, что краевые функции $\alpha(x)$, $\beta(y)$ интегрируемы по Риману в собственном смысле, функция g удовлетворяет условию Липшица по переменной z с константой L_z, непрерывна по переменной u, а также измерима и существенно ограничена по переменным x и y. Множество U допустимых управлений предполагается ограниченным и замкнутым. Тогда

$$\sup_{u\in \mathrm{U}, x_0\leqslant x\leqslant X, y_0\leqslant y\leqslant Y} \|g(z^0, u, x, y)\| = K < \infty.$$

При таких условиях всегда можно показать существование, единственность и ограниченность «траектории», соответствующей произвольному измеримому управлению.

Пусть

$$C = \sup_{z\in \mathrm{Z}; u\in \mathrm{U}; (x,y)\in \Pi} \|g(z, u, x, y)\|,$$

где $\mathrm{Z} = \bigcup_{(x,y)\in\Pi} S(x, y)$, $S(x, y)$ — область достижимости в точке (x, y), а Π — прямоугольник $x_0 \leqslant x \leqslant X$, $y_0 \leqslant y \leqslant Y$.

Замечание. Величину C легко оценить. В самом деле, согласно задаче (2.18)

$$z(x,y) = z^0 + \alpha(x) - \alpha(x_0) + \beta(y) - \beta(y_0) + \int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x} g(z, u, x', y')\,dx'dy'.$$

Полагая $\sup_{x_0\leqslant x\leqslant X} \|\alpha(x) - \alpha(x_0)\| = m_1$, $\sup_{y_0\leqslant y\leqslant Y} \|\beta(y) - \beta(y_0)\| = m_2$ и учитывая условие Липшица, получим

$$\|z(x, y) - z^0\| \leqslant L_z \int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x} \|z(x', y') - z^0\|\,dx'dy' + K(x - x_0)(y - y_0) + m_1 + m_2.$$

Введя функцию

$$J(x, y) = \int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x} \|z(x', y') - z^0\|\,dx'dy',$$

перепишем предыдущее неравенство в виде

$$J_{xy}(x, y) \leqslant L_z J(x, y) + K(x - x_0)(y - y_0) + m_1 + m_2.$$

Умножая теперь это неравенство на $e^{-\sqrt{L_z}(x+y)}$ и интегрируя его в пределах (x_0, x) и (y_0, y), после интегрирования по частям легко получим оценку для величины $J(x, y)$, а вместе с нею и оценку

$$\|z(x, y) - z^0\| \leqslant L_z e^{\sqrt{L_z}(x+y)} \int_{y_0}^{y} \int_{x_0}^{x} e^{-\sqrt{L_z}(x'+y')} (K(x'-x_0)(y'-y_0) + m_1 + m_2)\, dx'dy' + K(x-x_0)(y-y_0) + m_1 + m_2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K}{L_z} (e^{\sqrt{L_z}(X-x_0)} - 1 - \sqrt{L_z}(X-x_0))(e^{\sqrt{L_z}(Y-y_0)} - 1 - \sqrt{L_z}(Y-y_0)) + (m_1+m_2)(e^{\sqrt{L_z}(X-x_0)} - 1)(e^{\sqrt{L_z}(Y-y_0)} - 1) + K(x-x_0)(y-y_0) + m_1 + m_2 = M.$$

Таким образом,

$$C \leqslant K + L_z M.$$

Запишем разностный аналог задачи (2.18) — (2.20) (в целях краткости записи, как и ранее, полагаем $x_0 = y_0 = 0$):

$$\min \left\{ f^{(0)}(h_{p,q}) + \Delta x \sum_{i=0}^{p-1} f^{(1)}(h_{i,q}) + \Delta y \sum_{j=0}^{q-1} f^{(2)}(h_{p,j}) \right\}, \quad p\Delta x = X, \; q\Delta y = Y,$$

$$\begin{cases} h_{i+1,j+1} - h_{i+1,j} - h_{i,j+1} + h_{i,j} = \Delta x \Delta y\, g(h_{i,j}, u_{i,j}, i\Delta x, j\Delta y), \\ i = 0, 1, \ldots, p-1, \; j = 0, 1, \ldots, q-1; \; h_{i,0} = \alpha(i\Delta x), \\ i = 0, 1, \ldots, p; \quad h_{0,j} = \beta(j\Delta y), \; j = 0, 1, \ldots, q, \end{cases} \qquad (2.21)$$

$$u_{i,j} \in \mathrm{U}, \quad i = 0, 1, \ldots, p-1, \quad j = 0, 1, \ldots, q-1, \qquad (2.22)$$

где $h_{i,j} = h(i\Delta x, j\Delta y)$, $u_{i,j} = u(i\Delta x, j\Delta y)$.

Доопределим дискретную функцию $h_{i,j}$ до непрерывной кусочно-линейной функции $h(x, y)$.

Лемма 3. Пусть управление $u(x, y)$ и функции $\alpha(x)$, $\beta(y)$ интегрируемы по Риману, в области $R_n \times \mathrm{U} \times \Pi$ выполнено равномерное условие Липшица

$$\|g(z', u', x', y') - g(z'', u'', x'', y'')\| \leqslant L_z \|z' - z''\| + L_u \|u' - u''\| + L_x |x' - x''| + L_y |y' - y''|. \qquad (2.23)$$

Тогда имеет место следующая оценка:

$$\delta(\Delta x, \Delta y) \leqslant \frac{1}{2} (e^{2L_z XY} - 1)[(CY + L_{x,z})\Delta x + (CX + L_{y/z})\Delta y] + e^{2L_z XY}[2L_z(Y\sigma_\alpha(\Delta x) + X\sigma_\beta(\Delta y)) + L_u \sigma_u(\Delta x, \Delta y)], \qquad (2.24)$$

где $\delta(\Delta x, \Delta y) = \delta_{\Delta x, \Delta y}(p, q)$, $\delta_{\Delta x, \Delta y}(i, j) = \max\limits_{s=\overline{0,i};\, t=\overline{0,j}} \|z_{s,t} - h_{s,t}\|$;

$$I_{u,\Delta x,\Delta y}(i, j) = \int_{(j-1)\Delta y}^{j\Delta y} \int_{(i-1)\Delta x}^{i\Delta x} \|u(x, y) - u_{i-1,j-1}\|\, dxdy, \quad \sigma_{u,\Delta x,\Delta y}(i, j) = \sum_{t=1}^{j} \sum_{s=1}^{i} I_{u,\Delta x,\Delta y}(s, t), \quad \sigma_u(\Delta x, \Delta y) = \sigma_{u,\Delta x,\Delta y}(p, q); \quad I_{\alpha,\Delta x}(i) =$$

$$= \int\limits_{(i-1)\Delta x}^{i\Delta x} \| \alpha(x) - \alpha_{i-1} \| dx, \; \dot{I}_{\beta,\Delta y}(j) = \int\limits_{(j-1)\Delta y}^{j\Delta y} \| \beta(y) - \beta_{j-1} \| dy, \; \sigma_\alpha(\Delta x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} I_{\alpha,\Delta x}(i), \; \sigma_\beta(\Delta y) = \sum_{j=1}^{q} \dot{I}_{\beta,\Delta y}(j).$$

Доказательство. Для любой точки (x, y) элементарного прямоугольника $\pi_{i+1,j+1} = \{i\Delta x \leqslant x \leqslant (i+1)\Delta x, j\Delta y \leqslant y \leqslant (j+1)\Delta y\}$ имеем согласно выражениям (2.18) и (2.21) соответственно

$$z(x, y) = z_{i,j} + \int\limits_{i\Delta x}^{x} z_x^* (x', j\Delta y)\, dx' + \int\limits_{j\Delta y}^{y} z_y(i\Delta x, y')\, dy' +$$

$$+ \int\limits_{j\Delta y}^{y} \int\limits_{i\Delta x}^{x} g(z, u, x', y')\, dx' dy', \tag{2.25}$$

$$h(x, y) = h_{i,j} + \int\limits_{i\Delta x}^{x} h_x(x', j\Delta y)\, dx' + \int\limits_{j\Delta y}^{y} h_y(i\Delta x, y')\, dy' +$$

$$+ \int\limits_{j\Delta y}^{y} \int\limits_{i\Delta x}^{x} g(h_{i,j}, u_{i,j}, i\Delta x, j\Delta y)\, dx' dy'. \tag{2.26}$$

Из аналогичных соотношений, записанных для смежных прямоугольников $\pi_{i+1,j}$, $\pi_{i,j+1}$, путем дифференцирования получаются еще такие соотношения при $i\Delta x \leqslant x' \leqslant (i+1)\Delta x$:

$$z_x(x', j\Delta y) = \alpha_x(x') + \sum_{t=0}^{j-1} \int\limits_{t\Delta y}^{(t+1)\Delta y} g(z, u, x', y')\, dy', \tag{2.27}$$

$$h_x(x', j\Delta y) = \alpha_x^* + \sum_{t=0}^{j-1} \int\limits_{t\Delta y}^{(t+1)\Delta y} g(h_{i,t}, u_{i,t}, i\Delta x, t\Delta y)\, dy', \tag{2.28}$$

а для $j\Delta y \leqslant y' \leqslant (j+1)\Delta y$ — такие:

$$z_y(i\Delta x, y') = \beta_y(y') + \sum_{s=0}^{i-1} \int\limits_{s\Delta x}^{(s+1)\Delta x} g(z, u, x', y')\, dx', \tag{2.29}$$

$$h_y(i\Delta x, y') = \beta_y^* + \sum_{s=0}^{i-1} \int\limits_{s\Delta x}^{(s+1)\Delta x} g(h_{s,j}, u_{s,j}, s\Delta x, j\Delta y)\, dx', \tag{2.30}$$

где $\alpha_x^* = \dfrac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{\Delta x}$, $\beta_y^* = \dfrac{\beta_{j+1} - \beta_j}{\Delta y}$.

Тогда из выражений (2.25) и (2.26) с учетом соотношений (2.23) и (2.27) — (2.30) находим

$$\delta_{\Delta x,\Delta y}(i+1, j+1) \leqslant \delta_{\Delta x,\Delta y}(i, j) +$$

---

* Выражения типа $f_x(x)\, dx$ здесь понимаются в смысле $df(x)$.

$$+\sum_{t=0}^{j-1}\int\limits_{t\Delta y}^{(t+1)\Delta y}\int\limits_{i\Delta x}^{(i+1)\Delta x}\|g(z, u, x', y') - g(h_{i,t}, u_{i,t}, i\Delta x, t\Delta y)\|\,dx'dy' +$$

$$+\sum_{s=0}^{i-1}\int\limits_{j\Delta y}^{(j+1)\Delta y}\int\limits_{s\Delta x}^{(s+1)\Delta x}\|g(z, u, x', y') - g(h_{s,j}, u_{s,j}, s\Delta x, j\Delta y)\|\,dx'dy' +$$

$$+\int\limits_{j\Delta y}^{(j+1)\Delta y}\int\limits_{i\Delta x}^{(i+1)\Delta x}\|g(z, u, x', y') - g(h_{i,j}, u_{i,j}, i\Delta x, j\Delta y)\|\,dx'dy' \leqslant$$

$$\leqslant \delta_{\Delta x,\Delta y}(i, j) + \frac{1}{2}(i + j + 1)\,\Delta x\Delta y\,(L_x\Delta x + L_y\Delta y) +$$

$$+ L_u(\sigma_{u,\Delta x,\Delta y}(i + 1, j + 1) - \sigma_{u,\Delta x,\Delta y}(i, j)) +$$

$$+ L_z\left\{\sum_{t=0}^{j-1}\int\limits_{t\Delta y}^{(t+1)\Delta y}\int\limits_{i\Delta x}^{(i+1)\Delta x}\|z(x', y') - h_{i,t}\|\,dx'dy' +\right.$$

$$\left.+\sum_{s=0}^{i}\int\limits_{j\Delta y}^{(j+1)\Delta y}\int\limits_{s\Delta x}^{(s+1)\Delta x}\|z(x', y') - h_{s,j}\|\,dx'dy'\right\}.$$

Воспользовавшись теперь неравенством

$$\|z(x', y') - h_{i,j}\| \leqslant \|z(x', y') - z_{i,j}\| + \|z_{i,j} - h_{i,j}\|,$$

получим

$$\delta_{\Delta x,\Delta y}(i + 1, j + 1) \leqslant (1 + L_z(i + j)\,\Delta x\Delta y)\,\delta_{\Delta x,\Delta y}(i, j) +$$

$$+ \frac{1}{2}(i + j + 1)\,\Delta x\Delta y\,(L_x\Delta x + L_y\Delta y) +$$

$$+ L_u(\sigma_{u,\Delta x,\Delta y}(i + 1, j + 1) - \sigma_{u,\Delta x,\Delta y}(i, j)) +$$

$$+ L_z\left\{\sum_{t=0}^{j-1}\int\limits_{t\Delta y}^{(t+1)\Delta y}\int\limits_{i\Delta x}^{(i+1)\Delta x}\|z - z_{i,t}\|\,dx'dy' +\right.$$

$$\left.+\sum_{s=0}^{i}\int\limits_{j\Delta y}^{(j+1)\Delta y}\int\limits_{s\Delta x}^{(s+1)\Delta x}\|z - z_{s,j}\|\,dx'dy'\right\}. \qquad (2.31)$$

Далее из уравнения (2.25) с использованием соотношений (2.27) и (2.29) получаем

$$\|z(x', y') - z_{i,j}\| \leqslant \|\alpha(x') - \alpha_i\| + \|\beta(y') - \beta_j\| + C(Y(x' - i\Delta x) +$$
$$+ X(y' - j\Delta y)).$$

Тогда для членов, стоящих в фигурных скобках неравенства (2.31), справедливы оценки

$$\sum_{t=0}^{j-1}\int\limits_{t\Delta y}^{(t+1)\Delta y}\int\limits_{i\Delta x}^{(i+1)\Delta x}\|z - z_{i,t}\|\,dx'dy' \leqslant \frac{1}{2}CY\Delta x\,(Y\Delta x + X\Delta y) +$$

$$+ Y\dot{I}_{\alpha,\Delta x}(i + 1) + \Delta x\sigma_\beta(\Delta y),$$

$$\sum_{s=0}^{i} \int_{j\Delta y}^{(j+1)\Delta y} \int_{s\Delta x}^{(s+1)\Delta x} \| z - z_{s,j} \| dx'dy' \leqslant \frac{1}{2} CX\Delta y (Y\Delta x + X\Delta y) +$$

$$+ XI_{\beta, \Delta y}(j+1) + \Delta y \sigma_\alpha (\Delta x),$$

так что

$$\delta_{\Delta x, \Delta y}(i+1, j+1) \leqslant (1 + L_z (X\Delta y + Y\Delta x)) \delta_{\Delta x, \Delta y}(i, j) +$$

$$+ L_z (Y\dot{I}_{\alpha, \Delta x}(i+1) + XI_{\beta, \Delta y}(j+1)) + L_u (\sigma_{u, \Delta x, \Delta y}(i+1, j+1) -$$

$$- \sigma_{u, \Delta x, \Delta y}(i, j)) + L_z (\sigma_\alpha (\Delta x) \Delta y + \sigma_\beta (\Delta y) \Delta x) +$$

$$+ \frac{1}{2} (X\Delta y + Y\Delta x) [(L_z CY + L_x) \Delta x + (L_z CX + L_y) \Delta y].$$

Нетрудно показать, что из этих рекуррентных соотношений вытекает окончательно

$$\sigma(\Delta x, \Delta y) \leqslant \Big\{ \frac{1}{2} (X\Delta y + Y\Delta x) [(L_z CY + L_x) \Delta x + (L_z CX + L_y) \Delta y] +$$

$$+ L_z [\sigma_\alpha (\Delta x) \Delta y + \sigma_\beta (\Delta y) \Delta x] \Big\} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\min(p,q)} \left(1 + L_z XY \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\right)^{\min(p,q)-k} +$$

$$+ \left(1 + L_z XY \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\right)^{\min(p,q)} \times$$

$$\times \left[L_z \left(Y \sum_{i=1}^{p} I_{\alpha, \Delta x}(i) + X \sum_{j=1}^{q} \dot{I}_{\beta, \Delta y}(j) \right) + L_u \sigma_{u, \Delta x, \Delta y}(p, q) \right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} (e^{2L_z XY} - 1) [(CY + L_{x/z}) \Delta x + (CX + L_{y/z}) \Delta y] +$$

$$+ e^{2L_z XY} [2L_z (\sigma_\alpha (\Delta x) Y + \sigma_\beta (\Delta y) X) + L_u \sigma_u (\Delta x, \Delta y)],$$

что и требовалось доказать.

Если краевые функции $\alpha(x)$ и $\beta(y)$ липшицевы с константами $L^{(\alpha)}$ и $L^{(\beta)}$ соответственно, то полученную оценку можно улучшить следующим образом:

$$\sigma(\Delta x, \Delta y) \leqslant \frac{1}{2} (e^{2L_z XY} - 1) [(L^{(\alpha)} + CY + L_{x/z}) \Delta x +$$

$$+ (L^{(\beta)} + CX + L_{y/z}) \Delta y] + L_u e^{2L_z XY} \sigma_u (\Delta x, \Delta y).$$

Используя найденную в лемме оценку, легко получить те же выводы и обобщения, что и в гл. 1. Знание априорных сведений относительно оптимального управления и краевых функций позволяет выбирать шаги дискретизации Δx и Δy так, чтобы обеспечить заданную точность решения задачи и получить наиболее экономную аппроксимационную сетку. Так как размерность дискретной задачи в пространстве управлений определяется произведением pq и на каждом шаге любого рационального алгоритма ее решения приходится вычислять дискретную «траекторию» в pq узлах сетки, то в качестве критерия ее экономности можно выбрать

$$\min pq = \min \frac{XY}{\Delta x \Delta y}.$$

Как следует из выражения (2.24), оценочная функция близости по функционалу решений непрерывной и дискретной задач имеет обыкновенно линейный вид

$$\varphi(\Delta x, \Delta y) = a\Delta x + b\Delta y.$$

Обозначая, как и в гл. 1, допустимую погрешность в оптимальном значении функции цели исходной непрерывной задачи через ε_0, приходим к задаче

$$\min \frac{XY}{\Delta x \Delta y}, \quad a\Delta x + b\Delta y = \varepsilon_0.$$

Решение этой задачи приводит к следующим величинам шагов дискретизации:

$$\Delta x = \frac{\varepsilon_0}{2a}, \quad \Delta y = \frac{\varepsilon_0}{2b}.$$

В тех случаях, когда из соображений ограниченности памяти ЭВМ и реального времени счета известно посильное количество рабочих узлов сетки $N = \frac{XY}{\Delta x \Delta y}$, оптимальными значениями шагов с учетом соотношения $\Delta y : \Delta x = a : b$ будут

$$\Delta x = \sqrt{\frac{bXY}{aN}}, \quad \Delta y = \sqrt{\frac{aXY}{bN}}.$$

При этом обеспечивается точность по функционалу приближенного решения задачи, равная

$$\varepsilon = 2\sqrt{\frac{abXY}{N}}.$$

Заметим, что, если осуществляется дискретизация как по независимым переменным x, y, так и по переменным состояния $z_1, z_2, \ldots$ $\ldots, z_n$ и управления $u_1, u_2, \ldots, u_m$, должны выполняться помимо указанных условий еще такие:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\|\Delta z\|}{\Delta x} = 0, \quad \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\|\Delta z\|}{\Delta y} = 0, \text{ т. е. } \|\Delta z\| = o(\max\{\Delta x, \Delta y\}),$$

где вектор $\Delta z = \{\Delta z_1, \ldots, \Delta z_n\}$, а Δz_i — величина шага сетки по i-й координате состояния. Заметим также, что в принципе можно ставить задачу поиска оптимальных (в каком-либо смысле) краевых функций $\alpha(x)$ и $\beta(y)$. Однако прямая постановка ее является некорректной вследствие нарушения условия согласованности $\alpha(x_0) = \beta(y_0)$ и нуждается в четком указании согласованного семейства граничных условий.

§ 4. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В задачах математической физики часто в роли управляющих воздействий выступают краевые и начальные условия. В качестве иллюстрации рассмотрим типичный пример такой задачи.

Пусть имеется задача Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta z = z_{xx} + z_{yy} = 0, \quad z|_\Gamma = u(s), \tag{2.32}$$

$$a \leqslant u(s) \leqslant b. \tag{2.33}$$

Требуется среди всех гармонических внутри области G функций $z(x, y)$, удовлетворяющих ограничению (2.33) и непрерывно примыкающих к граничным значениям $u(s)$ в точках непрерывности последних, выбрать такую, которая бы минимизировала следующий функционал:

$$\Phi(u) = \iint_G f(x, y, z(x, y))\, dxdy, \tag{2.34}$$

где функция f непрерывно дифференцируема по z и непрерывна по совокупности переменных (x, y) в области $G \times [a, b]$, G — односвязная ограниченная область с кусочно-гладкой границей Γ. К задачам такого рода приводят задачи стационарного теплового поля, потенциального течения жидкости, электрического поля стационарного тока и зарядов.

Будем предполагать, что оптимальное управление $\bar{u}(s)$ поставленной задачи интегрируемо в смысле Римана и ограничено. Тогда соответствующее решение $\bar{z}(x, y)$ задачи (2.32) существует и единственно. Ограниченность решения задачи Дирихле (2.32), соответствующего любому такому управлению, вытекает из известного принципа максимума для гармонических функций [37].

Теорема 1. Если управление $\bar{u}(s)$ реализует минимум функционала Φ, то функция $\partial\bar{\lambda}/\partial n\,(s) u(s)$ при $u(s) = \bar{u}(s)$ достигает максимума, где $\bar{\lambda}(x, y)$ является решением следующей задачи Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\Delta\bar{\lambda} = -(f_z)_{z=\bar{z}}, \quad \bar{\lambda}|_\Gamma = 0 \tag{2.35}$$

(n — внешняя нормаль).

Доказательство. Дадим управлению $\bar{u}(s)$ произвольное допустимое приращение $\delta u(s)$ и рассмотрим управление $\bar{u}(s) + \varepsilon\delta u(s)$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, которое является допустимым для любого $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Соответствующее ему решение задачи (2.32) обозначим через $\bar{z}(x, y) + \varepsilon\delta z(x, y)$. Ясно, что функция $\delta z(x, y)$ является решением следующей задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta\delta z(x, y) = 0,$$

$$\delta z|_\Gamma = \delta u(s).$$

Учитывая это, а также что функция $\bar{\lambda}(x, y)$ является решением задачи (2.35), по формуле Грина находим

$$0 = \iint_G \bar{\lambda} \cdot \Delta\delta z dx dy = \iint_G \Delta\bar{\lambda} \cdot \delta z dx dy + \int_\Gamma \bar{\lambda} \frac{\partial \delta z}{\partial n} ds - \int_\Gamma \delta z \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial n} ds =$$

$$= -\iint_G \frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_{z=\bar{z}} \delta z dx dy - \int_\Gamma \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial n} \delta u ds.$$

Из этого соотношения и разложения функции $\psi(\varepsilon) = f(x, y, \bar{z} + \varepsilon\delta z)$ в окрестности точки $\varepsilon = 0$ получаем выражение для приращения функционала Φ:

$$\delta\Phi = \Phi(\bar{u} + \varepsilon\delta u) - \Phi(\bar{u}) = -\varepsilon \int_\Gamma \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial n}(s)\, \delta u(s)\, ds + o(\varepsilon),$$

откуда легко вытекает утверждение теоремы.

В том случае, когда вторая производная $f_{zz}(x, y, z)$ ограничена в области $G \times [a, b]$, можно указать такую константу $K < \infty$, при которой будет справедлива оценка $|o(\varepsilon)| \leqslant K\varepsilon^2$.

Для выпуклой вниз функции f по переменной z сформулированное выше необходимое условие оптимальности является также и достаточным ввиду того, что $o(\varepsilon) \geqslant 0$.

Если функция f линейна по переменной z и известна функция Грина задачи, можно получить оптимальное управление в явном виде, аналитически.

В общем случае мы вынуждены прибегнуть к разностной аппроксимации исходной вариационной проблемы. В силу того, что приведенную выше оптимальную граничную функцию можно приблизить к непрерывной так, что решения соответствующих задач будут близки в интегральном смысле, очевидно, имеет место сходимость по функционалу сверху. Однако сходимость снизу, вообще говоря, нарушается. Этот факт является типичным и для других оптимизационных проблем математической физики, где речь идет о выборе наилучших граничных (начальных) условий. Ясно, что такой подход имеет весьма ограниченный круг применений.

В связи с этим возникает необходимость в модификации разностной схемы, например, на основе подмены исходной задачи задачей, в которой оптимальное управление ищется в виде частичной суммы ряда Фурье с неизвестными коэффициентами.

Если класс управлений задан параметрически в виде

$$u(s) = \alpha(s, a_1, \ldots, a_r), \quad (a_1, \ldots, a_r) \in A,$$

то разностная схема не требует модификации.

Отметим, что функционал цели при этом является функцией параметров a_i (либо коэффициентов Фурье). Для дифференциала этой функции нетрудно получить следующее выражение:

$$d\varphi(a_1, \ldots, a_p) = -\sum_{i=1}^{p} \left(\int_\Gamma \partial\lambda/\partial n(s)\, \partial\alpha/\partial a_i(s)\, ds \right) da_i.$$

Методы решения разностного аналога основываются на разностном аналоге этой формулы, который выводится без труда в каждом конкретном случае.

Рассматриваемая здесь методика может быть применена к задаче наилучшего в каком-то смысле приближения заданной функции гармоническими функциями из заданного класса.

Предлагаемая методика применима также для уравнений вида (2.32) с ненулевой правой частью, а также для бигармонических операторов. Аналогичные методы можно строить также для задач, когда управляющая функция входит в правую часть дифференциальных уравнений в частных производных. При этом функционал (2.34) может быть и более сложной природы.

Заметим еще, что для решения нестационарных задач управления математической физики выгодно использовать при возможности приемы, позволяющие разделять переменные и сводить задачу к задаче с обыкновенными дифференциальными уравнениями.

ГЛАВА 3

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Такая сложная задача неклассического вариационного исчисления, какой является задача непрерывного оптимального управления, сводится с помощью метода конечных разностей к конечномерной задаче нелинейного программирования. В этой главе будет показано, что если к получаемой задаче применить обычные идеи математического программирования, то ее специфика позволяет построить широкий класс специальных численных методов, как, например, для транспортной задачи линейного программирования.

Конечно, можно было бы пойти и по другому пути: применить общие идеи математического программирования в абстрактных пространствах к исходной задаче непрерывного оптимального управления, получить принципиальные схемы решения, а затем, уже при их реализации на ЭВМ, построить необходимые разностные аппроксимации. Однако таким образом можно получить неверные численные методы, формально применимые к непрерывной задаче, но перестающие быть справедливыми для ее разностного аналога. Например, численная схема решения задачи непрерывного управления может быть основана на непрерывном принципе максимума Понтрягина, который, вообще говоря, перестает быть справедливым с переходом от непрерывного времени к дискретному.

Здесь рассматриваются разностные аналоги задач оптимального управления только с обыкновенными дифференциальными уравнениями, так как принципиальные схемы их решения без существенных изменений применимы и для решения разностных аналогов задач оптимального управления с распределенными параметрами. Обсуждаются три группы методов: широкий класс методов, основу которых составляет дискретный принцип максимума; класс методов градиентного типа, относящихся к методам улучшения в пространстве управлений; класс методов улучшения в пространстве состояний.

Применению общих идей математического программирования в задачах оптимального управления посвящены монографии А. И. Пропоя [33], Э. Полака [30], Д. Табака и Б. Куо [36], в которых можно найти другие библиографические указания. В основу этой главы положены работы Ю. М. Ермольева и В. П. Гуленко [13, 20, 21, 22].

§ 1. СПЕЦИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Конечно-разностный аналог задачи непрерывного оптимального управления с обыкновенными дифференциальными уравнениями является частным случаем следующей задачи дискретного оптимального управления. Имеется динамическая система, поведение которой описывается рекуррентными соотношениями

$$x(k+1) = g(x(k),\quad u(k),\ k),\quad x(0) = x^0, \tag{3.1}$$
$$(k = \overline{0,\ N-1}),$$

где $x(k) \in R^n$ — фазовое состояние системы в момент времени k; $g(x, u, k) = (g_1(x, u, k), \ldots, g_n(x, u, k))$; $u(k) \in R^m$ — управление, действующее на систему в момент k. Требуется найти последовательность управлений $u(0)$, $u(1)$, ..., $u(N-1)$ и соответствующую ей траекторию $x(0)$, $x(1)$, ..., $x(N)$, определяемую из системы (3.1), которые минимизируют целевую функцию

$$f^0(x, u) = f^0(x(0), \ldots, x(N), u(0), \ldots, u(N-1)) \tag{3.2}$$

при ограничениях

$$u(k) \in \mathrm{U}(k) \quad (k = \overline{0,\ N-1}), \tag{3.3}$$

$$f^i(x, u) = f^i(x(0), \ldots, x(N), u(0), \ldots, u(N-1)) \leqslant 0, \tag{3.4}$$
$$(i = \overline{1,\ r}),$$

где $\mathrm{U}(k) \in R^m$, число N задает длительность процесса управления и может быть также неизвестно.

В некоторых задачах начальное состояние $x(0)$ бывает также искомым вектором, поэтому в формулировке (3.1) — (3.4) считается, что функции $f^\nu(x, u)$, $(\nu = \overline{0, r})$ зависят и от $x(0)$. Функции ограничений $f^i(x(0), \ldots, x(N), u(0), \ldots, u(N-1))$, $(i = \overline{1, r})$ часто имеют следующий вид: индекс i соответствует некоторой паре чисел (l, k), $(l = \overline{1, p};\ k = \overline{0, N})$, так что

$$f^i(x(0), \ldots, x(N), u(0), \ldots, u(N-1)) = h^l(x(0), \ldots, x(k),$$
$$u(0), \ldots, u(k-1), k),$$

а еще чаще

$$f^i(x(0), \ldots, x(N), u(0), \ldots, u(N-1)) = h^l(x(k), k).$$

Решение задачи (3.1) — (3.4) можно получить следующими способами:

1. В качестве независимых переменных рассматривать как векторы $u(k)$, $(k = \overline{0, N-1})$, так и векторы $x(k)$ $(k = \overline{0, N})$, и минимизировать функцию (3.2) с помощью соответствующих методов нелинейного программирования, т. е. можно рассмотреть вектор $z = (x(0), \ldots, x(N), u(0), \ldots, u(N-1))$, и тогда ограничения (3.1) соответству-

ют ограничениям в форме равенств на искомые переменные z, $f^0(z)$ является функцией цели, а функции $f^i(z)$, $(i = \overline{1, r})$ задают ограничения в форме неравенств. При этом, используя признаки оптимальности нелинейного программирования, легко получить специфические необходимые и достаточные условия оптимальности управления для задачи (3.1) — (3.4). Легко также сформулировать двойственные задачи оптимального управления и из соображений двойственности в ряде случаев получить дискретный принцип максимума Понтрягина.

2. В качестве независимых переменных рассматривать только векторы $u(k)$, $(k = \overline{0, N-1})$, поскольку, в силу уравнений (3.1), векторы $x(k)$, $(k = \overline{1, N})$ выражаются через $u(k)$, т. е. можно записать, что при фиксированном x^0

$$x(k) = X(u(0), \ldots, u(k-1)),$$

$$f^0(x(0), \ldots, x(N), u(0), \ldots, u(N-1)) = F^0(u(0), \ldots, u(N-1)),$$

$$f^i(x(0), \ldots, x(N), u(0), \ldots, u(N-1)) =$$

$$= F^i(u(0), \ldots, u(N-1)), \quad (i = \overline{1, r}),$$

так что задача (3.1) — (3.4) равносильна следующей задаче нелинейного программирования: минимизировать функцию $F^0(u(0), \ldots$ $\ldots, u(N-1))$ при ограничениях

$$F^i(u(0), \ldots, u(N-1)) \leqslant 0, \quad (i = \overline{1, r}),$$

$$u(k) \in U(k), \quad (k = \overline{0, N-1}).$$

Эта задача имеет значительно меньшую размерность, чем размерность вектора z, однако при этом функции $F^0(u)$, $F^i(u)$ неявно зависят от неизвестных переменных $u(0)$, $u(1)$, ..., $u(N-1)$. Такой подход приводит к методам улучшения в пространстве управлений.

3. В некоторых случаях в качестве независимых переменных можно выбрать совокупность векторов $x(0)$, $x(1)$, ..., $x(N)$, а переменные $u(0)$, $u(1)$, ..., $u(N-1)$ отыскивать по $x(0)$, $x(1)$, ..., $x(N)$. Это приводит к методам улучшения в пространстве состояний.

Каждый из трех перечисленных подходов дает определенные схемы решения, преимущества и недостатки которых можно оценить только по отношению к вполне конкретной задаче. Единого, одинаково хорошего во всех случаях подхода, очевидно, быть не может.

§ 2. ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА. ДИСКРЕТНЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА

При решении экстремальных задач часто пользуются следущим приемом. Из всего множества подлежащих решению экстремальных задач выделяется простейшая задача, решить которую относительно нетрудно, а затем все другие задачи сводятся тем или иным способом к решению этой задачи. Например, задачи нелинейного программирования часто сводятся к последовательному решению задач линейного программирования.

В этом параграфе выделяется простейшая задача оптимального управления, к которой, как будет показано в дальнейшем, могут быть сведены важные нелинейные задачи.

Формулировка простейшей задачи: минимизировать функцию

$$f^0(x, u) = \sum_{k=0}^{N} (c(k),\ x(k)) + \sum_{k=0}^{N-1} (d(k),\ u(k))\,^* \tag{3.5}$$

при условиях

$$x(k+1) = A(k)\,x(k) + g(u(k),\ k), \quad x(0) = x^0, \tag{3.6}$$

$$(k = \overline{0,\ N-1}),$$

$$u(k) \in \mathrm{U}(k), \quad (k = \overline{0,\ N-1}). \tag{3.7}$$

Применим для решения этой задачи общие идеи двойственности математического программирования. Составим функцию Лагранжа

$$\varphi(x, u, \lambda) = \sum_{k=0}^{N} (c(k),\ x(k)) + \sum_{k=0}^{N-1} (d(k),\ u(k)) +$$

$$+ (\lambda(0),\ x(0) - x^0) + \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda(k+1),\ x(k+1) - A(k)\,x(k) -$$

$$- g(u(k),\ k)),$$

где $\lambda(k) = (\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k))$, $(k = \overline{0,\ N})$, и рассмотрим пару двойственных задач:

$$\min_{(x,u)} \max_{\lambda} \varphi(x, u, \lambda), \tag{3.8}$$

$$\max_{\lambda} \min_{(x,u)} \varphi(x, u, \lambda), \tag{3.9}$$

где минимум берется по переменным $(x, u) = (x(0), \ldots, x(N), u(0), \ldots$ $\ldots, u(N-1))$, удовлетворяющим ограничениям (3.7). На переменные λ ограничений не наложено.

Преобразуем эти задачи, записав в (3.8) условия максимума по λ, а в (3.9) условия минимума по (x, u).

Из условий максимума по λ, на которые не наложено дополнительных ограничений, получаем соотношения

$$x(k+1) = A(k)\,x(k) + g(u(k),\ k), \quad x(0) = x^0, \tag{3.10}$$

$$(k = \overline{0,\ N-1}).$$

Очевидно, что

$$\varphi(x, u, \lambda) = -(\lambda(0),\ x^0) + \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda(k) - \lambda(k+1)\,A(k) + c(k),\ x(k)) +$$

$$+ (\lambda(N) + c(N),\ x(N)) - \sum_{k=0}^{N-1} [(\lambda(k+1),\ g(u(k),\ k)) - (d(k),\ u(k))],$$

* Это слагаемое может быть также нелинейной функцией.

поэтому из условия минимума по x и переменным u, удовлетворяющим ограничениям (3.7), получаем наряду с (3.10) следующие соотношения для сопряженных переменных:

$$\lambda(k) = \lambda(k+1)A(k) - c(k), \quad \lambda(N) = -c(N), \tag{3.11}$$

$$(k = \overline{N-1,\ 0});$$

$$(\lambda(k+1),\ g(u(k),\ k)) - (d(k),\ u(k)) =$$

$$= \max_{v \in U(k)} [(\lambda(k+1),\ g(v,\ k)) - (d(k),\ v)]. \tag{3.12}$$

Таким образом, получена задача определения векторов $x(k)$, $u(k)$, $\lambda(k)$, удовлетворяющих соотношениям (3.10) — (3.12). Это — дискретный принцип максимума. Согласно соотношению (3.12) управление $u(k)$ должно в каждый момент k максимизировать скалярное произведение $(\lambda(k+1),\ g(v,\ k)) - (d(k),\ v)$.

Ниже будет показано, что совокупность векторов $x(k)$, $u(k)$, $\lambda(k)$, удовлетворяющих соотношениям (3.10) — (3.12), образует седловую точку функции Лагранжа $\varphi(x,\ u,\ \lambda)$, поэтому векторы $x(k)$, $u(k)$, удовлетворяющие этим соотношениям, являются решением простейшей задачи.

Заметим, что (3.11) однозначно определяют сопряженные переменные $\lambda(k)$, $(k = \overline{N,\ 0})$; соотношения (3.12) позволяют, в принципе, получить управление $u(k)$, $(k = \overline{0,\ N-1})$, после чего из (3.10) определяется траектория $x(k)$, $(k = \overline{0,\ N})$.

Установим достаточное условие оптимальности для более общей задачи. Пусть требуется минимизировать функцию

$$f^0(x(0),\ \ldots,\ x(N)) + l^0(u(0),\ \ldots,\ u(N-1)) \tag{3.13}$$

при ограничениях

$$x(k+1) = A(k)x(k) + g(u(k),\ k), \quad x(0) = x^0 \tag{3.14}$$

$$(k = \overline{0,\ N-1}),$$

$$f^i(x(0),\ \ldots,\ x(N)) + l^i(u(0),\ \ldots,\ u(N-1)) \leqslant 0 \tag{3.15}$$

$$(i = \overline{1,\ r}),$$

$$u(k) \in U(k) \qquad (k = \overline{0,\ N-1}), \tag{3.16}$$

где $f^\nu(x)$ $(\nu = \overline{0,\ r})$ — выпуклые вниз функции *. Обозначим обобщенные градиенты функций $f^\nu(x)$ через $\hat{f}^\nu_x(x)$ и условимся обозначать компоненты этих векторов следующим образом: $\hat{f}^\nu_x = (\hat{f}^\nu_{x(0)},\ \ldots,\ \hat{f}^\nu_{x(N)})$.

Напомним (см., например, [20]), что обобщенный градиент $\hat{h}_v(v)$, $v \in R^n$ выпуклой вниз функции $h(v)$ удовлетворяет основному

---

* Можно рассматривать также функции $f^\nu(x,\ u)$, выпуклые вниз по переменной x.

неравенству

$$h(w) - h(v) \geqslant (\hat{h}_v(v),\ w - v)$$

при любых $w \in R^n$.

Составим функцию Лагранжа следующего вида:

$$\varphi(x, u, \lambda, \mu) = f^0(x(0), \ldots, x(N)) + l^0(u(0), \ldots, u(N-1)) +$$
$$+ (\lambda(0),\ x(0) - x^0) + \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda(k+1),\ x(k+1) - A(k)\,x(k) -$$
$$- g(u(k), k)) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i (f^i(x(0), \ldots, x(N)) + l^i(u(0), \ldots, u(N-1))),$$

где

$$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r) \geqslant 0,$$

и рассмотрим задачу: найти векторы

$$x = (x(0), \ldots, x(N)), \quad u = (u(0), \ldots, u(N-1)),$$
$$\lambda = (\lambda(0), \ldots, \lambda(N)), \quad \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r),$$

удовлетворяющие соотношениям

$$x(k+1) = A(k)\,x(k) + g(u(k)), k),\ x(0) = x^0 \tag{3.17}$$
$$(k = \overline{0, N-1})$$

$$\begin{cases} 0 \in \lambda(k) - \lambda(k+1)\,A(k) + \hat{f}^0_{x(k)}(x) + \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i \hat{f}^i_{x(k)}(x) \\ (k = \overline{N-1, 0}), \\ 0 \in \lambda(N) + \hat{f}^0_{x(N)}(x) + \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i \hat{f}^i_{x(N)}(x), \end{cases} \tag{3.18}$$

$$\max_{\nu \geqslant 0} \sum_{i=1}^{r} \nu_i (f^i(x) + l^i(u)) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i (f^i(x) + l^i(u)) = 0, \tag{3.19}$$

$$(\lambda(k+1),\ g(u(k), k)) - l^0(u) - \sum_{i=1}^{r} \mu_i l^i(u) =$$
$$= \max_{v \in U(k)} \Big[(\lambda(k+1),\ g(v, k)) - l^0(u(0), \ldots, u(k-1), v, u(k+1), \ldots$$
$$\ldots, u(N-1)) - \sum_{i=1}^{r} \mu_i l^i(u(0)), \ldots, u(k-1), v, u(k+1), \ldots$$
$$\ldots, u(N-1)) \Big], \tag{3.20}$$

где $\hat{f}^0_{x(k)}(x)$, $\hat{f}^i_{x(k)}(x)$ — компоненты любого из обобщенных градиентов функций $f^0(x)$ и $f^i(x)$.

Если функции $f^{\nu}(x)$, $(\nu = \overline{0, r})$ имеют непрерывные производные, т. е. множество обобщенных градиентов содержит единственный элемент — градиент $f^{\nu}_x(x)$, $(\nu = \overline{0, r})$, то включения (3.18) сводятся к уравнениям

$$\begin{cases} \lambda(k) = \lambda(k+1) A(k) - f^0_{x(k)}(x) - \sum_{i=1}^{r} \mu_i f^i_{x(k)}(x), \quad (k = \overline{N-1, 0}), \\ \lambda(N) = -f^0_{x(N)}(x) - \sum_{i=1}^{r} \mu_i f^i_{x(N)}(x). \end{cases}$$

Теорема 1. Управление $\bar{u}(k)$, $(k = \overline{0, N-1})$ оптимально, если найдутся такие векторы $\bar{x}(k)$, $(k = \overline{0, N})$, $\bar{\lambda}(k)$, $(k = \overline{0, N})$, $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_r)$, при которых управление $\bar{u}(k)$ удовлетворяет соотношениям (3.17) — (3.20).

Чтобы доказать оптимальность управления $\bar{u}(k)$, достаточно показать, что $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ является седловой точкой функции Лагранжа $\varphi(x, u, \lambda, \mu)$, т. е. что

$$\varphi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, \mu) \leqslant \varphi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \leqslant \varphi(x, u, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$$

при всех $u(k) \in U(k)$, $(k = \overline{0, N-1})$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r) \geqslant 0$.

Так как $\bar{x}(k)$, $\bar{u}(k)$ удовлетворяют соотношениям (3.17), то согласно (3.19) при любых $\lambda(k)$, $(k = \overline{0, N})$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r) \geqslant 0$, очевидно, имеем $\varphi(\bar{x}, \bar{u}, \lambda, \mu) \leqslant \varphi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$.

Из соотношений (3.20) следует, что $\varphi(x, \bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \leqslant \varphi(x, u, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$. Так как функции $f^{\nu}(x)$, $(\nu = \overline{0, r})$ — выпуклые вниз по совокупности переменной, $\bar{\mu} \geqslant 0$, то функция $\varphi(x, \bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ — выпуклая вниз по переменной x. Если через $\hat{\varphi}_x(x, \bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ обозначить обобщенный градиент по x функции $\varphi(x, \bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$, то $\varphi(x, \bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) - \varphi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \geqslant (\hat{\varphi}_x(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}), x - \bar{x})$, где, как легко убедиться,

$$(\hat{\varphi}_x(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}), x - \bar{x}) = \sum_{k=0}^{N} (\hat{f}^0_{x(k)}(\bar{x}), x(k) - \bar{x}(k)) +$$

$$+ (\bar{\lambda}(0), x(0) - \bar{x}(0)) + \sum_{k=0}^{N-1} [(\bar{\lambda}(k+1), x(k+1) - \bar{x}(k+1)) -$$

$$- (\bar{\lambda}(k+1) A(k), x(k) - \bar{x}(k))] + \sum_{k=0}^{N} \left(\sum_{i=1}^{r} \bar{\mu}_i \hat{f}^i_{x(k)}(\bar{x}), x(k) - \bar{x}(k) \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\hat{f}^0_{x(k)}(\bar{x}) + \bar{\lambda}(k) - \bar{\lambda}(k+1) A(k) + \sum_{i=1}^{r} \bar{\mu}_i \hat{f}^i_{x(k)}(\bar{x}), x(k) - \bar{x}(k) \right) +$$

$$+ (\bar{\lambda}(N) + \hat{f}^0_{x(N)}(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{r} \bar{\mu}_i \hat{f}^i_{x(N)}(\bar{x}), x(N) - \bar{x}(N)).$$

Отсюда, с учетом соотношений (3.18), следует, что найдется обобщенный градиент $\hat{\varphi}_x\ (\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = 0$, т. е. $\varphi(x, \bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) - \varphi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \geqslant 0$. Так как

$$\varphi(x, \bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \leqslant \varphi(x, u, \bar{\lambda}, \bar{\mu}),$$

то окончательно имеем

$$\varphi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \leqslant \varphi(x, u, \bar{\lambda}, \bar{\mu}),$$

что и требовалось доказать.

Следствие. В случае задачи (3.5) — (3.7), очевидно, имеем

$$\lambda(k) - \lambda(k+1) A(k) + \hat{f}^0_{x(k)}(x) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i \hat{f}^i_{x(k)}(x) =$$

$$= \lambda(k) - \lambda(k+1) A(k) + c(k),$$

$$\lambda(N) + \hat{f}^0_{x(N)}(x) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i \hat{f}^i_{x(N)}(x) = \lambda(N) + c(N),$$

и дискретный принцип максимума (3.17) — (3.20) превращается в дискретный принцип максимума (3.10) — (3.12).

Таким образом, для простейшей задачи получена исключительно простая схема решения (3.10) — (3.12), которая, тем не менее, может оказаться практически не реализуемой ввиду сложности решения подзадачи (3.12).

Покажем теперь, что к решению простейших задач типа (3.5) — (3.7) можно свести широкий класс задач оптимального управления, иначе говоря, покажем, что дискретный принцип максимума (3.10) — (3.12) может быть положен в основу принципиальных схем решения весьма общих задач оптимального управления, для которых непосредственное применение общего дискретного принципа максимума (3.17) — (3.20) не дает однозначного ответа.

§ 3. НЕЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ ЦЕЛИ

Рассмотрим задачу минимизации функции цели

$$f^0(x, u), \tag{3.21}$$

где $f^0\ (x, u)$ — непрерывно дифференцируемая функция, при условиях

$$x(k+1) = A(k)x(k) + g(u(k), k),\ x(0) = x^0, \tag{3.22}$$

$$(k = \overline{0, N-1}),$$

$$u(k) \in \mathrm{U}(k), \qquad (k = \overline{0, N-1}). \tag{3.23}$$

Дискретный принцип максимума (3.17) — (3.20) приводит к задаче поиска векторов $x = (x(0), \ldots, x(N))$, $u = (u(0), \ldots, u(N - 1))$, удовлетворяющих соотношениям

$$x(k+1) = A(k)x(k) + g(u(k), k),\ x(0) = x^0, \quad (k = \overline{0, N-1});$$

$$\lambda(k) = \lambda(k+1) A(k) - f^0_{x(k)}(x, u),\ \lambda(N) = -f^0_{x(N)}(x, u),$$

$$(k = \overline{N-1,\ 0});$$

$$(\lambda(k+1),\ g(u(k),\ k)) - f^0(x,\ u) =$$

$$= \max_{v \in U(k)} [(\lambda(k+1),\ g(v,\ k)) - f^0(x,\ u(0),\ \ldots,\ u(k-1),\ v,\ u(k+1),\ \ldots$$

$$\ldots,\ u(N-1))].$$

Здесь уравнения для сопряженных переменных зависят от траектории управляемого процесса, и их невозможно определить, не зная траектории. С другой стороны, для построения траектории требуется определить управление, что, в свою очередь, невозможно сделать, не зная сопряженных переменных, т. е. для данной задачи дискретный принцип максимума не определяет принципиальной схемы ее решения. Покажем теперь, каким образом нелинейные задачи можно сводить к простейшим.

1. Дробно-линейный функционал. Пусть

$$f^0(x,\ u) = \frac{\sum_{k=0}^{N} (c^1(k),\ x(k)) + \sum_{k=0}^{N-1} (d^1(k),\ u(k))}{\sum_{k=0}^{N} (c^2(k),\ x(k)) + \sum_{k=0}^{N-1} (d^2(k),\ u(k))}, \tag{3.24}$$

где

$$\sum_{k=0}^{N} (c^2(k),\ x(k)) + \sum_{k=0}^{N-1} (d^2(k),\ u(k)) > 0$$

при всевозможных управлениях. Метод минимизации нелинейного функционала вида (3.24) может быть получен из следующих соображений. Возьмем произвольное начальное управление $u^0(k)$, и пусть $u^s(k)$ — управление, полученное после s итераций, $x^s(k)$ — соответствующая ему траектория. Тогда более выгодное, чем $u^s(k)$, управление должно выбираться из условия

$$f^0(x,\ u) < f^0(x^s,\ u^s),$$

или

$$\sum_{k=0}^{N} (c^1(k),\ x(k)) + \sum_{k=0}^{N-1} (d^1(k),\ u(k)) -$$

$$- \eta_s \left[\sum_{k=0}^{N} (c^2(k),\ x(k)) + \sum_{k=0}^{N-1} (d^2(k),\ u(k)) \right] < 0,\quad \eta_s = f^0(x^s,\ u^s), \tag{3.25}$$

что можно сделать путем минимизации линейной функции (3.25) при ограничениях (3.22) — (3.23). Это — простейшая задача оптимального управления, для решения которой можно применить дискретный принцип максимума (3.10) — (3.12). Следовательно, новое управление $u^{s+1}(k)$ отыскивается из соотношений

$$(\lambda^s(k+1),\ g(u^{s+1}(k),\ k)) - (d^1(k) - \eta_s d^2(k),\ u^{s+1}(k)) =$$

$$= \max_{v \in U(k)} [(\lambda^s(k+1),\ g(v,\ k)) - (d^1(k) - \eta_s d^2(k),\ v)],$$

где $\lambda^s(k)$ удовлетворяют соотношениям

$$\lambda^s(k) = \lambda^s(k+1) A(k) - c^1(k) + \eta_s c^2(k),$$
$$\lambda^s(N) = -c^1(N) + \eta_s c^2(N).$$

Траектория $x^{s+1}(k)$ определяется из уравнений (3.22) при $u(k) = u^{s+1}(k)$. Если при этом $f^0(x^{s+1}, u^{s+1}) < f^0(x^s, u^s)$, то с управлением $u^{s+1}(k)$ поступаем так же, как и с управлением $u^s(k)$. Если же $f^0(x^{s+1}, u^{s+1}) = f^0(x^s, u^s)$, то управление $u^s(k)$ оптимально, и вычисления прекращаются. Заметим, что функции $(d^i(k), u(k))$, $i = 1, 2$ могут быть заменены нелинейными.

2. Общий случай. Рассмотрим теперь задачу (3.21) — (3.23), где множество $U(k)$, $(k = \overline{0, N-1})$ — выпуклое и замкнутое, функция $f^0(x, u)$ — непрерывно дифференцируемая. Для решения этой задачи применим следующий метод линеаризации (функции цели).

Пусть $u^0(k)$ — начальное управление, $x^0(k)$ — соответствующая ему траектория, $u^s(k)$, $x^s(k)$ — управление и траектория, полученные после s итераций. Минимизируем линейную функцию

$$\sum_{k=1}^{N} (f^0_{x(k)}(x^s, u^s), x(k)) + \sum_{k=0}^{N-1} (f^0_{u(k)}(x^s, u^s), u(k))$$

при условиях (3.22) — (3.23). Пусть в результате решения этой простейшей задачи получено управление $\bar{u}^s(k)$ и траектория $\bar{x}^s(k)$. Новое управление $u^{s+1}(k)$ отыскивается по формуле

$$u^{s+1}(k) = u^s(k) + \rho_s(\bar{u}^s(k) - u^s(k)), \quad (k = \overline{0, N-1}),$$

где $0 \leqslant \rho_s \leqslant 1$. Поскольку $U(k)$ — выпуклое множество, то $u^{s+1}(k) \in U(k)$. Шаговый множитель ρ_s должен выбираться в соответствии с общими условиями сходимости метода линеаризации нелинейного программирования. При этом строгое обоснование изложенного метода линеаризации возможно только в том случае, когда $g(u(k), k)$ — линейные функции. Глобальное решение будет получено в тех случаях, когда функция $f^0(x, u)$ выпукла вниз по совокупности переменных (x, u).

Пусть в уравнениях (3.22) функция $g(u(k), k)$ линейная, т. е.

$$g(u(k), k) = B(k) u(k) + b(k),$$

тогда управлению $u^{s+1}(k)$ соответствует траектория

$$x^{s+1}(k) = x^s(k) + \rho_s(\bar{x}^s(k) - x^s(k)), \quad (k = \overline{0, N}),$$

и значение ρ_s можно выбрать из условия

$$f^0(x^s + \rho_s(\bar{x}^s - x^s), u^s + \rho_s(\bar{u}^s - u^s)) =$$
$$= \min_{0 \leqslant \rho \leqslant 1} f^0(x^s + \rho(\bar{x}^s - x^s), u^s + \rho(\bar{u}^s - u^s)). \qquad (3.26)$$

Если при этом $f^0(x^{s+1}, u^{s+1}) = f^0(x^s, u^s)$, то управление $u^s(k)$ — локально-оптимальное. Если же $f^0(x^{s+1}, u^{s+1}) < f^0(x^s, u^s)$, то с управлением $u^{s+1}(k)$ поступаем так же, как и с $u^s(k)$, и т. д. В случае нелинейной функции $g(u(k), k)$ можно рассмотреть совокупность траекторий $x_\rho^s(k)$, отвечающих множеству управлений

$$u_\rho^s(k) = u^s(k) + \rho(\bar{u}^s(k) - u^s(k)), \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1,$$

и величину ρ_s выбирать из условия

$$f^0(x_{\rho_s}^s, u_{\rho_s}^s) = \min_{0 \leqslant \rho \leqslant 1} f^0(x_\rho^s, u_\rho^s) = \min_{0 \leqslant \rho \leqslant 1} \gamma(\rho).$$

Трудность минимизации функции $\gamma(\rho)$, зависящей от скалярного аргумента ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, связана со сложностью вычисления значения $\gamma(\rho)$. Шаг ρ_s в ряде случаев можно выбирать «программным» способом

$$\rho_s \geqslant 0, \ \rho_s \to 0, \ \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty,$$

не связанным с поведением функции $\gamma(\rho)$.

§ 4. ФАЗОВЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

1. Линейный случай. Пусть требуется решить простейшую задачу (3.5) — (3.7) при дополнительных ограничениях

$$f^i(x, u) = \sum_{k=0}^{N} (c^i(k), x(k)) + \sum_{k=0}^{N-1} (d^i(k), u(k)) \leqslant b_i \ (i = \overline{1, r}). \tag{3.27}$$

Второе слагаемое может быть также нелинейным. Составим функцию Лагранжа следующего вида:

$$\varphi(x, u, \mu) = \sum_{k=0}^{N} (c(k), x(k)) + \sum_{k=0}^{N-1} (d(k), u(k)) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{r} \mu_i \left[\sum_{k=0}^{N} (c^i(k), x(k)) + \sum_{k=0}^{N-1} (d^i(k), u(k)) - b_i \right]$$

и рассмотрим функцию

$$\psi(\mu) = \min_{(x,u)} \varphi(x, u, \mu), \tag{3.28}$$

где минимум берется по переменным $x = (x(0), \ldots, x(N))$, $u = (u(0), \ldots$ $\ldots, u(N-1))$, удовлетворяющим соотношениям (3.6) — (3.7), т. е. вычисление значения $\psi(\mu)$ связано с решением простейшей задачи. Обозначим решение этой задачи через $u_\mu(k)$, $x_\mu(k)$, где $u_\mu(k)$ — оптимальное управление, $x_\mu(k)$ — соответствующая ему оптимальная траектория. Предположим, что $u_\mu(k)$ при каждом $\mu \geqslant 0$ — единственное оптимальное управление *. Пусть $\bar{\mu}$ — точка максимума

* Этого зачастую можно достичь путем введения в целевую функцию малых, строго выпуклых вниз по переменным u слагаемых.

$\psi(\mu)$ в области $\mu \geqslant 0$. Тогда легко убедиться в том, что $u_{\bar{\mu}}(k)$ — оптимальное управление простейшей задачи (3.5) — (3.7) при дополнительных условиях (3.27).

Это является следствием следующего общего факта теории нелинейного программирования. Пусть требуется минимизировать нелинейную функцию $h^0(v)$ при ограничениях $h^i(v) \leqslant 0$, $v \in V$, где V — подмножество пространства R^n, $h^\nu(v)$, $(\nu = \overline{0, m})$ — непрерывно дифференцируемые функции. Рассмотрим функцию Лагранжа

$$\varphi(v, \mu) = h^0(v) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i h^i(v)$$

и задачу максимизации функции

$$\delta(\mu) = \min_{v \in V} \varphi(v, \mu) = \varphi(v_\mu, \mu)$$

при $\mu \geqslant 0$. Если точка v_μ единственная, то функция $\delta(\mu)$ оказывается непрерывно дифференцируемой, причем ее градиент (см., например, [20]) имеет вид

$$\operatorname{grad} \delta(\mu) = (h^1(v_\mu), \ \ldots, \ h^m(v_\mu)). \tag{3.29}$$

Тогда, если $\bar{\mu}$ — точка максимума $\delta(\mu)$ при $\mu \geqslant 0$, то в этой точке

$$\operatorname{grad} \delta(\bar{\mu}) \leqslant 0, \quad (\bar{\mu}, \operatorname{grad} \delta(\bar{\mu})) = 0,$$

т. е. $h^i(v_{\bar{\mu}}) \leqslant 0$, $(i = \overline{1, m})$. Кроме того, $\sum_{i=1}^{m} \bar{\mu}_i h^i(v_{\bar{\mu}}) = 0$. Следовательно, $v_{\bar{\mu}}$ минимизирует функцию $h^0(v)$ при ограничениях $h^i(v) \leqslant 0$, $(i = \overline{1, m})$, $v \in V$.

Таким образом, оптимальное управление в простейшей задаче при дополнительных ограничениях (3.27) отвечает точке максимума $\bar{\mu}$ функции (3.28) и может быть получено в процессе максимизации функции (3.28).

По формуле (3.29) можно построить градиентный метод максимизации функции $\delta(\mu)$. Пусть $\mu^0 \geqslant 0$ — произвольное начальное приближение, μ^s — приближение, полученное после s-й итерации. Тогда, применяя метод проекции градиента (см., например, [20]), получим следующую процедуру последовательных приближений:

$$\mu^{s+1} = \max\{0, \ \mu^s + \rho_s h(v_{\mu^s})\}, \quad s = 0, 1, \ \ldots,$$

где ρ_s — шаговый множитель; $h(v) = (h^1(v), \ldots, h^m(v))$; для любого вектора $a = (a_1, \ldots, a_n)$ запись $\max\{0, a\}$ означает вектор $(\max(0, a_1), \ldots, \max(0, a_n))$.

Применим эту общую схему для максимизации функции (3.28). В данном случае поиск v_{μ^s} отвечает поиску оптимального управления $u_{\mu^s}(k)$ и траектории $x_{\mu^s}(k)$. Значения $u_{\mu^s}(k)$, $x_{\mu^s}(k)$, которые для краткости будем обозначать соответственно $u^s(k)$ и $x^s(k)$, отыскиваются с помощью дискретного принципа максимума. Таким образом, для решения простейшей задачи с дополнительными ограничениями (3.27) может быть предложен следующий численный метод:

$$\mu_j^{s+1} = \max\{0,\ \mu_j^s + \rho_s (f^j(x^s, u^s) - b_j)\}, \tag{3.30}$$

где $j = \overline{1, r}$; $s = 0, 1, \ldots$, а x^s, u^s удовлетворяют соотношениям

$$x^s(k+1) = A(k)\, x^s(k) + g(u^s(k), k),\quad x(0) = x^0,\qquad (k = \overline{0, N-1});$$

$$\begin{cases} \lambda^s(k) = \lambda^s(k+1)\, A(k) - c(k) - \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i^s c^i(k) & (k = \overline{N-1, 0}),\\ \lambda^s(N) = -c(N) - \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i^s c^i(N); \end{cases}$$

$$(\lambda^s(k+1),\ g(u^s(k), k)) - \left(d(k) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i^s d^i(k),\ u^s(k)\right) =$$

$$= \max_{u \in U(k)} \left[(\lambda^s(k+1),\ g(u, k)) - \left(d(k) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i^s d^i(k),\ u\right) \right].$$

В методе (3.30) величины ρ_s должны быть выбраны из общих условий, обеспечивающих сходимость последовательности μ^s градиентного метода (3.30) к точке минимума выпуклой вниз функции $\psi(\mu)$, например, из условий $\sum\limits_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty$, $\sum\limits_{s=0}^{\infty} \rho_s^2 < \infty$.

2. *Нелинейные ограничения.* Рассмотрим задачу минимизации непрерывно дифференцируемой функции

$$f^0(x, u) = f^0(x(0), \ldots, x(N), u(0), \ldots, u(N-1)) \tag{3.31}$$

при условиях

$$x(k+1) = A(k)\, x(k) + g(u(k), k),\quad x(0) = x^0 \tag{3.32}$$

$$(k = \overline{0, N-1}),$$

$$u(k) \in U(k)\qquad (k = \overline{0, N-1}), \tag{3.33}$$

$$f^i(x, u) = f^i(x(0), \ldots, x(N), u(0), \ldots, u(N-1)) \leqslant 0, \tag{3.34}$$

$$(i = \overline{1, r}),$$

т. е. вместо линейных ограничений (3.27) рассматриваются нелинейные ограничения общего вида (3.34). Кроме того, рассматривается нелинейная функция цели (3.31).

Для решения этой задачи в том случае, когда функции $f^\nu(x, u)$, $(\nu = \overline{0, r})$ — выпуклые вниз и непрерывно дифференцируемые, функции $g(u, k)$ — линейные, множество $U(k)$, $(k = \overline{0, N-1})$ выпуклое, причем ограничения (3.32) — (3.34) удовлетворяют условиям типа Слейтера, можно применить следующий прием, впервые предложенный в работе [21]. Составим функцию Лагранжа

$$\varphi(x, u, \mu) = f^0(x, u) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i f^i(x, u).$$

Пусть $\mu^0 = (\mu_1^0, \ldots, \mu_r^0)$ — вектор с неотрицательными компонентами, $u^0(k) \in U(k)$ — начальное управление, $x^0(k)$ — соответствующая траектория. Пусть μ^s, $u^s(k)$, $x^s(k)$ — множители Лагранжа, управление и траектория, полученные после s-й итерации. Решим простейшую задачу о минимизации линейной функции

$$\sum_{k=0}^{N} \left(f^0_{x(k)}(x^s, u^s) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i^s f^i_{x(k)}(x^s, u^s), x(k) \right) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{N-1} \left(f^0_{u(k)}(x^s, u^s) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i^s f^i_{u(k)}(x^s, u^s), u(k) \right)$$

при условиях (3.32) — (3.33). Решение этой задачи обозначим через $\bar{u}^s(k)$, $\bar{x}^s(k)$. В соответствии с дискретным принципом максимума искомые $\bar{u}^s(k)$, $\bar{x}^s(k)$ при заданных μ^s, $u^s(k)$, $x^s(k)$ определяется так:

$$\bar{x}^s(k+1) = A(k)\bar{x}^s(k) + g(\bar{u}^s(k), k), \quad \bar{x}^s(0) = x^0, \qquad (k = \overline{0, N-1});$$

$$\begin{cases} \bar{\lambda}^s(k) = \bar{\lambda}^s(k+1) A(k) - f^0_{x(k)}(x^s, u^s) - \sum_{i=1}^{r} \mu_i^s f^i_{x(k)}(x^s, u^s), \\ \qquad (k = N-1, 0), \\ \bar{\lambda}^s(N) = -f^0_{x(N)}(x^s, u^s) - \sum_{i=1}^{r} \mu_i^s f^i_{x(N)}(x^s, u^s); \end{cases}$$

$$(\bar{\lambda}^s(k+1), g(\bar{u}^s(k), k)) - \left(f^0_{u(k)}(x^s, u^s) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i^s f^i_{u(k)}(x^s, u^s), \bar{u}^s(k) \right) =$$
$$= \max_{u \in U(k)} \left[(\bar{\lambda}^s(k+1), g(u, k)) - \left(f^0_{u(k)}(x^s, u^s) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i^s f^i_{u(k)}(x^s, u^s), u \right) \right].$$

Новый вектор μ^{s+1} и новое управление $u^{s+1}(k)$ определяются следующим образом:

$$\begin{cases} u^{s+1}(k) = u^s(k) + \rho_s(\bar{u}^s(k) - u^s(k)), \\ \mu_i^{s+1} = \max\{0, \mu_i^s + \delta_s f^i(x^s, u^s)\}, \end{cases} \tag{3.35}$$

где $s = 0, 1, \ldots$; ρ_s, δ_s — шаговые множители. В работе [5] изучаются вопросы сходимости процедур подобного вида, что связано со следующим общим положением нелинейного программирования.

Рассмотрим задачу минимизации некоторой функции $h^0(v)$ при условиях $h^i(v) \leqslant 0$, $(i = \overline{1, m})$, где $v \in V \subset R^n$. Пусть $h^\nu(v)$, $(\nu = \overline{0, m})$ — выпуклые вниз непрерывно дифференцируемые функции, V — выпуклое, замкнутое множество. Составим функцию

Лагранжа

$$\varphi(v, \mu) = h^0(v) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i h^i(v)$$

и определим последовательность пар векторов $(v^s, \mu^s) = (v_1^s, \ldots$
$\ldots, v_n^s, \mu_1^s, \ldots, \mu_m^s)$ по следующему правилу:

$$\begin{cases} v^{s+1} = v^s + \rho_s(\bar{v}^s - v^s), \\ \mu_i^{s+1} = \max(0, \mu_i^s + \delta_s h^i(v^s)), \end{cases}$$

где $s = 0, 1, \ldots$; $v^0 \in V$ и $\mu^0 \geqslant 0$ — произвольные начальные приближения, а $\bar{v}^s$ минимизирует линейную функцию

$$\left(h_v^0(v^s) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^s h_v^i(v^s), v\right)$$

в области V. В работе [5] показано, что для сходимости $\{v^s\}$ к решению задачи в случае строго выпуклой вниз функции $h^0(v)$ значения ρ_s и δ_s следует выбирать так, чтобы при этом выполнялись следующие условия:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s^2 < \infty, \quad \rho_s/\delta_s \underset{s\to\infty}{\to} 0, \quad \delta_s \underset{s\to\infty}{\to} 0.$$

В нашем случае строгая выпуклость функции $h^0(v)$ означает строгую выпуклость неявной функции $F^0(u)$, чего всегда можно добиться введением малых, строго выпуклых добавок.

3. *Применение штрафных функций.* В описанном выше методе за нарушение ограничений (3.34) как бы вводится штраф, определяемый множителями Лагранжа. Этот штраф можно вводить и другими способами. Например, вместо минимизации функции (3.31) при ограничениях (3.32) — (3.34) минимизировать функцию

$$f^0(x, u) + \sum_{i=1}^{r} C \max(0, f^i(x, u)),$$

где C — достаточно большое число, при ограничениях (3.32), (3.33). Однако решить эту задачу методом, изложенным в § 3, невозможно, поскольку функция цели не имеет непрерывных производных (см. § 10). Можно штрафную функцию построить иным способом, например, рассмотреть непрерывно дифференцируемую функцию

$$f^0(x, u) + \sum_{i=1}^{r} C \max(0, f^i(x, u)) f^i(x, u),$$

для минимизации которой при ограничениях (3.32) — (3.33) уже применим метод линеаризации.

§ 5. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ЛИНЕАРИЗОВАННЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА

Предположим, что поведение управляемого объекта описывается нелинейными уравнениями

$$x(k+1) = g(x(k),\ u(k),\ k),\quad x(0) = x^0,\qquad (k = \overline{0,\ N-1}) \tag{3.36}$$

при условии

$$u(k) \in \mathrm{U}(k),\qquad (k = \overline{0,\ N-1}), \tag{3.37}$$

где $g(\cdot) = (g_1(\cdot),\ \ldots,\ g_n(\cdot))$. Пусть $\mathrm{U}(k)$, $(k = \overline{0,\ N-1})$ — выпуклое замкнутое множество. Для простоты рассмотрим задачу минимизации функции цели, зависящей от состояния $x(N)$, т. е.

$$f^0(x(N)). \tag{3.38}$$

Пусть $u^0(k)$ — произвольное начальное управление, $x^0(k)$ — соответствующая ему траектория; $\overset{s}{u}(k)$ и $\overset{s}{x}(k)$ — управление и траектория, полученные после s итераций. Новое управление $u(k)$ отыскиваем по формуле

$$u_\rho(k) = u^s(k) + \rho(u(k) - u^s(k)),$$

где $u(k)$ — некоторое, пока неизвестное управление; ρ — шаговый множитель. Заметим, что при $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ вектор $u_\rho(k) \in \mathrm{U}(k)$, поскольку множество $\mathrm{U}(k)$ — выпуклое.

Представим траекторию, отвечающую управлению $u_\rho(k)$, в следующем виде:

$$x_\rho(k) = x^s(k) + \rho x(k) + o(\rho),\qquad (k = \overline{1,\ N})$$

и найдем соотношения, связывающие $u(k)$ и $x(k)$:

$$\begin{aligned} x_{\rho j}(k+1) &= \overset{s}{x}_j(k+1) + \rho x_j(k+1) + o(\rho) = \\ &= g_j(x^s(k) + \rho x(k) + o(\rho),\ u^s(k) + \rho(u(k) - u^s(k)),\ k) = \\ &= g_j(x^s(k),\ u^s(k),\ k) + \rho(g_{jx}(x^s(k),\ u^s(k),\ k),\ x(k)) + \\ &+ \rho(g_{ju}(x^s(k),\ u^s(k),\ k),\ u(k) - u^s(k)) + o(\rho). \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом уравнений (3.36), которым удовлетворяют $\overset{s}{u}(k)$ и $\overset{s}{x}(k)$, получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} x_j(k+1) &= (g_{jx}(x^s(k),\ u^s(k),\ k),\ x(k)) + \\ &+ (g_{ju}(x^s(k),\ u^s(k),\ k),\ u(k) - u^s(k)),\qquad (k = \overline{0,\ N-1}). \end{aligned}$$

Поэтому неизвестное управление $u(k)$ и $x(k)$ можно найти путем решения следующей простейшей задачи: минимизировать линейную функцию цели

$$(f_x^0(x^s(N)),\ x(N))$$

при ограничениях

$$x_j(k+1) = (g_{jx}(x^s(k),\ u^s(k),\ k),\ x(k)) +$$
$$+ (g_{ju}(x^s(k),\ u^s(k),\ k),\ u(k) - u^s(k)),\quad x_j(0) = 0,\qquad (k = \overline{0,\ N-1});$$
$$u(k) \in \mathrm{U}(k),\quad (k = \overline{0,\ N-1}).$$

Пусть $\bar{u}^s(k)$ и $\bar{x}^s(k)$ — оптимальные управления и траектория. В соответствии с дискретным принципом максимума эти векторы определяются следующим образом:

$$\bar{x}_j^s(k+1) = (g_{jx}(x^s(k),\ u^s(k),\ k),\ \bar{x}^s(k)) +$$
$$+ (g_{ju}(x^s(k),\ u^s(k),\ k),\ \bar{u}^s(k) - u^s(k)),\ \bar{x}_j^s(0) = 0,$$
$$(k = \overline{0,\ N-1});$$

$$\bar{\lambda}^s(k) = \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j^s(k+1)\, g_{jx}(x^s(k),\ u^s(k),\ k),\quad \bar{\lambda}^s(N) = -f_x^0 x^s(N)),$$
$$(k = \overline{N-1,\ 0});$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j^s(k+1)\, g_{ju}(x^s(k),\ u^s(k),\ k),\ \bar{u}^s(k)\right) =$$
$$= \max_{u \in \mathrm{U}(k)} \left(\sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j^s(k+1)\, g_{ju}(x^s(k),\ u^s(k),\ k),\ u\right).$$

Эти соотношения получили название линеаризованного принципа максимума. Если $\bar{u}^s(k)$ удовлетворяет этим соотношениям, то новое управление, как было сказано выше, отыскивается по формуле

$$u^{s+1}(k) = u^s(k) + \rho_s(\bar{u}^s(k) - u^s(k)),$$

где $0 \leqslant \rho_s \leqslant 1$. Новую траекторию $x^{s+1}(k)$ можно было бы определить следующим образом:

$$x^{s+1}(k) = x^s(k) + \rho_s \bar{x}^s(k),$$

не решая уравнений (3.36), где ρ_s, $s = 0, 1, \ldots$ определялось бы из соотношений

$$f^0(x^s(N) + \rho_s \bar{x}^s(N)) = \min_{0 \leqslant \rho \leqslant 1} f^0(x^s(N) + \rho \bar{x}^s(N)).$$

Однако, если при этом ρ_s недостаточно мало, то между $x^{s+1}(k)$ и истинной траекторией, удовлетворяющей соотношениям (3.36) при заданном $u^{s+1}(k)$, будет, вообще говоря, расхождение. Чтобы это расхождение не стало значительным в процессе дальнейших итераций, необходимо на некоторых итерациях корректировать траекторию. Для этого можно рассматривать траектории $x_\rho^s(k)$, удовлетворяющие соотношениям (3.36) при всевозможных

$$u_\rho^s(k) = u^s(k) + \rho(\bar{u}^s(k) - u^s(k)),$$

где $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, и в качестве траектории $x^{s+1}(k) = x^s_{\rho_s}(k)$ выбирать ту из них, при которой

$$f^0(x^s_{\rho_s}(N)) = \min_{0 \leqslant \rho \leqslant 1} f^0(x^s_\rho(N)).$$

В случае ограниченности вторых производных функций $f^0(x)$ и $g(x, u, \cdot)$ можно получить оценку снизу шага ρ_s. Получим эту оценку для разностного аналога (1,4) — (1,6) гл. 1. Пусть после s итераций получено решение $u^s(t)$, $x^s(t)$. Улучшенное допустимое управление будем искать в виде

$$u_\rho(t) = u^s(t) + \rho(u(t) - u^s(t)), \qquad t = 0, h, \ldots, T-h; \quad 0 < \rho \leqslant 1,$$

где $u(t)$ — пока неизвестное управление.

Соответствующую этому управлению траекторию представим так:

$$x_\rho(t) = x^s(t) + \rho x(t) + \rho^2 \alpha_\rho(t), \quad t = 0, h, \ldots, T,$$

причем ради простоты записи в дальнейшем будем писать $\alpha(t)$ вместо $\alpha_\rho(t)$.

После подстановки этих выражений в уравнения (1.5) будем иметь для величин $x(t)$ следующую систему рекуррентных соотношений:

$$x(t+h) =$$

$$= x(t) + h\{(g_x(x^s(t), u^s(t), t), x(t)) + (g_u(x^s(t), u^s(t), t), u(t) - u^s(t))\},$$

$$t = 0, h, \ldots, T-h; \quad x(0) = 0, \tag{3.39}$$

а для величин $\alpha(t)$ — такую систему:

$$\alpha(t+h) = \alpha(t) + h(g_x(x^s(t), u^s(t), t), \alpha(t)) +$$

$$+ \frac{h}{2}\Bigg\{\sum_{i,j=1}^{n} \eta^{(1)}_{ij}(t)(x_i(t) + \rho\alpha_i(t))(x_j(t) + \rho\alpha_j(t)) +$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \eta^{(2)}_{ij}(t)(x_i(t) + \rho\alpha_i(t))(u_j(t) - u^s_j(t)) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{m} \eta^{(3)}_{i,j}(t)(u_i(t) - u^s_i(t))(u_j(t) - u^s_j(t))\Bigg\}, \qquad t = 0, h, \ldots, T-h;$$

$$\alpha(0) = 0,$$

где вторые производные функций g по переменным x и u ограничены в совокупности по модулю: $|\eta^{(1)}_{ij}(t)| \leqslant M_{xx}$, $|\eta^{(2)}_{ij}(t)| \leqslant M_{xu}$, $|\eta^{(3)}_{ij}(t)| \leqslant M_{uu}$.

Понимая в дальнейшем под нормой вектора сумму модулей его компонент, займемся оценкой величин $\alpha(t)$:

$$\|\alpha(t+h)\| \leqslant (1 + L_x h)\|\alpha(t)\| + \frac{nh}{2}[M_{xx}(\|x(t)\| + \rho\|\alpha(t)\|)^2 +$$

$$+ 2M_{xu}D(\|x(t)\| + \rho\|\alpha(t)\|) + M_{uu}D^2], \qquad \|\alpha(0)\| = 0,$$

где $L_x = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \sum\limits_{j=1}^{n} \max \left| \frac{\partial g_i(\cdot)}{\partial x_i} \right|$, а D — сумма длин m ребер гиперпараллелепипеда, описанного вокруг множества U.

Из (3.39) найдем необходимую оценку величины $\| x(t) \|$:

$$\| x(t+h) \| \leqslant (1 + L_x h) \| x(t) \| + L_u D h, \quad \| x(0) \| = 0,$$

откуда немедленно получаем

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \| x(t) \| \leqslant \frac{L_u D}{L_x} (e^{L_x T} - 1) = G,$$

где $L_u = \max\limits_{i=1,\ldots,m} \sum\limits_{j=1}^{n} \max \left| \frac{\partial g_j(\cdot)}{\partial u_i} \right|$.

Тогда после несложных преобразований

$$\| \alpha(t+h) \| \leqslant Ph + [1 + (L_x + Q\rho) h] \| \alpha(t) \| + R\rho^2 h \| \alpha(t) \|^2,$$
$$t = 0,\ h,\ \ldots,\ T-h; \quad \| \alpha(0) \| = 0,$$

где

$$P = \frac{n}{2} (M_{xx} G^2 + 2M_{xu} DG + M_{uu} D^2), \quad Q = n (M_{xx} G + M_{xu} D),$$
$$R = \frac{n}{2} M_{xx}.$$

Очевидно, что максимальная оценка для величин $\alpha(t)$ получится при $h \to 0$. Обозначая ее через $\gamma(t)$, приходим к заключению, что она должна удовлетворять следующему дифференциальному нелинейному неравенству:

$$\dot{\gamma}(t) \leqslant P + (L_x + Q\rho) \gamma(t) + R\rho^2 \gamma^2(t), \quad \gamma(0) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Решая это неравенство, получим оценочную функцию $\Gamma(\rho)$:

$$\Gamma(\rho) = \begin{cases} \dfrac{2P\left(e^{\sqrt{E(\rho)}\,T} - 1\right)}{Q\rho + L_x + \sqrt{E(\rho)} - \left(Q\rho + L_x - \sqrt{E(\rho)}\right) e^{\sqrt{E(\rho)}\,T}}, & \text{если } 0 \leqslant \rho \leqslant \rho_*, \\[2ex] \dfrac{2P \operatorname{tg}\left(\dfrac{\sqrt{-E(\rho)}\,T}{2}\right)}{\sqrt{-E(\rho)} - (Q\rho + L_x) \operatorname{tg}\left(\dfrac{\sqrt{-E(\rho)}\,T}{2}\right)}, & \text{если } \rho_* \leqslant \rho \leqslant 1, \end{cases}$$

где

$$E(\rho) = (Q^2 - 4PR)\rho^2 + 2QL_x\rho + L_x^2 = (Dn)^2 (M_{xu}^2 - M_{xx} M_{uu}) \rho^2 + $$
$$+ 2QL_x\rho + L_x^2,$$

$$\rho_* = \begin{cases} \dfrac{L_x}{2\sqrt{PR} - Q}, & \text{если } \dfrac{L_x}{2\sqrt{PR} - Q} \in [0,\ 1], \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что приведенная здесь функция $\Gamma(\rho)$ нас будет интересовать лишь на отрезке от нуля до значения $\rho_{**} \leqslant 1$, где она впервые обращается в $+\infty$ (если такое случится).

Новое значение функции цели в соответствии с так проварьированным управлением можно записать следующим образом:

$$f^0(x(T)) = f^0(x^s(T)) + (f_x^0(x^s(T)),\ \Delta x(T)) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\eta_{ij}^{(0)}\Delta x_i(T)\,\Delta x_j(T),$$

где вторые производные целевой функции предполагаются ограниченными по модулю $|\eta_{ij}^{(0)}| \leqslant M_{xx}^0$, а

$$\Delta x(T) = x_\rho(T) - x^s(T) = \rho x(T) + \rho^2\alpha(T).$$

Учитывая это, а также полученную оценку для величины $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|\alpha(t)\|$, получим

$$f^0(x_\rho(T)) \leqslant f^0(x^s(T)) + \rho(f_x^0(x^s(T)),\ x(T)) + \\ + \rho^2\left\{L_x^0\Gamma(\rho) + \frac{M_{xx}^0}{2}(G + \rho\Gamma(\rho))^2\right\}, \qquad (3.40)$$

где

$$L_x^0 = \max_{i=1,\ldots,n}\max\left|\frac{\partial f^0(\cdot)}{\partial x_i}\right|.$$

Нетрудно показать с учетом (3.39), что

$$(f_x^0(x^s(T)),\ x(T)) = -h\sum_{t=0}^{T-h}((\bar\lambda^s(t+h),\ g_u(x^s(t),\ u^s(t),\ t)),\ u(t) - u^s(t)),$$

где величины $\bar\lambda^s(t)$ находятся из уравнений

$$\begin{cases} \bar\lambda^s(t) = \bar\lambda^s(t+h) + h(\bar\lambda^s(t+h),\ g_x(x^s(t),\ u^s(t),\ t)), \\ \qquad\qquad t = T-h,\ \ldots,\ h \\ \bar\lambda(T) = -f_x^0(x^s(T)). \end{cases}$$

Выберем теперь управление $u(t)$ из условия минимума функции $(f_x^0(x^s(T)),\ x(T))$, т. е. из условий

$$\max_{u(t)\in U}((\bar\lambda^s(t+h),\ g_u(x^s(t),\ u^s(t),\ t)),\ u(t) - u^s(t)).$$

Обозначая оптимальные значения переменных $u(t)$ через $\bar u^s(t) \in U$, сумму по t от 0 до $T-h$ вышезаписанных максимумов, умноженную на h, через $m_s > 0$, перепишем неравенство (3.40) так:

$$f^0(x_\rho(T)) \leqslant f^0(x^s(T)) - m_s\rho + \rho^2\left\{L_x^0\Gamma(\rho) + \frac{M_{xx}^0}{2}(G + \rho\Gamma(\rho))^2\right\} = \\ = f^0(x^s(T)) + W_s(\rho)^*.$$

Пусть минимум функции $W_s(\rho)$ на отрезке $[0,\ \rho_{**}]$ достигается для некоторого ρ_s. Вибирая его в качестве шага спуска в простран-

* Эту оценку можно улучшить, пользуясь текущими оценками величин L_x, L_x^0, G, D.

стве управляющих переменных, улучшенное управление получаем по формуле

$$u^{s+1}(t) = u^s(t) + \rho_s(\bar{u}^s(t) - u^s(t)).$$

Построенное решение лучше исходного, так как из предыдущего неравенства при $\rho = \rho_s$ вытекает, что

$$f^0(x^s(T)) - f^0(x^{s+1}(T)) \geqslant - W_s(\rho_s) > 0.$$

§ 6. ДИСКРЕТНЫЙ ПРИНЦИП КВАЗИМАКСИМУМА

В предыдущих параграфах показано, что дискретный принцип максимума для простейшей задачи оптимального управления позволяет развить численные методы решения широкого класса задач оптимального управления. Покажем, что принцип максимума для задач оптимального управления с дискретным временем не может быть справедлив в той степени, в какой он выполняется для задач с непрерывным временем, т. е. что при переходе от непрерывной задачи оптимального управления к ее разностному аналогу принцип максимума Понтрягина, вообще говоря, нарушается, однако он выполняется тем точнее, чем меньше значение шага разностной сетки [28]. Установим неравенства, из которых это и будет следовать.

Рассмотрим задачу минимизации функции

$$F(u) = F(u(0), \ldots, u(T-h)) = f^0(x(T)) \tag{3.41}$$

при условиях

$$x(t+h) = x(t) + hg(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x^0,$$
$$t = 0, h, \ldots, T-h \tag{3.42}$$

$$u(t) \in \mathrm{U}(t), \quad t = 0, h, \ldots, T-h. \tag{3.43}$$

Пусть $x(t)$ и $u(t)$ — соответственно траектория и управление этой задачи. Рассмотрим управление $u(t) + \delta u(t) \in \mathrm{U}(t)$, где $\delta u(t) \neq 0$ при $t = \tau$ и $\delta u(t) = 0$ при $t \neq \tau$, $0 \leqslant \tau \leqslant T - h$. Оценим приращение функции цели

$$\delta F(u) = F(u + \delta u) - F(u).$$

Если управление $u(t)$ — оптимальное, то $\delta F(u) \geqslant 0$. Покажем, что отсюда следует справедливость дискретного принципа максимума с точностью до величин $o(h)/h$, если функции $f^0(x)$, $g_i(x, u, t)$ $(i = \overline{1, n})$ непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют равномерному условию Липшица по переменной x, функции $g_i(x, u, t)$ непрерывны по переменной u и ограничены по переменной t, а множества $\mathrm{U}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ ограничены.

Пусть $\tilde{x}(t) = x(t) + \delta x(t)$ — траектория, отвечающая управлению $u(t) + \delta u(t)$. Очевидно, что

$$\delta x(\tau + h) = h[g(x(\tau), u(\tau) + \delta u(\tau), \tau) - g(x(\tau), u(\tau), \tau)],$$
$$\delta x(t) = 0, \quad t \leqslant \tau. \tag{3.44}$$

Поскольку $\delta u(\tau) = 0$ при $t > \tau$, то при $t \geqslant \tau + h$

$$\tilde{x}(t+h) = \tilde{x}(t) + hg(\tilde{x}(t), u(t), t).$$

Следовательно, для $\delta x(t) = \tilde{x}(t) - x(t)$, $t \geqslant \tau + h$, где $x(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$x(t+h) = x(t) + hg(x(t), u(t), t),$$

имеем уравнения

$$\delta x(t+h) = \delta x(t) + h[g(\tilde{x}(t), u(t), t) - g(x(t), u(t), t)],$$
$$t \geqslant \tau + h, \qquad (3.45)$$

которые ввиду непрерывной дифференцируемости функций $g_i(x, u, t)$ по переменной x можно записать в виде

$$\delta x(t+h) = \delta x(t) + h(g_x(x(t), u(t), t), \delta x(t)) + h \cdot o(\|\delta x(t)\|),$$
$$t \geqslant \tau + h,$$
$$\delta x(\tau + h) = h[g(x(\tau), u(\tau) + \delta u(\tau), \tau) - g(x(\tau), u(\tau), \tau)].$$

Пусть $\lambda_i(t)$, $(i = \overline{1,n};\ t = \overline{0, T})$ — пока произвольные числа. Приращение δF можно представить следующим образом:

$$\delta F = (f_x^0(x(T)), \delta x(T)) + o(\|\delta z(T)\|) +$$
$$+ \sum_{t=\tau+h}^{T-h} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t+h)[\delta x_i(t+h) - \delta x_i(t) -$$
$$- h(g_{ix}(x(t), u(t), t), \delta x(t)) - h \cdot o(\|\delta x(t)\|)] =$$
$$= (f_x^0(x(T)) + \lambda(T), \delta x(T)) - (\lambda(\tau+h), \delta x(\tau+h)) +$$
$$+ \sum_{t=\tau+h}^{T-h} \left(\lambda(t) - \lambda(t+h) - h\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t+h) g_{ix}(x(t), u(t), t), \delta x(t)\right) +$$
$$+ o(\|\delta x\|),$$

где $o(\|\delta x\|) = o(\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \|\delta x(t)\|)$, если предположить ограниченность величин $\lambda(t)$, что в дальнейшем будет установлено после конкретного выбора этих величин. Если в качестве $\lambda_i(t)$, $(i = \overline{1, n})$ выбрать сопряженные переменные, удовлетворяющие следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \lambda(t) = \lambda(t+h) - h\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(t+h) g_{ix}(x(t), u(t), t), \\ t = \overline{(T-h, 0)}, \quad \lambda(T) = -f_x^0(x(T)), \end{cases} \qquad (3.46)$$

то для приращения δF имеем

$$\delta F = -(\lambda(\tau+h), \delta x(\tau+h)) + o(\|\delta x\|),$$

а ограниченность величин $\lambda(t)$ вытекает из (3.46) в силу предположений относительно функций $f^0(x)$ и $g(x, \cdot)$. Так как

$$\delta x(\tau+h) = h[g(x(\tau), u(\tau) + \delta u(\tau), \tau) - g(x(\tau), u(\tau), \tau)],$$

то

$$\delta F = h(\lambda(\tau+h),\ g(x(\tau),\ u(\tau),\ \tau) - g(x(\tau),\ u(\tau)+\delta u(\tau),\ \tau)) + \\ + o(\|\delta x\|).$$

Рассмотрим функцию Гамильтона

$$H(\lambda(\tau+h),\ x(\tau),\ u(\tau),\ \tau) = (\lambda(\tau+h),\ g(x(\tau),\ u(\tau),\ \tau)),$$

тогда предыдущее соотношение можно записать следующим образом:

$$\frac{\delta F}{h} = H(\lambda(\tau+h),\ x(\tau),\ u(\tau),\ \tau) - H(\lambda(\tau+h),\ x(\tau),\ u(\tau) + \\ + \delta u(\tau),\ \tau) + \frac{o(\|\delta x\|)}{h}.$$

Перейдем к оценке $o(\|\delta x\|)$. Из соотношения (3.45) следует, что

$$\|\delta x(t+h)\| \leqslant (1+L_x h)\|\delta x(t)\|, \quad t \geqslant \tau + h,$$

откуда легко получить, что

$$\|\delta x(t)\| \leqslant e^{L_x T}\|\delta x(\tau+h)\|, \quad t \geqslant \tau + h.$$

Так как

$$\|\delta x(\tau+h)\| = h\|g(x(\tau),\ u(\tau)+\delta u(\tau),\ \tau) - g(x(\tau),\ u(\tau)\,\tau)\|,$$

то в силу сделанных предположений $\|\delta x(\tau+h\| \leqslant Ch$, т. е.

$$\|\delta x(t)\| \leqslant Ce^{L_x T}h, \quad t \geqslant \tau + h.$$

Поэтому $o(\|\delta x\|) = o(h)$.

Пусть $\bar{u}(t)$ — оптимальное управление, т. е. $\delta F \geqslant 0$. Так как при этом не обязательно, чтобы $o(h) \leqslant 0$, то функция $H(\bar{\lambda}(\tau+h),$ $\bar{x}(\tau),\ u,\ \tau)$ при $u = \bar{u}(\tau)$ может не достигать максимального значения. Обозначим через $u^*(\tau)$, $u^*(\tau) = \bar{u}(\tau) + \delta u^*(\tau)$ управление, при котором функция $H(\bar{\lambda}(\tau+h),\ \bar{x}(\tau),\ u,\ \tau)$ достигает максимального значения. Так как $\delta F \geqslant 0$, то

$$0 \leqslant H(\bar{\lambda}(\tau+h),\ \bar{x}(\tau),\ u^*(\tau),\ \tau) - H(\bar{\lambda}(\tau+h),\ \bar{x}(\tau),\ \bar{u}(\tau),\ \tau) \leqslant \frac{o(h)}{h}.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. Пусть $\bar{u}(t)$ — оптимальное управление, $\bar{x}(t)$, $\bar{\lambda}(t)$ — соответствующие ему траектория и сопряженные переменные, $u^*(t)$ — управление, при котором функция Гамильтона $H(\bar{\lambda}(t+h),$ $\bar{x}(t),\ u,\ t)$ принимает максимальное значение. Пусть функции $f^0(x)$, $g_i(x,\ u,\ t)$ непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют равномерному условию Липшица по переменной x, функции $g(x,$ $u,\ t)$ непрерывны по переменной u и ограничены по переменной t, множества $U(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ ограничены. Тогда

$$0 \leqslant \delta H = H(\bar{\lambda}(t+h), \bar{x}(t), u^*(t), t) - H(\bar{\lambda}(t+h), \bar{x}(t), \bar{u}(t), t) \leqslant \leqslant \frac{o(h)}{h}. \qquad (3.47)$$

В случае ограниченности вторых производных функций $f^0(x)$ и $g(x, \cdot)$, очевидно, можно указать константу K, при которой будет выполнено неравенство $o(h) \leqslant Kh^2$*.

§ 7. ГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ. О МЕТОДАХ ВОЗМОЖНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

В предыдущих параграфах этой главы изложены принципиальные схемы численных методов, основанные на сведении общих задач оптимального управления к простейшей задаче. Эффективность этих методов зависит от трудоемкости решения простейшей задачи с помощью дискретного принципа максимума, т. е. от трудоемкости минимизации при каждом $k = \overline{0, N-1}$ функции (см. (3.12))

$$F(v) = (\lambda(k+1), \quad g(v, k)) - (d(k), v) \qquad (3.48)$$

при $v \in U(k)$. Это — весьма общая задача математического программирования, простота решения которой определяется спецификой множеств $U(k)$ и функций $g(v, k)$.

1. Основная идея. Общая идея градиентных методов весьма проста. Пусть требуется минимизировать непрерывно дифференцируемую функцию $h(v) = h(v_1, \ldots, v_n)$. Поставим вопрос о том, в каком направлении $e = (e_1, \ldots, e_n)$ следует сместиться из точки v так, чтобы в новой точке $v + \rho e$ (здесь ρ — шаговый множитель) значение функции $h(v + \rho e)$ было больше, чем $h(v)$. Так как $h(v)$ — непрерывно дифференцируемая функция, то

$$h(v + \rho e) = h(v) + \rho \sum_{i=1}^{n} h_{v_i}(v) e_i + o(\rho) = h(v) + \rho(h_v(v), e) + o(\rho),$$

где $h_v(v) = \left(\frac{\partial h(v)}{\partial v_1}, \ldots, \frac{\partial h(v)}{\partial v_n}\right)$, $o(\rho)/\rho \to 0$ при $\rho \to 0$.

Следовательно, если $\sum_{i=1}^{n} h_{v_i}(v) e_i > 0$, то при достаточно малом $\rho h(v + \rho e) > h(v)$. При этом, в точке v не должны выполняться равенства $h_{v_i}(v) = 0$, $(i = \overline{1, n})$.

---

* Так как в результате аппроксимации непрерывной задачи может возникнуть много «ложных» локальных минимумов, то, прежде чем применять общие методы математического программирования, следует строить численные алгоритмы поиска окрестностей сильного экстремума функционала, основываясь на полученной формуле $\delta F = -\delta H h + 0(h)$.

6*

В частности, предыдущее неравенство будет выполнено, если $e_i = h_{v_i}(v)$.

Вектор $h_v(v) = \left(\frac{\partial h(v)}{\partial v_1}, \ldots, \frac{\partial h(v)}{\partial v_n}\right)$ называется градиентом функции $h(v)$ в точке v. Этот вектор характеризует направление возрастания функции $h(v)$ и направлен по нормали к касательной гиперплоскости, проведенной в точке v к линии уровня $\{w : h(w) = h(v)\}$ (рис. 1).

Вектор $-h_v(v)$ называется антиградиентом функции $h(v)$ в точке v. Он, очевидно, характеризует направление убывания функции $h(v)$.

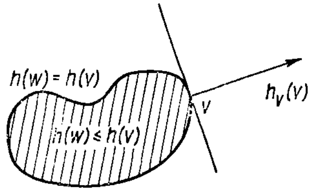

Рис. 1.

В соответствии с этим градиентные методы максимизации или минимизации функции $h(v)$ определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$v^{s+1} = v^s \pm \rho_s h_v(v^s), \quad (s = 0, 1, \ldots),$$

где s — номер итерации; ρ_s — шаговый множитель в s-й итерации; x^0 — произвольное начальное приближение; знак плюс или минус берется в зависимости от того, максимизируется или минимизируется соответственно функция $h(v)$.

Сложность применения этой общей идеи для решения задач оптимального управления состоит в том, что функция цели таких задач неявно зависит от неизвестных переменных (управлений) $u(0), \ldots, u(N-1)$.

Рассмотрим задачу выбора оптимального управления $u(0), \ldots, u(N-1)$, минимизирующего $f^0(x(0), \ldots, x(N), u(0), \ldots, u(N-1))$ при условии, что поведение управляемого процесса описывается системой разностных уравнений

$$x(k+1) = g(x(k), u(k), k), \quad x(0) = x^0, \quad (k = \overline{0, N-1}) \tag{3.49}$$

при ограничениях

$$f^i(x(0), \ldots, x(N), u(0), \ldots, u(N-1)) \leqslant 0, \quad (i = \overline{1, r}).$$

В силу уравнений движения (3.49) значение $x(k)$ полностью определяется начальным состоянием x^0 и последовательностью управлений $u(0), \ldots, u(k-1)$, т. е. можно записать

$$x(k) = \chi(x^0, u(0), \ldots, u(k-1));$$

поэтому при фиксированном x^0

$$f^\nu(x(0), \ldots, x(N), u(0), \ldots, u(N-1)) = F^\nu(u(0), \ldots, u(N-1)),$$
$$(\nu = \overline{0, r}),$$

и сформулированная выше задача равносильна задаче минимизации неявной функции $F^0(u(0), \ldots, u(N-1))$ при ограничениях

$$F^i(u(0), \ldots, u(N-1)) \leqslant 0, \quad (i = \overline{1, r}).$$

Если найти формулы для вычисления градиентов или субградиентов (в негладком случае) неявных функций $F^{\nu}(u)$ $(\nu = \overline{0, r})$, то для решения полученной задачи в принципе можно применить любой метод нелинейного программирования.

Установим формулы для вычисления градиентов неявно заданных функций вида $F^{\nu}(u)$. Рассмотрим вначале случай, когда

$$F(u(0), \ldots, u(N-1)) = f(x(N)),$$

т. е. неявная функция — функция конечного состояния управляемого процесса.

Найдем формулы для вычислени я градиента $F_u(u) = (F_{u(0)}(u), \ldots, F_{u(N-1)}(u)$ неявной функции $F(u)$, $u = (u(0), \ldots, u(N-1))$. Покажем, что существуют простые рекуррентные соотношения, связывающие $F_{u(k+1)}(u)$ и $F_{u(k)}(u)$, которые и позволяют определить $F_u(u)$. Поясним это вначале эвристически, а затем дадим более обоснованный вывод необходимых соотношений.

По условию (3.49), значение $x(N)$ можно выразить через $x(N-1)$, затем через $x(N-2)$ и т. д. Иначе говоря, функция $f^0(x(N))$ при фиксированных $u(k), \ldots, u(N-1)$ зависит от состояния управляемой системы $x(k)$ в произвольный момент времени $k = \overline{0, N}$, т. е.

$$f^0(x(N)) = \psi(k, x(k)) = v(k).$$

Тогда

$$F_{u(k)}(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi(k+1, x(k+1))}{\partial x_i(k+1)} \frac{dx_i(k+1)}{du(k)} = \sum_{i=1}^{n} v_{x_i}(k+1) g_{iu}(x(k), u(k), k). \tag{3.50}$$

В свою очередь, для определения $v_x(k)$ можно получить рекуррентные соотношения, исходя из того, что

$$f^0(x(N)) = \psi(N-1, x(N-1)) = f^0(g(x(N-1), u(N-1), N-1)) = \psi(N-2, x(N-2)) = \psi(N-1, g(x(N-2), u(N-2), N-2)) = \cdots = \psi(k, x(k)) = \psi(k+1, g(x(k), u(k), k)) = \cdots;$$

тогда

$$v_{x_j}(k) = \psi_{x_j(k)}(k+1, x(k+1)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi(k+1, x(k+1))}{\partial x_i(k+1)} \times \frac{dx_i(k+1)}{dx_j(k)} = \sum_{i=1}^{n} v_{x_i}(k+1) \frac{\partial}{\partial x_j(k)} g_i(x(k), u(k), k)$$

и, следовательно,

$$\begin{cases} v_x(k) = \sum_{i=1}^{n} v_{x_i}(k+1)\, g_{ix}(x(k),\ u(k),\ k) \quad (k = \overline{N-1, 0}), \\ v_x(N) = f_x^0(x(N)). \end{cases} \tag{3.51}$$

Соотношения (3.51) позволяют определить $v_x(N)$, $v_x(N-1)$ и т. д., наконец, $v_x(0)$, а затем из выражения (3.50) найти $F_{u(N-1)}(u)$, $F_{u(N-2)}(u)$ и т. д., т. е. найти градиент

$$F_u(u) = (F_{u\,(0)}(u),\quad F_{u\,(1)}(u),\ \ldots,\ F_{u\,(N-1)}(u))$$

функции $F(u(0), \ldots, u(N-1)) = f^0(x(N))$ по переменным $u = (u(0), \ldots, u(N-1))$.

Формула для градиента $F_u(u)$ дает возможность применить для задач оптимального управления общие идеи градиентных методов, а именно: берется произвольное начальное управление $u^0(k)$, $(k = \overline{0, N-1})$, а затем строится последовательность приближений

$$u^{s+1}(k) = u^s(k) - \rho_s F_{u\,(k)}(u^s(0),\ \ldots,\ u^s(N-1)),\quad (k = \overline{0,\ N-1}),$$

где $s = 0, 1, \ldots$, значения $F_{u(k)}(u^s)$ вычисляются согласно соотношениям (3.50) и (3.51). Дополнительные ограничения, в частности ограничения вида $u(k) \in U(k)$, $(k = \overline{0, N-1})$, учитываются при этом стандартными приемами нелинейного программирования.

Приведем другой, более строгий вывод соотношений (3.50) и (3.51), в котором во многом повторяются рассуждения предыдущего параграфа по обоснованию дискретного принципа максимума.

2. Общая формула. Установим общую формулу, по которой вычисляется градиент неявной функции

$$F(x(0),\ u(0),\ \ldots,\ u(N-1)) =$$
$$= f(x(0),\ \ldots,\ x(N),\ u(0),\ \ldots,\ u(N-1)) \tag{3.52}$$

при условии, что переменные $x(k)$ и $u(k)$ связаны соотношениями (3.49).

Пусть имеем управление $u(k)$, $(k = \overline{0, N-1})$. Рассмотрим управление $u(k) + \rho\delta u(k)$, $(k = \overline{0,\ N-1})$. Градиент $F_{u\,(k)}(u)$ функции $F(x(0), u(0), \ldots, u(N-1))$ по переменным $u(k)$ — это, согласно соотношению (3.48), коэффициенты при $\delta u(k)$ линейной части приращения $\Delta F(u) = F(u + \delta u) - F(u)$; поэтому выразим $\Delta F(u)$ через вариации управления $\delta u(k)$, $(k = \overline{0, N-1})$. Пусть управлению $u(k) + \rho\delta u(k)$ отвечает траектория $x(k) + \rho\delta x(k) + o(\rho)$, $(k = \overline{1, N})$, $x(0) + \rho\delta x(0)$.

Тогда $\quad \Delta F(u) = f(x(0) + \rho\delta x(0),\ \ldots,\ x(N) + \rho\delta x(N) +$
$$+ o(\rho),\ u(0) + \rho\delta u(0),\ \ldots,$$

$$u(N-1)+\rho\delta u(N-1))-f(x(0),\ \ldots,\ x(N),\ u(0),\ \ldots,\ u(N-1))=$$
$$=\rho\sum_{k=0}^{N}(f_{x(k)}(x,u),\ \delta x(k))+\rho\sum_{k=0}^{N-1}(f_{u(k)}(x,u),\ \delta u(k))+o(\rho)$$

в предположении, что функция $f(x, u)$ имеет непрерывные частные производные. В дальнейшем также предполагается, что и $g_j(x(\cdot), u(\cdot), \cdot)$, $(j=\overline{1, n})$—непрерывно дифференцируемые функции. Так как основная цель состоит в том, чтобы выразить ΔF через $\delta u(k)$, $(k=\overline{0,\ N-1})$, то найдем выражения, связывающие $\delta x\ (k)$ $(k=\overline{1,\ N})$ с $\delta u\ (k)$, $(k=\overline{0,\ N-1})$. Согласно уравнениям (3.49)

$$x_j(k+1)+\rho\delta x_j(k+1)+o(\rho)=g_j(x(k)+\rho\delta x(k)+o(\rho),\ u(k)+$$
$$+\rho\delta u\ (k),\ k)=g_j(x(k),\ u(k),\ k)+\rho(g_{jx}(x(k),\ u(k),\ k),\ \delta x(k))+$$
$$+\rho(g_{ju}(x(k),\ u(k),\ k),\ \delta u(k))+o(\rho),\quad (j=\overline{1,\ n}).$$

Таким образом,

$$\delta x_j(k+1)=(g_{jx}(x(k),\ u(k),\ k),\ \delta x(k))+(g_{ju}(x(k),\ u\ (k),\ k),\ \delta u(k)),$$
$$(j=\overline{1,\ n};\quad k=\overline{0,\ N-1}).$$

Рассмотрим пока произвольные $\lambda(k)=(\lambda_1\ (k),\ \ldots,\ \lambda_n(k))$ и представим $\Delta F\ (u)$ в виде

$$\Delta F(u)=\rho\sum_{k=0}^{N}(f_{x(k)}(x,u),\ \delta x(k))+\rho\sum_{k=0}^{N-1}(f_{u(k)}(x,u),\ \delta u(k))+$$
$$+\rho\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(k+1)[\delta x_j(k+1)-(g_{jx}(x(k),\ u(k),\ k),\ \delta x(k))-$$
$$-(g_{ju}(x(k),\ u(k),\ k),\ \delta u(k))]+o(\rho)=\rho(f_{x(N)}(x,\ u)+\lambda(N),$$
$$\delta x(N))+\rho\sum_{k=0}^{N-1}\left(\lambda(k)-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(k+1)\,g_{jx}(x(k),\ u(k),\ k)+f_{x(k)}(x,\ u),\right.$$
$$\left.\delta x(k)\right)+\rho\sum_{k=0}^{N-1}\left(-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(k+1)\,g_{ju}(x(k),\ u(k),\ k)+f_{u(k)}(x,\ u),\right.$$
$$\left.\delta u\ (k)\right)-\rho(\lambda(0),\ \delta x(0))+o(\rho);$$

следовательно, если $\lambda\ (k)$, $(k=\overline{N,\ 0})$ выбрать так, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{cases}\lambda(k)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(k+1)\,g_{jx}(x(k),\ u(k),\ k)-f_{x(k)}(x,\ u) & (k=\overline{N-1,\ 0}),\\ \lambda(N)=-f_{x(N)}(x,\ u), & \end{cases}\tag{3.53}$$

то получим

$$\Delta F(u)=\rho\sum_{k=0}^{N-1}\left(-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(k+1)\,g_{ju}(x(k),\ u(k),\ k)+\right.$$
$$\left.+f_{u(k)}(x,\ u),\ \delta u(k)\right)-\rho(\lambda(0),\ \delta x(0))+o(\rho).\tag{3.54}$$

Таким образом,

$$F_{u(k)}(x(0),\ u) = -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (k+1)\, g_{ju}(x(k),\ u(k),\ k) +$$
$$+ f_{u(k)}(x,\ u), \quad F_{x(0)}(x(0),\ u) = -\lambda(0). \tag{3.55}$$

Сопоставляя соотношения (3.53), (3.55) и (3.50), (3.51) при $f(x,\ u) = f(x(N))$, убеждаемся в том, что $\lambda(k) = -v_x(k)$. Это дает возможность интерпретировать значение $\lambda(k)$ как меру чувствительности функционала к изменению траектории в k-й момент времени, что может оказаться полезным при качественном анализе систем управления.

3. *О методах возможных направлений.* Формула (3.55) для вычисления градиента произвольной непрерывно дифференцируемой функции, заданной в неявном виде (3.52), позволяет в принципе говорить о применении в задачах оптимального управления большинства известных методов нелинейного программирования.

Пусть требуется минимизировать функцию цели

$$f^0(x(0),\ \ldots,\ x(N),\ u(0),\ \ldots,\ u(N-1)) \tag{3.56}$$

при условии

$$x(k+1) = g(x(k),\ u(x),\ k), \quad (k = \overline{0,\ N-1}) \tag{3.57}$$

и при дополнительных ограничениях следующего общего вида:

$$f^i(x(0),\ \ldots,\ x(N),\ u(0),\ \ldots,\ u(N-1)) \leqslant 0, \quad (i = \overline{1,r}). \tag{3.58}$$

Функции $f^\nu(x(0),\ \ldots,\ x(N),\ u(0), \ldots,\ u(N-1))$, $(\nu = \overline{0,\ r})$ неявно зависят от $x(0)$, $u(0)$, ..., $u(N-1)$; поэтому, если обозначить их через $F^\nu(x(0),\ u(0),\ \ldots,\ u(N-1))$, то задача (3.56) — (3.58) будет равносильна задаче минимизации функции $F^0(x(0),\ u(0), \ldots$ $\ldots,\ u(N-1))$ при ограничениях $F^i(x(0),\ u(0), \ldots,\ u(N-1)) \leqslant$ $\leqslant 0$, $(i = \overline{1,\ r})$.

Принципиальная схема методов возможных направлений выглядит следующим образом.

Пусть $x^0(0)$, $u^0(k)$ $(k = \overline{0,\ N-1})$ — произвольное начальное приближение; $x^s(0)$, $u^s(k)$, $(k = \overline{0,\ N-1})$ — приближенное начальное состояние и управление, полученное после s-й итерации. Тогда новое приближение строится по правилу

$$\begin{cases} x^{s+1}(0) = x^s(0) + \rho_s \delta x^s(0), \\ u^{s+1}(k) = u^s(k) + \rho_s \delta u^s(k) \qquad (k = \overline{0,\ N-1}), \end{cases}$$

где ρ_s — шаговый множитель, $\delta x^s(0)$, $\delta u^s(k)$ — направление движения из $x^s(0)$, $u^s(k)$. Чтобы при этом

$$F^0(x^{s+1}(0),\ u^{s+1}(0),\ \ldots,\ u^{s+1}(N-1)) < F^0(x^s(0),\ u^s(0),\ \ldots$$
$$\ldots,\ u^s(N-1)),$$

векторы $\delta x^s(0)$, $\delta u^s(k)$ должны удовлетворять неравенству

$$(F^0_{x(0)}(x^s(0),\ u^s),\ \delta x^s(0)) + \sum_{k=0}^{N-1} (F^0_{u(k)}(x^s(0),\ u^s),\ \delta u^s(k)) < 0.$$

Кроме того, должны выполняться соотношения

$$F^i(x^{s+1}(0),\ u^{s+1}(0),\quad u^{s+1}(N-1)) \leqslant 0,\quad (i = \overline{1, r}),$$

что ведет к соотношениям (для лимитирующих ограничений)

$$(F^l_{x(0)}(x^s(0),\ u^s),\ \delta x^s(0)) + \sum_{k=0}^{N-1} (F^l_{u(k)}(x^s(0),\ u^s), \delta u^s(k)) \leqslant 0,$$

которым также должны удовлетворять векторы $\delta x^s(0)$, $\delta u^s(k)$ $(k = \overline{0, N-1})$. В зависимости от способа нормирования направления спуска, борьбы с «заеданием» итерационного процесса, учета ограничений можно строить для конкретной задачи тот или иной метод возможных направлений*.

Специфика поиска направлений $\delta x^s(0)$, $\delta u^s(k)$, $(k = \overline{0, N-1})$, удовлетворяющих перечисленным выше требованиям, по сравнению с общими идеями методов возможных направлений [24], заключена в формулах для вычисления значений

$$F^\nu_{u(k)}(x^s(0),\ u^s),\qquad F^\nu_{x(0)}(x^s(0),\ u^s),\qquad (\nu = \overline{0, r}).$$

Эти значения вычисляются с помощью соотношений (3.53), (3.55).

Заметим еще, что после получения допустимых векторов $\delta x^s(0)$, $\delta u^s(k)$ методика определения шага спуска $0 < \rho_s \leqslant 1$ ничем не отличается от описанной в § 5.

§ 8. О МЕТОДЕ ЭРРОУ — ГУРВИЦА

Рассмотрим функцию Лагранжа

$$\psi(u, \mu) = F^0(u(0),\ \ldots,\ u(N-1)) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i F^i(u(0),\ \ldots,\ u(N-1)) = F^0(u) + (\mu,\ F(u)),$$

где $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m) \geqslant 0$, $u(k) \in \mathrm{U}(k)$, $(k = \overline{0, N-1})$, и определим последовательность приближений $u^s(k)$, μ^s, $s = 0,\ 1,\ \ldots$ по следующему правилу: $u^0(k)$ — произвольное начальное управление, μ^0 — неотрицательный вектор,

$$\begin{cases} u^{s+1}(k) = \Pi_{\mathrm{U}(k)}\left(u^s(k) - \rho_s\left[F^0_{u(k)}(u^s) + \sum_{i=1}^{r} \mu^s_i F^l_{u(k)}(u^s)\right]\right), \\ \mu^{s+1} = \max\{0,\ \mu^s + \delta_s F(u^s)\}, \end{cases} \tag{3.59}$$

---

* При решении задачи конечно-разностного аналога, представляющей собой зачастую задачу большой размерности, важное значение приобретают приемы декомпозиции, например, учет фазовых ограничений с помощью штрафных функций.

где $k = \overline{0, N-1}$; $s = 0, 1, \ldots$; $\pi_{U(k)}(\cdot)$ — оператор проектирования на область $U(k)$; $F^{\nu}_{U(k)}(u^s)$ вычисляются согласно соотношениям (3.55); ρ_s и δ_s — шаговые множители.

Условия сходимости метода (3.59) следуют из общих результатов сходимости метода Эрроу — Гурвица, в частности, как следует из работ [4, 20], величины ρ_s, δ_s можно выбирать произвольно, но так, чтобы при этом $\Sigma\rho_s = \infty$, $\Sigma\delta_s = \infty$, $\Sigma\rho_s^2 < \infty$, $\Sigma\delta_s^2 < \infty$.

Во многих задачах практики области $U(k)$ имеют сложный вид, так что операция проектирования весьма трудоемка. Поэтому эти ограничения можно также включать в функцию Лагранжа *.

В изложенных выше методах существенно использована формула для вычисления градиента неявной функции

$$F(u(0), \ldots, u(N-1)) = f(x(0), \ldots, x(N), u(0), \ldots u(N-1)),$$

где $\quad x(k+1) = g(x(k), u(k), k), \; x(0) = x^0, \quad (k = \overline{0, N-1})$.

Градиент функции $F(u(0), \ldots, u(N-1))$, как функции переменных $u(0), \ldots, u(N-1)$, выражается, согласно соотношениям (3.53), (3.55), через сопряженные переменные, его вычисление сводится к интегрированию систем уравнений для сопряженных переменных. Это часто сложно выполнить практически из-за того, что на интегрирование системы для сопряженных переменных затрачивается много времени, что снижает надежность счета. Кроме того, рассмотренные градиентные методы неприменимы для задач управления с негладкими функциями $f^0(x, u)$, $g(x(\cdot), u(\cdot), \cdot)$. Поэтому важное значение имеет развитие методов, аналогичных по простоте схемы градиентным методам и более универсальных, чем эти методы.

§ 9. МЕТОДЫ СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА

Идея градиентных методов основана на том, что градиент непрерывно дифференцируемой функции $h(v_1, \ldots, v_n)$ в текущей точке v^s направлен по нормали к касательной гиперплоскости (см. рис. 1), проведенной в точке v^s к поверхности уровня $h(v) = h(v^s)$.

Как видно из того же рисунка, антиградиент не является единственным вектором, характеризующим направление убывания функции $h(v)$.

Пусть $\theta^s = (\theta_1^s, \ldots, \theta_n^s)$ — произвольное направление. Тогда в силу того, что $h(v)$ — непрерывно дифференцируемая функция, либо θ^s, либо противоположное ему направление ведет к убыванию $h(v)$. Исходя из этой общей идеи, для решения сложных оптимизационных задач применяют методы случайного поиска, например

$$v^{s+1} = v^s - \rho_s \frac{h(v^s + \Delta_s\theta^s) - h(v^s)}{\Delta_s}\theta^s, \quad s = 0, 1, \ldots,$$

* В ряде случаев для задачи конечно-разностного аналога можно устанавливать существование квазиседловой точки и строить методы ее поиска.

где $\theta^s = (\theta_1^s, \ldots, \theta_n^s)$ — результат независимого наблюдения случайного вектора $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$, имеющего независимые и одинаково распределенные на $[-1, 1]$ компоненты; Δ_s — значение «пробного» шага.

В соответствии с этой общей идеей вместо градиента $F_u(u) = (F_{u(0)}(u), \ldots, F_{u(N-1)}(u))$ неявной функции $F(u(0), \ldots, u(N-1))$ можно применять случайные направления, вычисляемые следующим образом.

Для улучшения управления $u^s(k) = (u_1^s(k), \ldots, u_m^s(k))$ рассматривается случайный вектор $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ с независимыми, равномерно распределенными на отрезке $[-1, 1]$ компонентами. Обозначим через $\theta^s(0), \theta^s(1), \ldots, \theta^s(N-1)$ N независимых реализаций этого вектора. Рассмотрим управление $u^s(k) + \rho_s\theta^s(k)$, $(k = \overline{0, N-1})$, где ρ_s — шаговый множитель. Если при некотором $\rho = \rho_s$ значение

$$F(u^s + \rho_s\theta^s) < F(u^s),$$

то новое управление $u^{s+1}(k)$ находим по формуле

$$u^{s+1}(k) = u^s(k) + \rho_s\theta^s(k).$$

В противном случае, если $F(u)$ не имеет непрерывных производных наблюдается N новых реализаций вектора $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ и т. д.; если же $F(u)$ имеет непрерывные производные, то рассматриваем направление, противоположное направлению $\theta^s = (\theta^s(0), \ldots$ $\ldots, \theta^s(N-1))$, определяем затем ρ_s, при котором имеет место неравенство

$$F(u^s - \rho_s\theta^s) < F(u^s),$$

и полагаем $u^{s+1}(k) = u^s(k) - \rho_s\theta^s(k)$.

Это только принципиальная схема методов случайного поиска. В конкретной задаче, учитывая ее специфические особенности, распределение случайного вектора $\theta^s = (\theta^s(0), \ldots, \theta^s(N-1))$ можно изменять в зависимости от результатов предыдущих вычислений.

Кроме того, существует свобода выбора ρ_s; в частности, исходя из общих результатов работы [20], величины ρ_s можно выбирать из условий $\rho_s \geqslant 0$, $\Sigma\rho_s = \infty$, $\Sigma\rho_s^2 \leqslant \infty$, если $F(u)$ имеет ограниченные вторые производные, а $u^{s+1}(k)$ строится по следующему общему правилу:

$$u^{s+1}(k) = u^s(k) + \rho_s \frac{F(u^s + \Delta_s\theta^s) - F(u^s)}{\Delta_s} \theta^s(k),$$

где $\Sigma\rho_s\Delta_s < \infty$.

В тех задачах, в которых присутствуют дополнительные ограничения, выбираются такие реализации случайного вектора, которые не только приводят к уменьшению значений функции цели, но и ведут внутрь допустимой области.

§ 10. ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С НЕГЛАДКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Методы, рассмотренные в предыдущих параграфах, кроме методов случайного поиска, применимы для задач оптимального управления с непрерывно дифференцируемыми функциями цели. В градиентных методах правые части разностных уравнений, а именно функции $g(x, u, k)$, считались непрерывно дифференцируемыми по x, u, а в методах, основанных на дискретном принципе максимума, функции $g(x, u, k)$ имели непрерывные производные по x. На практике часто встречаются задачи с функциями цели, функциями ограничений и функциями $g(x, u, k)$, которые не имеют указанных непрерывных производных. Например, может возникнуть задача поиска управления $u(0), \ldots, u(N-1)$, при котором траектория управляемого процесса $x(0), \ldots, x(N)$ наименее отклоняется от заданной траектории $x^*(k)$, $(k = \overline{0, N})$, т. е. задача минимизации функции

$$F(u) = \max_{0 \leqslant k \leqslant N} \| x(k) - x^*(k) \|. \qquad (3.60)$$

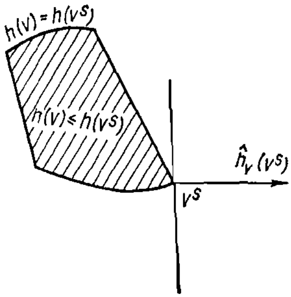

Рис. 2.

Одна из перспективных идей минимизации недифференцируемых функций состоит в следующем (см., например, работу [20]). Пусть имеется выпуклая вниз, но не обязательно непрерывно дифференцируемая функция $h(v_1, \ldots, v_n)$. В этом случае ее линии уровня могут иметь изломы, например, как в точке v^s на рис. 2.

Аналогом градиента в таких точках является вектор обобщенного градиента, или субградиент $\hat{h}_v(v)$ — вектор, удовлетворяющий неравенству

$$h(v) - h(v^s) \geqslant (\hat{h}_v(v^s), \ v - v^s)$$

при любых v. Заметим, что если $h(v)$ — непрерывно дифференцируемая функция, по этому неравенству удовлетворяет единственный вектор — градиент $h_v(v^s)$ функции $h(v)$. Если $h(v)$ не имеет непрерывных производных, то этому неравенству удовлетворяет некоторое множество векторов, каждый из которых направлен по внешней нормали к опорной гиперплоскости множества $\{v : h(v) \leqslant h(v^s)\}$.

Метод обобщенных градиентов для минимизации функции $h(v)$ определяется соотношениями, аналогичными рекуррентным соотношениям градиентного метода,

$$v^{s+1} = v^s - \rho_s \hat{h}_v(v^s), \quad s = 0, 1, \ldots .$$

В области недифференцируемой оптимизации в настоящее время развито достаточное количество приемов, позволяющих решать весьма общие экстремальные задачи с ограничениями. Основу этих методов составляют формулы для вычисления $\hat{h}_v(v)$, способы регулировки шаговых множителей ρ_s.

Укажем необходимые формулы для вычисления обобщенного градиента в задачах оптимального управления с недифференцируемыми функциями. Это даст возможность перенести на задачи оптимального управления большинство известных методов недифференцируемой оптимизации.

Пусть $f(x, u) = f(x(0), \ldots, x(N), u(0), \ldots, u(N-1))$ — выпуклая вниз по совокупности переменных (x, u) функция, где переменные $x(k)$, $(k = \overline{0, N})$, $u(k)$, $(k = \overline{0, N-1})$ удовлетворяют следующей системе разностных уравнений:

$$x(k+1) = A(k)\,x(k) + B(k)\,u(k) + c(k), \quad x(0) = x^0, \tag{3.61}$$

$$(k = \overline{0, N-1}).$$

В силу этого функция $f(x, u)$ неявно зависит только от переменных u, т. е. можно записать

$$f(x, u) = F(u).$$

Найдем формулу для вычисления обобщенного градиента $F(u)$.

Обозначим обобщенный градиент функции $f(x, u)$ по совокупности переменных (x, u) через $\hat{f}_{(x,u)}(x, u)$; компоненты этого вектора условимся обозначать следующим образом:

$$\hat{f}_{(x,u)}(x, u) = \hat{f}_{x(0)}(x, u), \ldots, \hat{f}_{x(N)}(x, u), \hat{f}_{u(0)}(x, u), \ldots,$$

$$\ldots, \hat{f}_{u(N-1)}(x, u),$$

т. е.

$$f(y, v) - f(x, u) \geqslant \sum_{k=0}^{N} (\hat{f}_{x(k)}(x, u),\ y(k) - x(k)) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{N-1} (\hat{f}_{u(k)}(x, u),\ v(k) - u(k)). \tag{3.62}$$

Обобщенный градиент функции $F(u)$ обозначим через $\hat{F}_u(u)$, его компоненты — аналогично компонентам $\hat{f}_{(x,u)}(x, u)$:

$$\hat{F}_u(u) = (\hat{F}_{u(0)}(u), \ldots, \hat{F}_{u(N-1)}(u)).$$

Рассмотрим систему разностных уравнений для сопряженных переменных

$$\begin{cases} \lambda(k) = \lambda(k+1)\,A(k) - \hat{f}_{x(k)}(x, u) \quad (k = \overline{N-1, 0}), \\ \lambda(N) = -\hat{f}_{x(N)}(x, u), \end{cases} \tag{3.63}$$

где $\hat{f}_{x(k)}(x, u)$, $(k = \overline{0, N})$ — компоненты произвольного обобщенного градиента $\hat{f}_{(x,u)}(x, u)$. Покажем, что компоненты обобщенного градиента $\hat{F}_u(u)$ вычисляются по формуле

$$\hat{F}_{u(k)}(u) = \hat{f}_{u(k)}(x, u) - \lambda(k+1) B(k). \qquad (3.64)$$

Для доказательства установим, что $\hat{F}_{u(k)}(u)$, вычисленные по формуле (3.64), удовлетворяют неравенству

$$F(v) - F(u) \geqslant \sum_{k=0}^{N-1} (\hat{F}_{u(k)}(u), v(k) - u(k)).$$

Пусть управлению $v(k)$, $(k = \overline{0, N-1})$ соответствует траектория $y(k)$, $(k = \overline{0, N})$. Тогда

$$F(v) - F(u) = f(y, v) - f(x, u) + (\lambda(0), y(0) - x^0) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda(k+1), y(k+1) - A(k) y(k) - B(k) v(k) - c(k)) -$$
$$- \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda(k+1), x(k+1) - A(k) x(k) - B(k) u(k) - c(k)) -$$
$$- (\lambda(0), x(0) - x^0),$$

где $\lambda(k)$, $(k = \overline{0, N})$ — пока некоторые векторы. Если воспользоваться неравенством (3.62) и сгруппировать слагаемые при $y(k) - x(k)$, $v(k) - u(k)$, то получим

$$F(v) - F(u) \geqslant \sum_{k=0}^{N-1} [(\hat{f}_{x(k)}(x, u), y(k) - x(k)) +$$
$$+ (\hat{f}_{u(k)}(x, u), v(k) - u(k))] + (\hat{f}_{x(N)}(x, u), y(N) - x(N)) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda(k) - \lambda(k+1) A(k), y(k) - x(k)) + (\lambda(N), y(N) -$$
$$- x(N)) - \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda(k+1) B(k), \quad v(k) - u(k)).$$

Если теперь выбрать такие $\lambda(k)$, которые удовлетворяют системе (3.63), то получим

$$F(v) - F(u) \geqslant \sum_{k=0}^{N-1} (\hat{f}_{u(k)}(x, u) - \lambda(k+1) B(k), v(k) - u(k)),$$

что и требовалось доказать.

Очевидно, что в том случае, когда состояние $x(0)$ не фиксировано,

$$\hat{F}_{x(0)}(x(0), u) = -\lambda(0).$$

Формула (3.64) позволяет применить к решению задач оптимального управления с негладкими функциями цели, фазовыми ограничениями все известные методы недифференцируемой оптимизации, аналогично тому, как формула (3.55) для вычисления градиента непрерывно дифференцируемой функции $F(u)$ позволила развить широкий класс градиентных методов. Заметим, что при выводе формулы (3.64) существенно использована линейность системы разностных уравнений (3.61) по переменным $x(k)$, $u(k)$. Если эта система нелинейна, то неявная функция $F(u)$, вообще говоря, не будет выпуклой вниз функцией (при выпуклой вниз функции $f(x, u)$).

Применим формулу (3.64) к минимаксной задаче оптимального управления. Рассмотрим простейший случай, когда

$$f(x, u) = \max_{0 \leqslant k \leqslant N} \| x(k) - x^*(k) \|^2,$$

т. е. минимизация функции $f(x, u)$ соответствует минимизации максимума квадрата уклонения траектории управляемого процесса от заданной траектории $x^*(k)$ (в смысле эвклидовой нормы). В этом случае, согласно общим формулам для вычисления обобщенного градиента, имеем

$$\hat{f}_{u(k)}(x, u) \equiv 0,$$

$$\hat{f}_{x(k)}(x, u) =$$
$$= \begin{cases} 2(x(k) - x^*(k)), & \text{если } \| x(k) - x^*(k) \| = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant N} \| x(t) - x^*(t) \|, \\ 0 & \text{в противоположном случае.} \end{cases} \tag{3.65}$$

Тогда

$$\hat{F}_{u(k)}(x(0), u) = -\lambda(k+1) B(k), \quad \hat{F}_{x(0)}(x(0), u) = -\lambda(0),$$

где переменные $\lambda(k)$ удовлетворяют системе (3.63), в которой $\hat{f}_{x(k)}(x, u)$ имеют вид (3.65).

Если

$$f(x, u) = \max_{0 \leqslant k \leqslant N} r(x(k), u(k), k),$$

где функции $r(x(k), u(k), k)$, $(k = \overline{0, N})$ непрерывно дифференцируемы, то

$$\hat{f}_{x(k)}(x, u) =$$
$$= \begin{cases} r_x(x(k), u(k), k), & \text{если } r(x(k), u(k), k) = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant N} r(x(t), u(t), t), \\ 0 & \text{в противоположном случае,} \end{cases}$$

$$\hat{f}_{u(k)}(x, u) =$$
$$= \begin{cases} r_u(x(k), u(k), k), & \text{если } r(x(k), u(k), k) = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant N-1} r(x(t), u(t), t), \\ 0 & \text{в противоположном случае.} \end{cases}$$

Аналогично вычисляется обобщенный градиент в том случае, если максимум функций $r(x(k), u(k), k)$ берется не по всем $k =$

$= \overline{0, N}$, а лишь по отдельным моментам времени. В частности, если

$$r(x(k),\ u(k),\ k) = \| x(k) - x^*(k) \|^2,$$

$$f(x, u) = \max_{l \in \{\overline{0,N}\}} \| x(k_l) - x^*(k_l) \|^2,$$

то в результате минимизации $f(x, u)$ отыскивается управление, при котором траектория управляемого процесса в заданные моменты времени наименее уклоняется от заданных точек пространства. Такие задачи возникают при идентификации управляемых систем.

Рассмотрим теперь тот случай, когда система разностных уравнений является нелинейной, т. е. пусть $f(x, u) = f(x(0), \ldots, x(N), u(0), \ldots, u(N-1))$, где переменные $x(k)$, $u(k)$ удовлетворяют системе разностных уравнений

$$x(k+1) = g(x(k),\ u(k),\ k), \quad x(0) = x^0, \quad (k = \overline{0, N-1}). \qquad (3.66)$$

В этом случае неявная функция $F(u) = f(x(u), u)$, как отмечалось выше, вообще говоря, не будет выпуклой вниз при выпуклой вниз функции $f(x, u)$. В работах Е. А. Нурминского * методы обобщенных градиентов для минимизации выпуклых вниз функций $h(v)$ были обобщены на важный класс невыпуклых и негладких функций, названных слабо выпуклыми, удовлетворяющих условию

$$h(w) - h(v) \geqslant (\hat{h}_v(v),\ w - v) + o(\| w - v \|),$$

где $\hat{h}_v(v)$ — квазиградиент (субградиент) функции $h(v)$. Квазиградиентный метод минимизации слабо выпуклой функции $h(v)$ аналогичен методу обобщенных градиентов

$$v^{s+1} = v^s - \rho_s \hat{h}_v(v^s), \quad s = 0, 1, \ldots.$$

Любая непрерывно дифференцируемая функция является слабо выпуклой. Важным свойством этого класса функций является замкнутость относительно операции взятия максимума, т. е. максимум из слабо выпуклых функций является слабо выпуклой функцией.

Весьма важный класс задач оптимального управления с нелинейной системой разностных уравнений приводит к минимизации слабо выпуклой неявной функции $F(u)$. Пусть $u(k)$ — произвольное управление, $x(k)$ — соответствующая ему траектория. Рассмотрим также проварьированное управление $v(k)$, и пусть $y(k)$ — соответствующая ему траектория.

Предположим, что функция $f(x, u)$ — слабо выпуклая, а функции $g_j(x(k), u(k), k)$, $(j = \overline{1, n}$; $k = \overline{0, N-1})$ — непрерывно дифференцируемые. Тогда величина $\| y - x \|$ будет иметь порядок малости не ниже, чем величина $\| v - u \|$. Поэтому можно записать, что

* См., например, работу [20].

$$f(y, v) - f(x, u) \geqslant \sum_{k=0}^{N} (\hat{f}_{x(k)}(x, u), \; y(k) - x(k)) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{N-1} (\hat{f}_{u(k)}(x, u), \; v(k) - u(k)) + o(\|v - u\|),$$

$$g_j(y(k), v(k), k) - g_j(x(k), u(k), k) = (g_{jx}(x(k), u(k), k), \; y(k) -$$

$$- x(k)) + (g_{ju}(x(k), u(k), k), \; v(k) - u(k)) + o(\|v - u\|).$$

Покажем, что функция $F(u)$ — слабо выпуклая; причем, если компоненты квазиградиента функции $F(u)$ обозначить через $\hat{F}_{u(k)}(u)$, т. е.

$$\hat{F}_u(u) = (\hat{F}_{u(0)}(u), \; \ldots, \; \hat{F}_{u(N-1)}(u)),$$

то справедливо соотношение

$$\hat{F}_{u(k)}(u) = \hat{f}_{u(k)}(x, u) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(k+1) g_{ju}(x(k), u(k), k), \tag{3.67}$$

где $\lambda(k)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} \lambda(k) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(k+1) g_{jx}(x(k), u(k), k) - \hat{f}_{x(k)}(x, u) \quad (k = \overline{N-1, 0}), \\ \lambda(N) = -\hat{f}_{x(N)}(x, u). \end{cases} \tag{3.68}$$

При доказательстве этого утверждения потребуется ограниченность величин $\lambda(k)$. Она вытекает из предположений относительно функций $f(x, \cdot), g(x(\cdot), \cdot)$. Доказательство (3.67) во многом аналогично доказательству соотношения (3.64). Имеем

$$F(v) - F(u) = f(y, v) - f(x, u) + (\lambda(0), \; y(0) - x^0) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda(k+1), \; y(k+1) - g(y(k), \; v(k), \; k)) -$$

$$- (\lambda(0), \; x(0) - x^0) - \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda(k+1), \; x(k+1) -$$

$$- g(x(k), \; u(k), \; k)) \geqslant \sum_{k=0}^{N} (\hat{f}_{x(k)}(x, u), \; x(k) - x(k)) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{N-1} (\hat{f}_{u(k)}(x, u), \; v(k) - u(k)) + o(\|v - u\|) + \sum_{k=0}^{N} (\lambda(k), \; y(k) -$$

$$- x(k)) - \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda(k+1), \; g(y(k), \; v(k), \; k) - g(x(k), \; u(k), \; k)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} (\hat{f}_{x(k)}(x, u), \; y(k) - x(k)) + \sum_{k=0}^{N-1} (\hat{f}_{u(k)}(x, u), \; v(k) - u(k)) +$$

$$+(\hat{f}_{x(N)}(x,u)+\lambda(N),\ y(N)-x(N))+\sum_{k=0}^{N-1}(\lambda(k),\ y(k)-x(k))-$$
$$-\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{n}[\lambda_j(k+1)(g_{jx}(x(k),\ u(k),\ k),\ y(k)-x(k))]-$$
$$-\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{n}[\lambda_j(k+1)(g_{ju}(x(k),\ u(k),\ k),\ v(k)-u(k))]+o(\|v-u\|)=$$
$$=\sum_{k=0}^{N-1}\left(\hat{f}_{u(k)}(x,u)-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(k+1)\,g_{ju}(x(k),\ u(k),\ k),\ v(k)-u(k)\right)+$$
$$+\sum_{k=0}^{N-1}\left(\hat{f}_{x(k)}(x,u)+\lambda(k)-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(k+1)\,g_{jx}(x(k),\ u(k),\ k),\ y(k)-\right.$$
$$\left.-x(k)\right)+(f_{x(N)}(x,u)+\lambda(N),\ y(N)-x(N))+o(\|v-u\|).$$

Если $\lambda(k)$ удовлетворяют соотношениям (3.68), то

$$F(v)-F(u)\geqslant\sum_{k=0}^{N-1}\left(\hat{f}_{u(k)}(x,u)-\right.$$
$$\left.-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(k+1)\,g_{ju}(x(k),\ u(k),\ k),\ v(k)-u(k)\right)+o(\|v-u\|),$$

что и требовалось показать. Просматривая доказательство, убеждаемся, что при нефиксированном $x(0)$ $\hat{F}_{x(0)}(x(0),\ u)=-\lambda(0)$.

§ 11. ДРУГИЕ ПОДХОДЫ И ЗАДАЧИ

1. *О методах улучшения в пространстве состояний.* Методы градиентного типа являются методами последовательных приближений в пространстве управлений, т. е. в качестве независимых переменных рассматриваются переменные $u(k)$, $(k=\overline{0,\ N-1})$, $x(0)$, а переменные состояния $x(k)$, $(k=\overline{1,\ N})$ определяются по $u(k)$, $x(0)$ с помощью уравнений движения. В некоторых задачах в качестве независимых переменных лучше рассматривать переменные $x(k)$, $(k=\overline{0,\ N})$, отыскивать оптимальные траектории и по ним восстанавливать оптимальные управления.

При всевозможных управлениях $u(k)\in \mathrm{U}(k)$, $(k=\overline{0,\ N-1})$ к моменту N объект управления переводится на некоторое множество X_N. Следовательно, задача минимизации функции $f^0(x(N))$ при условиях

$$x(k+1)=g(x(k),\ u(k),\ k),\quad x(0)=x^0,\quad (k=\overline{0,\ N-1});$$
$$f^i(x(N))\leqslant 0,\quad (i=\overline{1,\ r});$$
$$u(k)\in \mathrm{U}(k),\quad (k=\overline{0,\ N-1})$$

сводится к задаче минимизации функции $f^0(x(N))$ на множестве, образованном пересечением X_N с множеством, определяемым ограничениями $f^i(x(N)) \leqslant 0$, $(i = \overline{1, r})$. Вся сложность при этом заключается в том, что множество X_N задано неявно. Иногда это множество удается описать через общее решение уравнений движения и на этом построить эффективные численные методы. В некоторых случаях численные методы основываются на том, что к X_N нетрудно построить опорную гиперплоскость. Так, если без учета фазовых ограничений легко минимизировать линейную функцию $(c, x(N))$, где c — некоторый вектор, то множество X_N, очевидно, расположено в полупространстве $(c, x) \geqslant (c, x^{\text{опт}}(N))$, а гиперплоскость $(c, x) = (c, x^{\text{опт}}(N))$ является опорной к X_N.

2. *Момент времени N не фиксирован.* В некоторых задачах момент времени N не задан и его требуется определить. Пусть

$$x(k+1) = g(x(k), u(k), k), \quad x(0) = x^0, \quad (k = \overline{0, N-1})$$

и требуется определить такое $0 \leqslant N \leqslant N_{\max}$ и управление $u(k) \in U(k)$, $(k = \overline{0, N-1})$, при которых функция $f(x(N), N)$ принимает наименьшее значение.

Решение этой задачи легко сводится к решению задач с фиксированным N. Для этого отрезок $[0, N_{\max}]$ разбивается на три части, т. е. выбираются N_1, N_2 так, что $0 < N_1 < N_2 < N_{\max}$, и решаются задачи при $N = N_1$, $N = N_2$, $N = N_3 = N_{\max}$.

Если $\min f(x(N_1), N_1) > \min f(x(N_2), N_2)$, то выдвигается гипотеза о том, что искомое N находится на отрезке $[N_1, N_3]$, который затем разбивается на три части, и т. д. Если же, наоборот, $\min f(x(N_1), N_1) < \min f(x(N_2), N_2)$, то выдвигается гипотеза о том, что искомое N находится на отрезке $[0, N_2]$. В конце концов получим некоторое решение и прекратим вычисления. Поскольку $f(x(N), N)$ как функция N часто не выпуклая, то в результате получаем только некоторое локально-оптимальное решение. *

Опишем иной метод последовательных улучшений, имеющий смысл по отношению к задаче конечно-разностного аналога. Напомним, что в этой задаче индекс k означает kh, а запись $g(x(k), u(k), k) \sim x(kh) + hg(x(kh), u(kh), kh)$. Пусть имеется начальное N_0, начальное управление $u^0(k)$, $(k = \overline{0, N_0 - 1})$ и траектория $x^0(k)$, $(k = \overline{0, N_0})$, а после s итераций получены N_s; $u^s(k)$, $(k = \overline{0, N_s - 1})$; $x^s(k)$, $(k = \overline{0, N_s})$.

Улучшенное управление обозначим через $u^{s+1}(k)$, $(k = \overline{0, N_s - 1})$, а соответствующую ему траекторию — через $x^{s+1}(k)$, $(k = \overline{0, N_s})$. Если после этого время изменится на ΔN_s, то

$$x^{s+1}(N_s + \Delta N_s) = x^{s+1}(N_s) + x^{s+1}(N_s)\Delta N_s,$$

$$f(x^{s+1}(N_s + \Delta N_s), N_s + \Delta N_s) \approx f(x^{s+1}(N_s), N_s) + (f_x(x^{s+1}(N_s), N_s), x^{s+1}(N_s))\Delta N_s + f_N(x^{s+1}(N_s), N_s)\Delta N_s,$$

* Процедуру локализации оптимума удобно и выгодно осуществлять с применением чисел Фибоначчи.

где

$$x^{s+1}(N_s) = \frac{1}{h}(x^{s+1}(N_s) - x^{s+1}(N_s - 1)) =$$
$$= g(x^{s+1}(N_s - 1),\ u^{s+1}(N_s - 1),\ N_s - 1)).$$

Учитывая это обстоятельство, время N_s следует увеличить на ΔN_s, где ΔN_s достаточно мало, если

$$\delta f_s = (f_x(x^{s+1}(N_s),\ N_s),\ x^{s+1}(N_s)) + f_N(x^{s+1}(N_s),\ N_s) < 0,$$

и уменьшить на ΔN_s в противном случае. В частном случае $\Delta N_s = h$. Заметим, что уточнять решение вблизи оптимума, когда величина δf_s мала, следует на основе непосредственного вычисления целевой функции.

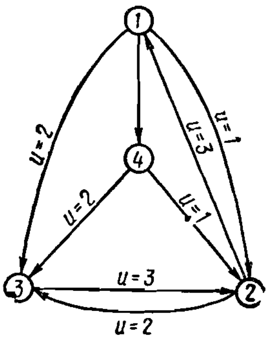

Рис. 3.

Часто описанная выше задача ставится несколько иначе: требуется минимизировать функцию $f(x(N),\ N)$ при наименьшем N, при котором выполняются определенные фазовые ограничения. Такую задачу можно заменить задачей минимизации функции $f(x(N),\ N) + CN$, где C — большое число, при заданных фазовых ограничениях.

3. *Параметрическая задача.* В некоторых случаях для управления объектом помимо выбора наилучшим образом управлений имеется возможность улучшать качество управления изменением некоторых параметров α этого объекта, т. е. уравнения движения имеют вид

$$x(k+1) = g(x(k),\ u(k),\ k,\ \alpha), \quad (k = \overline{0,\ N-1}).$$

В этом случае также легко получить формулы для вычисления градиента или субградиента функции цели по α и построить соответствующие численные методы, например

$$F_\alpha(x(0),\ u,\ \alpha) = -\sum_{k=0}^{N-1}(g_\alpha(x(k),\ u(k),\ k,\ \alpha),\ \lambda(k+1)) +$$
$$+ f_\alpha(x(N),\ \alpha),$$

где величины $\lambda(k)$ вычисляются согласно соотношениям (3.53).

4. *Управление дискретной системой.* Обсудим схемы решения задач оптимального управления, в которых управляемый процесс может находить я в конечном множестве состояний X и имеет конечное множество управлений U. В этом случае поведение управляемого объекта — конечного автомата — иногда задается графом переходов (рис. 3). Состояниям автомата отвечают вершины графа, дуги графа указывают, в какие состояния переходит автомат под действием соответствующего управления. Каждой дуге может отвечать некоторый набор параметров или показателей перехода (время,

вероятность, длина и т. п.). Условимся для определенности считать, что дуге (i, j) соответствуют затраты c_{ij}.

Задача состоит в том, чтобы перевести автомат из некоторого начального состояния i_0 в некоторое конечное состояние i_N с наименьшими общими затратами. Каждой последовательности переходов из начального состояния i_0 в конечное i_N соответствует некоторый путь $\mu = [i_0, i_1, \ldots, i_N]$ на графе переходов.

Дополнительные ограничения задачи оптимального управления накладывают ограничения на μ (например, вершины i_0, i_N должны принадлежать определенным подмножествам вершин; «время пребывания» μ в определенных подмножествах вершин не должно превышать заданных значений; вероятность реализации пути не должна быть ниже заданной и т. п.). В работе [23] такие пути названы допустимыми путями на графах; развитые в указанной работе численные методы поиска кратчайших допустимых путей на графах с успехом могут быть применены в рассматриваемых задачах оптимального управления.

Существенные особенности в задачах управления дискретной системой появляются в том случае, когда граф переходов не задан в явном виде. Например, вместо графа переходов поведение дискретной системы задается рекуррентными соотношениями вида

$$x(k+1) = g(x(k),\ u(k),\ k),$$
$$x(0) = x^0, \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots),$$

где $x(k)$ — состояние системы в момент времени k; $u(k)$ — управление, принадлежащее конечному множеству $U(k)$. Построить граф переходов на основе рекуррентных соотношений и свести таким образом данную задачу к описанной выше нецелесообразно с вычислительной точки зрения, поскольку граф переходов может содержать очень много вершин и дуг, а искомый допустимый путь пройдет через значительно меньшее число вершин. В этом случае целесообразно применять такие численные методы [23], которые позволяют строить искомый допустимый путь, имея только часть графа переходов, которая необходима для этого, и достраивать граф на основе уравнений движения по мере надобности. Такому требованию удовлетворяет, например, алгоритм Минти для решения обычной задачи о кратчайшем пути. При этом граф переходов может иметь даже бесконечное число вершин.

§ 12. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В СТОХАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Конечно-разностные аналоги задач оптимального управления случайными процессами и полями, рассматриваемые в последующих главах, являются частным случаем конечномерных задач стохастического программирования, поэтому принципиальные схемы их решения могут быть получены на основе общих методов стохастического программирования. В работе [20] рассматривался ряд прямых вероятностных численных методов для: стохастических задач оптимального управления. Эти методы во многом аналогичны рассмотренным выше методам градиентного типа. Основное отличие заключается в том, что вместо градиентов или субградиентов, которые практически невозможно вычислить в стохастических задачах, применяются случайные направления — стохастические квазиградиенты, являющиеся статистическими оценками (в общем случае смещенными) этих векторов.

Рассмотрим общую идею таких методов более детально. Разностные аналоги стохастических задач оптимального управления принадлежат к следующему весьма общему классу задач дискретного управления. Поведение управляемого объекта описывается системой стохастических разностных уравнений

$$x(k+1) = g(x(k), u(k), k, \omega), \ x(0) = x^0, \quad (k = \overline{0, N-1}), \quad (3.69)$$

где $x(k) = (x_1(k), \ldots, x_n(k))$ — состояние объекта в момент времени k; $u(k) = (u_1(k), \ldots, u_m(k))$ — управление в момент времени k; ω — элементарное событие некоторого заданного вероятностного пространства. В частности, возможно, что $\omega = (h(0), \ldots, h(N-1))$, где $h(k)$ — случайное возмущение в момент времени k, а функция $g(x, u, k, \cdot)$ зависит только от $h(k)$.

Требуется найти управление $u(k)$, $(k = \overline{0, N-1})$, минимизирующее неявную функцию цели

$$F(u(0), \ldots, u(N-1)) =$$
$$= Mf^0(x(0), \ldots, x(N), u(0), \ldots, u(N-1), \omega) \quad (3.70)$$

при ограничениях

$$F^i(u(0), \ldots, u(N-1)) = Mf^i(x(0), \ldots, x(N), u(0), \ldots$$
$$\ldots, u(N-1), \omega) \leqslant 0, \quad (i = \overline{1, r}), \quad (3.71)$$

$$u(k) \in \mathrm{U}(k), \quad (k = \overline{0, N-1}), \quad (3.72)$$

где управление $u(k)$, вообще говоря, зависит от предыстории управляемого процесса.

Для простоты ограничимся тем важным классом задач оптимального управления, в которых управление $u(k)$ зависит только от k, т. е. случаем программного управления случайным процессом. Задачи оптимального управления по предыстории на практике обычно сводятся к задачам программного управления выбором управления $u(\cdot)$ в классе заданных функций $u(k, v(k), \omega)$, технически реализуемых функцией (решающих правил), определенных с точностью до неизвестных параметров $v(k)$, зависящих только от k.

Полученная задача (3.70) — (3.72) — весьма общая задача стохастического программирования. Сложность ее решения, не считая того, что функции $F^\nu(u(0), \ldots, u(N-1))$, $(\nu = \overline{0, r})$ неявно зависят от $u(0), \ldots, u(N-1)$, заключается в сложности вычисления значений $F^\nu(u(0), \ldots, u(N-1))$ при заданном управлении

$u(k)$, $(k = \overline{0, N-1})$. Вследствие этого даже ответ на вопрос, удовлетворяет ли заданное управление $u(k)$, $(k = \overline{0, N-1})$ ограничениям (3.71),— сложная задача проверки статистической гипотезы о том, что математическое ожидание случайного вектора не положительно.

В прямых методах стохастического программирования, получивших название стохастических квазиградиентных [20], для решения задачи (3.70) — (3.72) вместо градиентов $F_u^\nu(u^s)$ или субградиентов $\hat{F}_u^\nu(u^s)$, которые практически невозможно вычислить точно, в s-й итерации применяются такие случайные векторы $\xi^\nu(s)$, для которых справедливо соотношение

$$M(\xi^\nu(s)/u^s) = \hat{F}_u(u^s) + b^s,$$

где b^s — некоторый вектор, зависящий в общем случае от $u^s = (u^s(0), \ldots, u^s(N-1))$.

Приведем формулы для вычисления векторов $\xi^\nu(s)$ без доказательств (подробности можно найти в работе [20]). Предположим, что функции $g_i(x(k), u(k), k, \omega)$, $(i = \overline{1, n})$, $f^\nu(x, u, \omega)$ при фиксированных k, ω являются непрерывно дифференцируемыми. Пусть $u^0(k)$, $(k = \overline{0, N-1})$ — начальное приближенное управление, $u^s(k)$, $(k = \overline{0, N-1})$ — управление, полученное в результате s-й итерации, ω^s — результат независимого испытания над ω в s-й итерации. Из уравнений движения при $u(k) = u^s(k)$, $(k = \overline{0, N-1})$, $\omega = \omega^s$ определяется траектория управляемого процесса $x^s(k)$, $(k = \overline{0, N})$. Затем при $u(k) = u^s(k)$, $(k = \overline{0, N-1})$, $\omega = \omega^s$, $x(k) = x^s(k)$, $(k = \overline{0, N})$ определяется решение $\lambda^{\nu s}(k)$ системы уравнений

$$\begin{cases} \lambda^\nu(k) = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j^\nu(k+1)\, g_{jx}(x^s(k), u^s(k), k, \omega^s) - f_{x(k)}^\nu(x^s, u^s, \omega^s) \\ (k = \overline{N-1, 0}), \\ \lambda^\nu(N) = -f_{x(N)}^\nu(x^s, u^s, \omega^s), \end{cases} \tag{3.73}$$

после чего вычисляется случайный вектор $\xi_k^\nu(s)$ по формуле

$$\xi_k^\nu(s) = f_{u(k)}^\nu(x^s, u^s, \omega^s) - \\ - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{\nu s}(k+1)\, g_{ju}(x^s(k), u^s(k), k, \omega^s). \tag{3.74}$$

Можно показать, что при весьма общих условиях

$$M(\xi_k^\nu(s)/u^s) = F_{u(k)}^\nu(u^s),$$

т. е. для $\xi^\nu(s) = (\xi_0^\nu(s), \ldots, \xi_{N-1}^\nu(s))$

$$M(\xi^\nu(s)/u^s) = F_u^\nu(u^s).$$

По аналогичным формулам вычисляются векторы $\xi^\nu(s)$ в том случае, когда функции $f^\nu(x, u, \omega)$ при каждом ω не имеют необходимых непрерывных производных. Если эти функции почти при каждом ω удовлетворяют требованиям § 10, то вместо (3.73) следует рассматривать следующую систему:

$$\begin{cases} \lambda^\nu(k) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^\nu(k+1)\, g_{jx}(x^s(k), u^s(k), k, \omega^s) - \hat{f}^\nu_{x(k)}(x^s, u^s, \omega^s) \\ (k = \overline{N-1, 0}), \\ \lambda^\nu(N) = -\hat{f}^\nu_{x(N)}(x^s, u^s, \omega^s), \end{cases}$$

а вместо (3.74) — вектор

$$\xi_k^\nu(s) = \hat{f}^\nu_{u(k)}(x^s, u^s, \omega^s) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{\nu s}(k+1)\, g_{ju}(x^s(k), u^s(k), k, \omega^s).$$

При этом для вектора $\xi^\nu(s) = (\xi_0^\nu(s), \ldots, \xi_{N-1}^\nu(s))$ получим

$$M(\xi^\nu(s)/u^s) = \hat{F}_u^\nu(u^s).$$

§ 13. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ДИСКРЕТНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Задачи дискретного оптимального управления возникают не только в результате конечно-разностных аппроксимаций задач непрерывного оптимального управления. Эти задачи и сами по себе представляют значительный интерес, если даже не больший, чем задачи непрерывного управления. С помощью разностных уравнений описываются многие задачи технико-экономического планирования, технологии и организации производства, военного дела, проектирования протяженных объектов и др., поскольку часто информация о состоянии реального процесса и управление им осуществляются дискретно, т. е. по шагам. В связи с этим задачи дискретного управления иногда интерпретируются в терминах задач многошагового выбора решений. К задачам дискретного управления в некоторых случаях выгодно сводить статистические задачи, непосредственная формулировка которых осуществляется в терминах задачи одношагового выбора решения, т. е. обычные задачи линейного и нелинейного программирования. С другой стороны, задачи многошагового выбора решений можно представить как задачи одношагового выбора решений и получить в результате этого иногда экономные схемы решения.

Заметим, наконец, также, что дискретность получения информации и управления может быть связана не только со временем, но и с пространством. Рассмотрим несколько примеров задач дискретного оптимального управления или задач, сводящихся к ним, описание которых можно найти в работах [22, 28, 33, 36].

1. Перспективное планирование производства и управление запасами. Рассмотрим производство, в котором участвуют n ингредиентов (различные виды производственных факторов, сырья, промежуточных и конечных продуктов). Имеется m технологических способов организации этого производства. В момент времени k ($k = \overline{0, N-1}$) задана матрица $n \times m$ затрат — выпуска $B(k) = \{b_{ij}(k)\}$, элемент $b_{ij}(k)$ которой определяет затраты i-го градиента при j-м способе производства в том случае, если $b_{ij}(k) < 0$; если же $b_{ij}(k) > 0$, то $b_{ij}(k)$ определяет выпуск i-го ингредиента при j-м способе. Обозначим через $u_j(k)$ интенсивность использования j-го технологического способа в период k; через $s_i(k)$, ($i = \overline{1, n}$) — величину спроса на продукцию, выпускаемую в этом периоде; через $x_i(k)$ — количество продукции, образовавшееся на складе к началу k-го периода. Очевидно, что

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(k)\, u_j(k) - s_i(k), \quad (i = \overline{1, n}),$$

или, в векторной форме,

$$x(k+1) = x(k) + B(k)\, u(k) - s(k), \; x(0) = x^0, \quad (k = \overline{0, N-1}).$$

Кроме того,

$$x(k) \geqslant 0, \quad (k = \overline{0, N}); \quad u(k) \geqslant 0, \quad (k = \overline{0, N-1}); \quad \sum_{j=1}^{m} u_j(k) \leqslant 1,$$

и возможны дополнительные ограничения вида

$$x(k) \in X(k), \quad (k = \overline{0, N}), \quad u(k) \in \mathrm{U}(k), \quad (k = \overline{0, N-1}),$$

отражающие ограничения на емкости складов, на производственные мощности и т. п.

Если через $l^0(u(k), k)$ обозначить издержки от использования технологических способов с интенсивностями $u(k)$, через $f^0(x(k), k)$ — затраты на хранение готовой продукции и нереализованный спрос, то общие издержки за период планирования определяются суммой (функции цели)

$$\sum_{k=0}^{N-1} [f^0(x(k), k) + l^0(u(k), k)].$$

Часто $f^0(x(k), k) = \sum\limits_{i=1}^{n} (f_i^0 x(k), k)$,

$$f_i^0(x(k), k) = \begin{cases} \alpha_i(k)\,(x_i(k) - s_i(k)), & \text{если } x_i(k) \geqslant s_i(k), \\ \beta_i(k)\,(s_i(k) - x_i(k)) & \text{— в противном случае,} \end{cases}$$

где $\alpha_i(k)$ — удельные затраты на хранение i-го ингредиента в период k; $\beta_i(k)$ — удельные затраты из-за дефицита i-го ингредиента.

Иногда предполагается, что $x(k) \geqslant s(k)$, и тогда

$$f_i^0(x(k), k) = \alpha_i(x_i(k) - s_i(k)).$$

Заметим, что сформулированная задача имеет недифференцируемую функцию цели, и для ее решения применимы методы § 10.

2. *Транспортная задача.* Как уже отмечалось выше, к задаче дискретного оптимального управления можно сводить статические задачи планирования. Для примера рассмотрим известную транспортную задачу линейного программирования, для решения которой существуют весьма эффективные численные методы. Сведение этой задачи к задаче дискретного управления вряд ли позволит получить более эффективные методы. Оно скорее полезно в другом отношении: на этом примере можно проверить эффективность численных методов, развиваемых в теории оптимального дискретного управления.

Напомним постановку классической транспортной задачи линейного программирования: минимизировать линейную функцию $\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} c_{ij} u_{ij}$ при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{m} u_{ij} = a_i, \quad (i = \overline{1, n}), \quad \sum_{i=1}^{n} u_{ij} = b_j, \quad (j = \overline{1, m}),$$

$$u_{ij} \geqslant 0, \quad (i = \overline{1, n}; \ j = \overline{1, m}),$$

где a_i — количество продукта, имеющегося у i-го поставщика; b_j — количество продукта, требуемого j-му потребителю; c_{ij} — затраты на перевозку единицы продукта от i-го поставщика к j-му потребителю; u_{ij} — количество единиц продукта, поставленного i-м поставщиком j-му потребителю. При этом считается, что $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$.

Положим $x_i(k) = \sum_{j=1}^{k} u_{ij}$, $x_i(0) = 0$, $u_i(k) = u_{i,k+1}$, $c_i(k) = c_{i,k+1}$, $N = m$. Тогда, очевидно, транспортная задача эквивалентна следующей задаче оптимального дискретного управления: минимизировать

$$\sum_{k=0}^{N-1} (c(k), u(k)),$$

где $c(k) = (c_1(k), \ldots, c_n(k))$, $u(k) = (u_1(k), \ldots, u_n(k))$, при ограничениях

$$x(k+1) = x(k) + u(k), \quad (k = \overline{0, N-1}), \quad x(0) = 0, \ x(N) = a,$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(k) = b_k^*, \ u(k) \geqslant 0, \ (k = \overline{0, N-1}),$$

где $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $x(k) = (x_1(k), \ldots, x_n(k))$, $b_k^* = b_{k+1}$. Сложность решения этой задачи, как задачи оптимального управления, связана с фазовыми ограничениями $x(N) = a$.

ГЛАВА 4

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Перейдем к рассмотрению стохастических задач оптимального управления. Стохастическая задача управления вкратце может быть сформулирована следующим образом.

Предположим, что некоторая система, рассматриваемая в заданной области, характеризуется тремя видами параметров — состояния системы x, управления u и случайными параметрами, или возмущениями, ω. Значения случайного параметра ω являются элементами некоторого вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$. Изменяя параметры управления в пределах некоторого множества U, называемого множеством допустимых управлений, можно определенным образом воздействовать на состояния x, которые может принимать система. Качество управления оценивается значением, которое принимает при этом управлении некоторый заданный функционал, называемый функционалом цели (целевым функционалом). Выбор такого допустимого управления, при котором этот функционал достигает экстремального значения, и составляет задачу управления данной системой. Однако выбор определенного допустимого управления приводит к неоднозначному состоянию системы, поскольку оно зависит от реализации ω. Если по смыслу практических задач управление принимается после того, как в результате наблюдений становится известным значение параметра ω, то, очевидно, стохастические задачи управления системой сводятся к обычным детерминированным задачам. Если же по смыслу практических задач управление должно быть принято до того, как становится известным значение параметра ω, или в результате наблюдений ω не будет известно точно, то понятие оптимального управления должно определяться с помощью вероятностных характеристик системы. Например, целевой функционал является математическим ожиданием случайной функции или математическим ожиданием некоторого функционала. Для решения такого рода задач нужно обладать определенной информацией о характере действующих на систему случайных воздействий.

В теории управляемых случайных процессов достаточно изучены марковские процессы, причем большинство работ посвящено задаче синтеза управлений. Это можно, по-видимому, объяснить тем, что предлагаемые в них подходы тесно связаны с уравнениями

Беллмана, для которых важно, чтобы управления были функциями состояния. На практике задача синтеза не занимает столь исключительного положения. Так, к примеру, в задачах управления запасами допустимые управления иногда можно считать функциями не состояния (уровня запаса), а возмущения (спроса), в результате чего задача управления существенно упрощается.

Имеются два способа задания эволюции случайного процесса. Первый способ связан с введением распределений для случайных величин, характеризующих состояние процесса, и заданием эволюции распределений. При этом изучение случайного процесса сводится к исследованию некоторых интегро-дифференциальных уравнений, сложность которых чрезвычайно зависит от размерности задачи. Второй способ связан с изучением вероятностными методами эволюции самих случайных величин, характеризующих состояние процесса в последовательные моменты времени. Этот способ уже не столь чувствителен к размерности и кажется наиболее приемлемым с точки зрения практических приложений. Он позволяет для решения стохастических задач управления применять численные методы стохастического программирования, которые обсуждались в предыдущей главе. В основе этой главы лежит работа [19].

§ 1. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД. УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ

Будем рассматривать случайные процессы, поведение которых описывается стохастическими дифференциальными (разностными) уравнениями, напоминающими по виду рассмотренные в предыдущих главах обыкновенные дифференциальные (разностные) уравнения. Пусть $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ — вероятностное пространство, на котором определен поток σ-алгебр $\{\mathfrak{B}_t, \tau \leqslant t \leqslant T\}$, т. е. семейство σ-алгебр $\mathfrak{B}_t \subset \mathfrak{B}$, для которых из того, что $t < t'$, следует $\mathfrak{B}_t \subset \mathfrak{B}_{t'}$. Предположим, что состояние процесса в каждый момент времени t, $\tau \leqslant t \leqslant T$, характеризуется случайным вектором (всюду рассматриваются векторы-столбцы), $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ — параметры состояния процесса, а закон изменения состояния процесса при заданном управлении $u = (u_1, \ldots, u_m)$ может быть описан следующей системой стохастических дифференциальных уравнений [9, 34]:

$$x(t) = x(\tau) + \int_{\tau}^{t} A(s, x(s), u)\, ds + \sum_{j=1}^{l} \int_{\tau}^{t} B_j(s, x(s), u)\, dW_j(s), \quad (4.1)$$

где начальное состояние $x(\tau)$ есть заданная $\mathfrak{B}_\tau$-измеримая случайная величина: $A(t, x, u)$, $B_j(t, x, u)$, $(j = \overline{1, l})$ — заданные случайные функции, измеримые по совокупности переменных (включая и переменную из вероятностного пространства) и при фиксированных t, x и u измеримые относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}_t$; $W_j(t)$, $(j = \overline{1, l})$ — независимые винеровские процессы, которые при каждом фиксированном t $\mathfrak{B}_t$-измеримы, причем разности $W_j(t + \Delta t)$ —

— $W_j(t)$, $(j = \overline{1, l})$ в совокупности не зависят от каждого из событий σ-алгебры $\mathfrak{B}_t$. Параметры управления u в общем случае являются функциями времени t и состояния процесса $x = x(t)$, т. е. $u = u(t, x)$. Если управление от состояния не зависит, т. е. $u = u(t)$, имеем задачу программного управления, если же управление выбирается в зависимости от состояния, т. е. $u = u(x)$, имеем задачу синтеза управлений. Обычно на управляющие функции накладываются ограничения вида

$$u(t, x) \in \mathrm{U}, \tag{4.2}$$

где U — некоторое заданное множество m-мерного пространства.

Чтобы уравнение (4.1) имело смысл, будем предполагать управляющие параметры $u(t, x)$ случайными функциями, определенными при $\tau \leqslant t \leqslant T$, $|x| < \infty$, измеримыми по совокупности всех своих переменных и при фиксированных t и x измеримыми относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}_t$.

Поставим задачу о выборе среди управлений $u(t, x) \in \mathrm{U}$ такого управления $u^*(t, x)$, которое минимизирует математическое ожидание

$$\Phi(u) = M \int_{\tau}^{T} F(t, x(t), u(t, x(t)))\, dt, \tag{4.3}$$

$$\text{т. е. } \Phi(u^*) = \min_{u(t,x)\in \mathrm{U}} \Phi(u),$$

где $F(t, x, u)$ — заданная случайная функция, измеримая по совокупности своих переменных. Управляющая функция $u^*(t, x)$, если она существует, есть решение задачи управления (4.1) — (4.3) и называется оптимальным управлением для этой задачи.

Для простоты предположим, что значения τ и T фиксированы, однако могут быть задачи, в которых τ и T являются неизвестными (детерминированными или случайными величинами).

При исследовании различных вопросов, касающихся процессов с непрерывным временем, очень полезным оказывается метод конечных разностей. В предыдущих главах мы убедились в его универсальности для детерминированных систем. Эффективность конечно-разностного метода еще более возрастает при решении задач управления случайными процессами, так как наличие сложных случайных воздействий на управляемый объект увеличивает трудности, связанные с нахождением решения, и делает эти трудности порой непреодолимыми.

Конечно-разностной аппроксимацией стохастического уравнения (1.4), соответствующей данному разбиению $\Delta = \Delta(t_0, t_1, \ldots, t_m)$ отрезка $[\tau, T]$, т. е. $\tau = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T$, является следующая система рекуррентных соотношений:

$$x^{\Delta}(t) = x_k^{\Delta} + A(t_k, x_k^{\Delta}, u(t_k, x_k^{\Delta}))(t - t_k) + \\ + \sum_{j=1}^{l} B_j(t_k, x_k^{\Delta}, u(t_k, x_k^{\Delta}))[W_j(t) - W_j(t_k)],$$

$$t \in [t_k, t_{k+1}]; \quad x^{\Delta}(\tau) = x(\tau), \tag{4.4}$$

где $x^{\Delta} = x^{\Delta}(t_k)$, $(k = \overline{0, N-1})$.

Решение этой системы $x^{\Delta}(t)$ называется эйлеровой конечно-разностной аппроксимацией решения стохастического уравнения (4.1). Этот процесс можно представить следующим образом:

$$x^{\Delta}(t) = x(\tau) + \sum_k^{(t)} \Big[A(t_k, x_k^{\Delta}, u(t_k, x_k^{\Delta}))\, \Delta_k +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l} B_j(t_k, x_k^{\Delta}, u(t_k, x_k^{\Delta}))\, \Delta W_j^k \Big],$$

где $\Delta_k = (t_{k+1} - t_k)$; $\Delta W_j^k = W_j(t_{k+1}) - W_j(t_k)$; символ $\sum_k^{(t)}$ означает суммирование по всем индексам k, для которых $t_k < t$, причем последние слагаемые — это $A(t_{(\cdot)}, x_{(\cdot)}^{\Delta}, u(t_{(\cdot)}, x_{(\cdot)}^{\Delta}))(t - t_{(\cdot)}) +$ $+ \sum_{j=1}^{l} B_j\ (t_{(\cdot)}, x_{(\cdot)}^{\Delta}, u(t_{(\cdot)}, x_{(\cdot)}^{\Delta}))\,[W_j(t) - W_j(t_{(\cdot)})]$.

Дискретный аналог задачи (4.1) — (4.3) состоит в нахождении среди управлений

$$\begin{gathered} u_{\Delta}(t, x) = u_{\Delta}(t_k, x_k^{\Delta}) \in \mathrm{U}, \\ t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (k = \overline{0, N-1}) \end{gathered} \tag{4.5}$$

такого управления $\overset{*}{u}_{\Delta}(t, x)$, которое минимизирует функционал

$$\Phi_{\Delta}(u) = M \sum_{k=0}^{N-1} F(t_k, x_k^{\Delta}, u_{\Delta}(t_k, x_k^{\Delta}))\, \Delta_k \tag{4.6}$$

(через $M\xi$ обозначается математическое ожидание ξ). Управление $\overset{*}{u}_{\Delta}(t, x)$ называется оптимальным управлением для задачи (4.4), (4.5). Следует отметить, что исследование дискретных задач оптимального управления важно и само по себе, потому что в очень многих задачах рассматриваются случайные процессы, дискретные во времени.

Основное содержание этого параграфа составляет изучение сходимости решения $\overset{*}{u}_{\Delta}(t, x)$ построенного разностного аналога к решению $u^*(t, x)$ исходной задачи оптимального управления (4.1) — (4.3). Сначала докажем сходимость решения $x_{\Delta}(t)$ системы рекуррентных соотношений (4.4) к решению $x(t)$ дифференциального уравнения (4.1).

Зафиксируем некоторую управляющую функцию $u = u(t, x)$, удовлетворяющую указанным выше требованиям. Обозначим через $|\Delta|$ диаметр разбиения Δ, т. е. $|\Delta| = \max_k |\Delta_k|$.

Не ограничивая общности, для сокращения записей будем считать, что $T - \tau = 1$.

Теорема 1. Пусть выполняются условия:

1) $M\,|x(\tau)|^2 < \infty$;

2) существует такое K, при котором с вероятностью 1

$$|A(t, x, u)|^2 + \sum_{j=1}^{l} |B_j(t, x, u)|^2 \leqslant K(1 + |x|^2);$$

3) для всякого R существуют также l_R и l'_R, при которых с вероятностью, равной 1,

$$|A(t, x, u) - A(t, x', u')|^2 + \sum_{j=1}^{l} |B_j(t, x, u) - B_j(t, x', u')|^2 \leqslant$$
$$\leqslant l_R [|x - x'|^2 + |u - u'|^2],$$
$$|u(t, x) - u(t, x')|^2 \leqslant l'_R |x - x'|^2$$

при $|x| \leqslant R$, $|x'| \leqslant R$;

4) случайные функции $A(t, x, u)$, $B_j(t, x, u)$, $(j = \overline{1, l})$, $u(t, x)$ стохастически непрерывны по t для всех $\tau \leqslant t \leqslant T$, за исключением, быть может, конечного числа точек, где они с вероятностью 1 могут иметь разрывы первого рода;

5) множество U — замкнутое.

Тогда $M \sup\limits_{\tau \leqslant t \leqslant T} |x^\Delta(t)|^2$ и $M \sup\limits_{\tau \leqslant t \leqslant T} |x(t)|^2$ ограничены и

$$\lim_{|\Delta| \to 0} M \sup_{\tau \leqslant t \leqslant T} |x(t) - x^\Delta(t)|^2 = 0,$$

где $x(t)$ — непрерывное с вероятностью, равной 1, определенное с точностью до стохастической эквивалентности решение уравнения (4.1), соответствующее управлению $u(t, x)$; $x^\Delta(t)$ — решение системы (4.4), соответствующее этому же управлению.

Для доказательства теоремы нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Пусть H — некоторая положительная постоянная, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — неотрицательные функции, определенные при $\tau \leqslant t \leqslant T$, причем функция $\beta(t)$ непрерывна; $\Delta(t_0, t_1, \ldots, t_N)$ — некоторое разбиение отрезка $[\tau, T]$.

Если имеют место неравенства

$$\alpha(0) \leqslant H; \quad \alpha(t_k) \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \alpha(t_i) \beta(t_i) \Delta_i + H, \quad (k = \overline{0, N}),$$

то существует такое γ_Δ, для которого $\alpha(t_k) \leqslant H\gamma_\Delta$, причем

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \gamma_\Delta = \exp\left\{\int_\tau^T \beta(t)\, dt\right\}.$$

Доказательство. Методом математической индукции можно установить, что для $\alpha(t_k)$ существуют такие оценки γ_k, образующие неубывающую последовательность, при которых $\alpha(t_k) \leqslant H\gamma_k$. При этом $\gamma_k \leqslant \gamma_N = \gamma_\Delta$. Оценки эти образуют суммы, слагаемыми которых служат интегральные суммы Дарбу для функции $\beta(t)$, отвечающие данному разбиению Δ. Устремляя $|\Delta|$ к нулю, получим для оценки γ_k ряд $\frac{1}{n!}\left\{\int\limits_{\tau}^{t_k}\beta(t)\,dt\right\}$, сумма слагаемых которого есть $\exp\left\{\int\limits_{\tau}^{t_k}\beta(t)\,dt\right\}$, т. е. $\lim\limits_{|\Delta|\to 0}\gamma_\Delta=\exp\left\{\int\limits_{\tau}^{T}\beta(s)\,ds\right\}$, что доказывает лемму.

Ниже будем использовать следующие обозначения: $a(t, x) = A(t, x, u(t, x))$, $b_j(t, x) = B_j(t, x, u, (t, x))$, $(j = \overline{1, l})$.

Следствие. Пусть выполняются условия 1) и 2) теоремы. Тогда найдется такое R, при котором

$$M\sup_{\tau\leqslant t\leqslant T}|x^\Delta(t)|^2\leqslant R. \tag{4.7}$$

Действительно, применяя эти условия, из системы рекуррентных соотношений (4.4) имеем в новых обозначениях

$$M|x_k^\Delta|^2\leqslant(2+l)\left\{M|x(\tau)|^2+\sum_{i=0}^{k-1}M\left[|a(t_i, x_i^\Delta)|^2+\right.\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{l}|b_j(t_i, x_i^\Delta)|^2\right]\Delta_i\leqslant(2+l)\left[M|x(\tau)|^2+K+\right.$$
$$\left.+K\sum_{i=0}^{k-1}M|x_i^\Delta|^2\Delta_i\right].$$

Учитывая условие 1), можем к этому соотношению применить лемму, из которой следует существование такого числа r, при котором $M|x_k^\Delta|^2\leqslant r$, $(k=\overline{0, N})$. Затем из системы (4.4), учитывая условие 2) теоремы и последнюю оценку, имеем

$$M\sup_{\tau\leqslant t\leqslant T}|x^\Delta(t)|^2\leqslant(2+l)[M|x(\tau)|^2+4K(1+r)],$$

откуда из леммы следует соотношение (4.7).

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть имеем два разбиения Δ_1 и Δ_2 отрезка $[\tau, T]:\Delta_1=\Delta_1(t_0', t_1', \ldots, t_{N_1}')$; $\Delta_2=\Delta_2(t_0'', t_1'', \ldots, t_{N_2}'')$. Объединяя их, получим новое разбиение, обозначим его $\Delta=\Delta(t_0, t_1, \ldots, t_N)$.

Построим с помощью рекуррентных соотношений (4.4) соответствующие этим разбиениям случайные функции $x^{\Delta_1}(t)$, $x^{\Delta_2}(t)$ и $x^\Delta(t)$. Очевидно, имеет место неравенство

$$M\sup_{\tau\leqslant t\leqslant T}|x^{\Delta_1}(t)-x^{\Delta_2}(t)|^2\leqslant 2M\sup_{\tau\leqslant t\leqslant T}|x^{\Delta_1}(t)-x^\Delta(t)|^2+$$
$$+2M\sup_{\tau\leqslant t\leqslant T}|x^\Delta(t)-x^{\Delta_2}(t)|^2. \tag{4.8}$$

для оценки которого достаточно, например, рассмотреть слагаемое

$$M\sup_{\tau\leqslant t\leqslant T}|x^{\Delta_1}(t)-x^\Delta(t)|^2.$$

Положим

$$g_{\mathrm{N}}(x)=\begin{cases}1, & \text{если } |x|\leqslant \mathrm{N},\\ \mathrm{N}+1-|x|, & \text{если } \mathrm{N}<|x|\leqslant \mathrm{N}+1,\\ 0, & \text{если } |x|>\mathrm{N}+1,\end{cases}$$

и обозначим $x_{\mathrm{N}}(\tau)=g_{\mathrm{N}}(x(\tau)\,x(\tau))$, $a_{\mathrm{N}}(t, x)=g_{\mathrm{N}}(x)\,a(t, x)$, $b_j(t, x) = g_{\mathrm{N}}(x)\,b_j(t, x)$, $(j=\overline{1, l})$.

Пусть $x_{\mathrm{N}}^{\Delta}(t)$ — решение системы (4.4), в которой случайные функции $x(\tau)$, $A(t, x, u)$ и $B_j(t, x, u)$, $(j=\overline{1, l})$ заменены соответственно случайными функциями $x_{\mathrm{N}}(\tau)$, $a_{\mathrm{N}}(t, x)$ и $b_j^{(\mathrm{N})}(t, x)$, $(j = \overline{1, l})$. Тогда для $N' > N$ имеет место соотношение

$$P\{\sup_{\tau\leqslant t\leqslant T}|x_{\mathrm{N}'}^{\Delta}(t)-x_{\mathrm{N}}^{\Delta}(t)|^2>0\}\leqslant P\{\sup_{\tau\leqslant t\leqslant T}|x_{\mathrm{N}'}^{\Delta}(t)|\geqslant \mathrm{N}\}+$$
$$+P\{\sup_{\tau\leqslant t\leqslant T}|x_{\mathrm{N}}^{\Delta}(t)|\geqslant \mathrm{N}\}.$$

В силу построения $x_{\mathrm{N}}^{\Delta}(t)$ и следствия существует такое число R, при котором имеет место соотношение

$$M\sup_{\tau\leqslant t\leqslant T}|x_{\mathrm{N}}^{\Delta}(t)|^2\leqslant R \tag{4.9}$$

равномерно относительно N и Δ. Поэтому из неравенства Чебышева при $C>0$ вытекает справедливость неравенства

$$P\{\sup_{\tau\leqslant t\leqslant T}|x_{\mathrm{N}}^{\Delta}(t)|>C\}\leqslant\frac{R}{C^2}$$

для любых N и Δ, следовательно,

$$P\{\sup_{\tau\leqslant t\leqslant T}|x_{N'}^{\Delta}(t)-x_{N}^{\Delta}(t)|>0\}\leqslant\frac{2R}{\mathrm{N}^2}.$$

Отсюда, в силу леммы Бореля — Кантелли, из последовательности событий

$$\{\sup_{\tau\leqslant t\leqslant T}|x_{\mathrm{N}+1}^{\Delta}(t)-x_{\mathrm{N}}^{\Delta}(t)|>0\}$$

с вероятностью 1 происходит конечное число событий и, значит, начиная с некоторого номера $\tilde{\mathrm{N}}$, все $x_N^{\Delta}(t)$ равны, т. е. последовательность $x_{\mathrm{N}}^{\Delta}(t)$ имеет с равной 1 вероятностью равномерный относительно t и Δ предел $x^{\Delta}(t)$

$$\lim_{\mathrm{N}\to\infty}\sup_{\tau\leqslant t\leqslant T}|x_{\mathrm{N}}^{\Delta}(t)-x^{\Delta}(t)|=0,$$

который является решением системы рекуррентных соотношений (4.4), непрерывным с вероятностью, равной 1.

Очевидно, что

$$M\sup_{\tau\leqslant t\leqslant T}|x^{\Delta}(t)-x^{\Delta_1}(t)|^2\leqslant 3M\sup_{\tau\leqslant t\leqslant T}|x^{\Delta}(t)-x_{\mathrm{N}}^{\Delta}(t)|^2+$$
$$+3M\sup_{\tau\leqslant t\leqslant T}|x_{\mathrm{N}}^{\Delta_1}(t)-x^{\Delta_1}(t)|^2\leqslant 3M\sup_{\tau\leqslant t\leqslant T}|x_{\mathrm{N}}^{\Delta}(t)-x_{\mathrm{N}}^{\Delta_1}(t)|^2.$$

Далее,

$$x_N^{\Delta}(t) - x_{N}^{\Delta_1}(t) =$$

$$= \sum_{k}^{(t)} \sum_{t'_k \leqslant t_i < t'_{k+1}} \Big\{ [a_N(t_i, x_N^{\Delta}(t_i)) - a_N(t'_k, x_N^{\Delta_1}(t'_k))]\,\Delta_i +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l} [b_j^{(N)}(t_j, x_N^{\Delta}(t_i)) - b_j^{(N)}(t'_k, x_N^{\Delta_1}(t'_k))]\,\Delta W_j^i \Big\},$$

поэтому, принимая во внимание условие 2) теоремы и соотношение (4.9), можем записать

$$M \sup_{\tau \leqslant t \leqslant T} |x_N^{\Delta}(t) - x_N^{\Delta_1}(t)|^2 \leqslant (1 + l) \sum_{k=0}^{N_1 - 1} \sum_{t'_k \leqslant t_i < t'_{k+1}} \Big[M\,|a_N(t_i, x_N^{\Delta}(t_i)) -$$

$$- a_N(t'_k, x_N^{\Delta_1}(t'_k))|^2 + 4 \sum_{j=1}^{l} M\,|b_j^{(N)}(t_i, x_N^{\Delta}(t_j)) - b_j^{(N)}(t'_k, x_N^{\Delta_1}(t'_k))|^2 \Big] \Delta_i. \tag{4.10}$$

Очевидно, что

$$M\,|a_N(t_i, x_N^{\Delta}(t_i)) - a_N(t'_k, x_N^{\Delta_1}(t'_k))|^2 \leqslant 3M\,|a_N(t_i, x_N^{\Delta}(t_i)) -$$

$$- a_N(t_i, x_N^{\Delta}(t'_k))|^2 + 3M\,|a_N(t_i, x_N^{\Delta}(t'_k)) -$$

$$- a_N(t_i, x_N^{\Delta_1}(t'_k))|^2 + 3M\,|a_N(t_i, x_N^{\Delta_1}(t'_k)) - a_N(t'_k, x_N^{\Delta_1}(t'_k))|^2,$$

и, так как из условия 3) следует существование такого L_N, при котором с вероятностью, равной 1,

$$|a(t, x) - a(t, x')|^2 + \sum_{j=1}^{l} |b_j(t, x) - b_j(t, x')|^2 \leqslant L_N |x - x'|^2 \tag{4.11}$$

при $|x| \leqslant N$, $|x'| \leqslant N$, то

$$M\,|a_N(t_i, x_N^{\Delta}(t_i)) - a_N(t'_k, x_N^{\Delta_1}(t'_k))|^2 \leqslant 3L_N M\,|x_N^{\Delta}(t_i) - x_N^{\Delta}(t'_k)|^2 +$$

$$+ 3L_N M\,|x_N^{\Delta}(t'_k) - x_N^{\Delta_1}(t'_k)|^2 + 3M\,|a_N(t_i, x_N^{\Delta_1}(t'_k)) -$$

$$- a_N(t'_k, x_N^{\Delta_1}(t'_k))|^2.$$

Аналогичная оценка имеет место и для величин

$$\sum_{j=1}^{l} M\,|b_j^{(N)}(t_i, x_N^{\Delta}(t_i)) - b_j^{(N)}(t'_k, x_N^{\Delta_1}(t'_k))|^2.$$

Подставляя полученные оценки в соотношение (4.10), имеем

$$M \sup_{\tau \leqslant t \leqslant T} |x_N^{\Delta}(t) - x_N^{\Delta_1}(t)|^2 \leqslant 15(l + 1) L_N \sum_{k=0}^{N_1 - 1} M\,|x_N^{\Delta}(t'_k) -$$

$$- x_N^{\Delta_1}(t'_k)|^2 \Delta_{1k} + \sum_{k=0}^{N_1 - 1} \sum_{t'_k \leqslant t_i < t'_{k+1}} \Big\{ 15(l + 1) L_N M\,|x_N^{\Delta}(t_i) - x_N^{\Delta}(t'_k)|^2 +$$

$$+ 12M\left[|a_N(t_l, x_N^{\Delta_1}(t_k')) - a_N(t_k', x_N^{\Delta_1}(t_k'))|^2 + \right.$$

$$\left.+ \sum_{j=1}^{l} |b_j^{(N)}(t_l\, x_N^{\Delta_1}(t_k')) - b_j^{(N)}(t_k', x_N^{\Delta_1}(t_k'))|^2\right]\Bigg\} \Delta_l. \qquad (4.12)$$

Случайные функции $x_N^\Delta(t)$ с вероятностью, равной 1, непрерывны, поэтому, принимая во внимание соотношение (4.9), можем записать

$$\sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{t_k' \leqslant t_l < t_{k+1}'} M|x_N^\Delta(t_l) - x_N^\Delta(t_k')|^2 \Delta_l = \varepsilon(\Delta_1),$$

где $\lim\limits_{|\Delta_1|\to 0} \varepsilon(\Delta_1) = 0.$

Используя условие 3), имеем

$$|a_N(t_l, x_N^{\Delta_1}(t_k')) - a_N(t_k', x_N^{\Delta_1}(t_k'))|^2 \leqslant 2g_N(x_N^{\Delta_1}(t_k'))\,|A(t_l, x_N^{\Delta_1}(t_k'),$$

$$u(t_l, x_N^{\Delta_1}(t_k')) - A(t_l, x_N^{\Delta_1}(t_k'), u(t_k', x_N^{\Delta_1}(t_k'))|^2 +$$

$$+ 2|A(t_l, x_N^{\Delta_1}(t_k'), u(t_k', x_N^{\Delta_1}(t_k')) - A(t_k', x_N^{\Delta_1}(t_k'),$$

$$u(t_k', x_N^{\Delta_1}(t_k'))|^2 \leqslant 2l_N|u(t_l, x_N^{\Delta_1}(t_k')) - u(t_k', x_N^{\Delta_1}(t_k'))|^2 +$$

$$+ 2|A(t_l, x_N^{\Delta_1}(t_k'), u(t_k', x_N^{\Delta_1}(t_k')) - A(t_k', x_N^{\Delta_1}(t_k'), u(t_k', x_N^{\Delta_1}(t_k'))|^2,$$

аналогично для $b_j^{(N)}(t, x)$, $(j = \overline{1, l})$

$$\sum_{j=1}^{l} |b_j^{(N)}(t_l, x_N^{\Delta_1}(t_k')) - b_j^{(N)}(t_k', x_N^{\Delta_1}(t_k'))|^2 \leqslant 2l_N|u(t_l, x_N^{\Delta_1}(t_k')) -$$

$$- u|t_k', x_N^{\Delta_1}(t_k')|^2 + 2\sum_{j=1}^{l} |B_j(t_l, x_N^{\Delta_1}(t_k'), u(t_k', x_N^{\Delta_1}(t_k')) -$$

$$- B_j(t_k', x_N^{\Delta_1}(t_k'), u(t_k', x_N^{\Delta_1}(t_k'))|^2,$$

и, следовательно, учитывая условия 2), 3) и 4) теоремы и оценку (4.8), сумму

$$\sum_{k=1}^{N_1-1} \sum_{t_k' \leqslant t_l < t_{k+1}'} M\left[|a_N(t_l, x_N^{\Delta_1}(t_k')) - a_N(t_k', x_N^{\Delta_1}(t_k'))|^2 + \right.$$

$$\left.+ \sum_{j=1}^{l} |b_j^{(N)}(t_l, x_N^{\Delta_1}(t_k')) - b_j^{(N)}(t_k', x_N^{\Delta_1}(t_k'))|^2 \Delta_l\right] = \varepsilon_1(\Delta_1)$$

можно путем выбора разбиения Δ_1 сделать сколь угодно малой, т. е.

$$\lim_{|\Delta_1|\to 0} \varepsilon_1(\Delta_1) = 0.$$

В силу равномерной с вероятностью 1 сходимости $x_N^\Delta(t)$ и $x^\Delta(t)$ слагаемые

$$3M \sup_{\tau \leqslant t < T} |x^\Delta(t) - x_N^\Delta(t)|^2 + 3M \sup_{\tau \leqslant t \leqslant T} |x_N^{\Delta_1}(t) - x^{\Delta_1}(t)|^2 = \delta(N)$$

при достаточно больших N можно сделать сколь угодно малыми, т. е.

$$\lim_{N\to\infty} \delta(N) = 0.$$

Таким образом, соотношение (4.9), принимая во внимание (4.12), можно представить следующим образом:

$$M \sup_{\tau\leqslant t\leqslant T} |x^{\Delta}(t) - x^{\Delta_1}(t)|^2 \leqslant \delta(N) + 3M \sup_{\tau\leqslant t\leqslant T} |x_N^{\Delta}(t) - x_N^{\Delta_1}(t)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \delta(N) + 45(l+1) L_N \sum_{k=0}^{N_1-1} M |x_N^{\Delta}(t_k') - x_N^{\Delta_1}(t_k')|^2 \Delta_{1k} +$$

$$+ 45(l+1) L_N \varepsilon(\Delta_2) + 36\varepsilon_1(\Delta_1),$$

или

$$M \sup_{\tau\leqslant t\leqslant T} |x^{\Delta}(t) - x^{\Delta_1}(t)|^2 \leqslant \delta(N) + C_N \varepsilon(\Delta_1) + 36\varepsilon_1(\Delta_1) +$$

$$+ C_N \sum_{k=0}^{N_1-1} M |x_N^{\Delta}(t_k') - x_N^{\Delta_1}(t_k')|^2 \Delta_{1k}, \tag{4.13}$$

где $c_N = 45(l+1) L_N$.

Как легко убедиться,

$$M |x_N^{\Delta}(t_k') - x_N^{\Delta_1}(t_k')|^2 \leqslant (l+1) \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{t_s' \leqslant t_i < t_{s+1}'} M \Bigg[|a_N(t_i, x_N^{\Delta}(t_i)) -$$

$$- a_N(t_s, x_N^{\Delta_1}(t_s'))|^2 + \sum_{j=1}^{l} |b_j^{(N)}(t_i, x_N^{\Delta}(t_i)) -$$

$$- b_j^{(N)}(t_s', x_N^{\Delta_1}(t_s'))|^2 \Bigg] \Delta_i,$$

откуда, принимая во внимание полученные оценки, имеем

$$M |x_N^{\Delta}(t_k') - x_N^{\Delta_1}(t_k')|^2 \leqslant C_N' \sum_{s=0}^{k-1} M |x_N^{\Delta}(t_s') - x_N^{\Delta_1}(t_s')|^2 \Delta_{1s} +$$

$$+ C_N' \varepsilon(\Delta_1) + 6\varepsilon_1(\Delta_1),$$

где $C_N' = 6(l+1) L_N$.

Применяя к последнему соотношению лемму, можем записать

$$M |x_N^{\Delta}(t_k') - x_N^{\Delta_1}(t_k')|^2 \leqslant [C_N' \varepsilon(\Delta_1) + 6\varepsilon_1(\Delta_1)] \gamma_{\Delta_1}(N), \tag{4.14}$$

где

$$\lim_{|\Delta_1|\to 0} \gamma_{\Delta_1}(N) = e^{C_N'}.$$

Из оценок (4.13) и (4.14) имеем

$$M \sup_{\tau\leqslant t\leqslant T} |x^{\Delta}(t) - x^{\Delta_1}(t)|^2 \leqslant \delta(N) + C_N \varepsilon(\Delta_1) + 36\varepsilon_1(\Delta_1) +$$

$$+ [C_N' \varepsilon(\Delta_1) + 6\varepsilon_1(\Delta_1)] \gamma_{\Delta_1}(N),$$

так что

$$\lim_{|\Delta_1|\to 0} M \sup_{\tau\leqslant t\leqslant T} |x^{\Delta}(t) - x^{\Delta_1}(t)|^2 \leqslant \lim_{N\to\infty} \lim_{|\Delta_1|\to 0} \{\delta(N) + C_N\varepsilon(\Delta_1) + 36\varepsilon_1(\Delta_1) + [C'_N\varepsilon(\Delta_1) + 6\varepsilon_1(\Delta_1)]\,\gamma_{\Delta_1}(N)\} = 0.$$

Поскольку для слагаемого $M \sup\limits_{\tau\leqslant t\leqslant T} |x^{\Delta}(t) - x^{\Delta_2}(t)|^2$ имеет место такая же оценка, из соотношения (4.8) следует, что

$$\lim_{\substack{|\Delta_1|\to 0\\ |\Delta_2|\to 0}} M \sup_{\tau\leqslant t\leqslant T} |x^{\Delta_1}(t) - x^{\Delta_2}(t)|^2 = 0, \tag{4.15}$$

так что $x^{\Delta}(t)$ сходится в мысле среднего квадратического равномерно относительно t к некоторому пределу, который обозначим $x(t)$.

Из соотношений (4.15) и (4.7) следует, что

$$M \sup_{\tau\leqslant t\leqslant T} |x(t)|^2 < \infty. \tag{4.16}$$

Обозначим

$$z(t) = x(\tau) + \int_{\tau}^{t} a(s, x(s))\,ds + \sum_{j=1}^{l} \int_{\tau}^{t} b_j(s, x(s))\,dW_j(s).$$

Из условия 2), соотношения (4.16) и теоремы Фубини следует существование с вероятностью 1 интегралов, определяющих случайную функцию $z(t)$. Тогда, как легко проверить, имеем оценку

$$M \sup_{\tau\leqslant t\leqslant T} |z(t) - x^{\Delta}(t)|^2 \leqslant (l+1)\Big\{M \sup_{\tau\leqslant t\leqslant T}\Big|\int_{\tau}^{t} a(s, x(s))\,ds - \sum_{k}^{(t)} a(t_k, x^{\Delta}(t_k))\,\Delta_k\Big|^2 + \sum_{j=1}^{l} M \sup_{\tau\leqslant t\leqslant T}\Big|\int_{\tau}^{t} b_j(s, x(s)\,dW_j(s) - \sum_{k}^{(t)} b_j(t_k, x^{\Delta}(t_k))\,\Delta M_j^k\Big|^2\Big\} \leqslant (l+1)\sum_{k=0}^{N-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} M\Big[|a(s, x(s)) - a(t_k, x^{\Delta}(t_k))|^2 + 4\sum_{j=1}^{l} |b_j(s, x(s)) - b_j(t_k, x^{\Delta}(t_k))|^2\Big]ds.$$

Очевидно, что

$$|a(t, x(t)) - a(t_k, x^{\Delta}(t_k))|^2 \leqslant 2|a(t, x(t)) - a(t, x^{\Delta}(t_k))|^2 + 2|a(t, x^{\Delta}(t_k)) - a(t_k, x^{\Delta}(t_k))|^2 \leqslant 2|a(t, x(t)) - a(t, x^{\Delta}(t_k))|^2 + 4|A(t, x^{\Delta}(t_k), u(t, x^{\Delta}(t_k)) - A(t, x^{\Delta}(t_k), u(t_k, x^{\Delta}(i_k))|^2 + 4|A(t, x^{\Delta}(t_k), u(t_k, x^{\Delta}(t_k)) - A(t_k, x^{\Delta}(t_k), u(t_k, x^{\Delta}(t_k))|^2.$$

Обозначим

$$g_N = \begin{cases} 1, & \text{если } \sup\limits_{\tau\leqslant t\leqslant T} |x(t)| < N \text{ и } \sup\limits_{\tau\leqslant t\leqslant T} |x^{\Delta}(t)| < N, \\ 0 & \text{— в остальных случаях,} \end{cases}$$

тогда

$$M\,|\,a(t, x(t)) - a(t, x^{\Delta}(t_k))\,|^2 = M(1 - g_N)\,|\,a(t, x(t)) -$$
$$- a(t, x^{\Delta}(t_k))\,|^2 + Mg_N\,|\,a(t, x(t)) - a(t, x^{\Delta}(t_k))\,|^2. \qquad (4.17)$$

Из построения g_N и неравенства Чебышева следует, что

$$P\{1 - g_N > 0\} \leqslant \frac{1}{N^2}\,[M \sup_{\tau\leqslant t\leqslant T} |\,x(t)\,|^2 + M \sup_{\tau\leqslant t\leqslant T} |\,x^{\Delta}(t)\,|^2],$$

поэтому из условия 2) теоремы, соотношений (4.7) и (4.16) можем записать

$$M(1 - g_N)\,|\,a(t, x(t)) - a(t, x^{\Delta}(t_k))\,|^2 = \varepsilon_2(N),$$

где $\lim\limits_{N\to\infty} \varepsilon_2(N) = 0$; кроме того, из соотношения (4.11)

$$g_N\,|\,a(t, x(t)) - a(t, x^{\Delta}(t_k))\,|^2 \leqslant L_N\,|\,x(t) - x^{\Delta}(t_k)\,|^2,$$

и так как правая часть последнего соотношения стремится к 0 при $|\Delta| \to 0$ в смысле сходимости по вероятности, то из соотношений (4.7), (4.16) и условия 2) теоремы следует, что

$$\lim_{|\Delta|\to 0} Mg_N\,|\,a(t, x(t)) - a(t, x^{\Delta}(t_k))\,|^2 = 0.$$

Поэтому, возвращаясь к соотношению (4.17) и совершая предельный переход, имеем

$$\lim_{|\Delta|\to 0} M\,|\,a(t, x(t)) - a(t, x^{\Delta}(t_k))\,|^2 = 0. \qquad (4.18)$$

Аналогично устанавливается, что

$$\lim_{|\Delta|\to 0} M\,|\,A(t, x^{\Delta}(t_k), u(t, x^{\Delta}(t_k)) - A(t, x^{\Delta}(t_k), u(t_k, x^{\Delta}(t_k))|^2 = 0,$$

если t_k не служит точкой разрыва функции $u(t, x)$, а из условий 2), 3) и 4) теоремы и соотношения (4.7) вытекает, что

$$\lim_{|\Delta|\to 0} M\,|\,A(t, x^{\Delta}(t_k), u(t_k, x^{\Delta}(t_k)) - A(t_k(x^{\Delta}(t_k)), u(t_k, x^{\Delta}(t_k))\,|^2 = 0,$$

если t_k не является точкой разрыва функции $A(t, x, u)$, следовательно,

$$\lim_{|\Delta|\to 0} M\,|a(t, x(t)) - a(t_k, x^{\Delta}(t_k))\,|^2 = 0.$$

Точно такие же оценки имеют место для коэффициентов $b_j(t, x)$, $(j = \overline{1, l})$. Поэтому, переходя к пределу под знаками интегралов при $|\,\Delta\,| \to 0$, получим

$$\lim_{|\Delta|\to 0} M \sup_{\tau\leqslant t\leqslant T} |\,z(t) - x^{\Delta}(t)\,|^2 = 0,$$

и теорема доказана.

В случае программного управления $u = u(t)$ вместо того, чтобы требовать выполнения условия Липшица по переменной u для коэффициентов $A(t, x, u)$ и $B_j(t, x, u)$ $(j = \overline{1, l})$, достаточно потребовать выполнения непрерывности этих коэффициентов. Теорема о сходимости решения системы (4.4) к решению исходного уравнения (4.1) в этом случае может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 1′. Пусть выполняются первые два условия теоремы 1, случайные функции $A(t, x, u)$, $B_j(t, x, u)$, $(j = \overline{1, l})$ с вероятностью 1 непрерывны по совокупности переменных t и u, случайная функция $u(t)$ стохастически непрерывна при $\tau \leqslant t \leqslant T$, за исключением, быть может, конечного числа точек, где она может иметь с вероятностью 1 разрывы первого рода. Кроме того, существует такая константа L_R, при которой с вероятностью 1 справедливо неравенство

$$|A(t, x, u) - A(t, x', u)|^2 + \sum_{j=1}^{l} |B_j(t, x, u) - B_j(t, x', u)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant L_R |x - x'|^2,$$

где $|x| \leqslant R$, $|x'| \leqslant R$.

Тогда имеют место утверждения теоремы 1.

Доказательство этой теоремы принципиально не отличается от доказательства предыдущей теоремы и поэтому не приводится.

Исследуем условия сходимости конечно-разностного аналога задачи управления (4.4) — (4.6) к решению исходной задачи управления (4.1) — (4.3) в пределах следующего класса допустимых управлений. Будем считать управляющую функцию $u(t, x) \in \mathrm{U}$ допустимой, если она измерима по совокупности переменных, а при фиксированных t и x измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}_t$, стохастически непрерывна по t, $\tau \leqslant t \leqslant T$, за исключением, быть может, конечного числа точек, где она с вероятностью 1 может иметь разрывы первого рода и, кроме того, удовлетворяет по переменной x локальному условию Липшица, т. е. существует такая константа L_R, при которой с вероятностью 1

$$|u(t, x) - u(t, x')|^2 \leqslant L_R |x - x'|^2,$$

где $|x| \leqslant R$, $|x'| \leqslant R$. Ограничимся именно этим классом управлений. Обозначим через $u^*(t, x)$ оптимальное управление непрерывной задачи (4.1) — (4.3), пусть $x^*(t)$ — соответствующее этому управлению решение уравнения (4.1). Через $\overset{*}{u}_\Delta(t, x)$ обозначим оптимальное управление конечно-разностной задачи (4.4) — (4.6), через $\overset{*}{x}_\Delta(t)$ — соответствующее этому управлению решение системы рекуррентных соотношений (4.4). Условия, при которых $\overset{*}{u}_\Delta(t, x)$ стремится к $u^*(t, x)$ в смысле сходимости по функционалу, сформулированы в следующей теореме.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1, случайная функция $F(t, x, u)$ с вероятностью 1 непрерывна по совокупности переменных t, x и u; кроме того, существует такое K, при котором с вероятностью 1 имеет место соотношение

$$|F(t, x, u)|^2 \leqslant K(1 + |x|^2).$$

Тогда

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \Phi_\Delta(\overset{*}{u}_\Delta) = \Phi(u^*). \tag{4.19}$$

Доказательство. Обозначим через $\bar{x}(t)$ решение уравнения (4.1) при управлении $\overset{*}{u}_\Delta(t, x)$, а через $\tilde{x}_\Delta(t)$ — решение системы соотношений (4.4), соответствующее управлению $u^*(t, x)$. Обозначим: $\overset{*}{u}_\Delta = \overset{*}{u}_\Delta(t, \bar{x}(t))$, $u^* = u^*(t, \tilde{x}_\Delta(t))$.

Рассмотрим разность $\Phi(u^*) - \Phi_\Delta(\overset{*}{u}_\Delta)$, и предположим сначала, что она положительна. Поскольку управление $\overset{*}{u}_\Delta$ в смысле оптимальности для задачи (4.1) — (4.3) не лучше, чем управление u^*, то, очевидно,

$$0 < \Phi(u^*) - \Phi_\Delta(\overset{*}{u}_\Delta) \leqslant \Phi(\overset{*}{u}_\Delta) - \Phi_\Delta(\overset{*}{u}_\Delta)$$

и, следовательно,

$$\Phi(u^*) - \Phi_\Delta(\overset{*}{u}_\Delta) \leqslant \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} M \mid F(t, \bar{x}(t), \overset{*}{u}_\Delta(t, \bar{x}(t)) - $$

$$- F(t_i, x^*_\Delta(t_i), \overset{*}{u}_\Delta(t_i, x^*_\Delta(t_i)) \mid dt. \tag{4.20}$$

Очевидно, что

$$| \overset{*}{u}_\Delta(t, \bar{x}(t)) - \overset{*}{u}_\Delta(t_i, x^*_\Delta(t_i)) | \leqslant | \overset{*}{u}_\Delta(i, \bar{x}(t)) - \overset{*}{u}_\Delta(t_i, \bar{x}(t)) | +$$

$$+ | \overset{*}{u}_\Delta(t_i, \bar{x}(t)) - \overset{*}{u}_\Delta(t_i, x^*_\Delta(t_i)) |.$$

Из условия 4) теоремы 1 вытекает, что первое слагаемое в последнем неравенстве стремится к нулю при $|\Delta| \to 0$ в смысле сходимости по вероятности, за исключением того случая, когда точка t_i служит точкой разрыва случайной функции $u(t, x)$; проводя построение, подобное тому, которое было использовано при доказательстве сходимости (4.18), можно показать, что

$$\lim_{|\Delta| \to 0} M | \overset{*}{u}_\Delta(t_i, \bar{x}(t)) - \overset{*}{u}_\Delta(t_i, x^*_\Delta(t_i)) |^2 = 0,$$

так что второе слагаемое стремится к нулю при $|\Delta| \to 0$ в смысле сходимости по вероятности. Из теоремы 1 следует, что $\overset{*}{x}_\Delta(t_i)$ при $|\Delta| \to 0$ сходится по вероятности к $\bar{x}(t)$, поэтому совершая в неравенстве (4.20) предельный переход при $|\Delta| \to 0$, убеждаемся в справедливости соотношения (4.19) для рассматриваемого случая. Возможность перехода к пределу следует из наложенных на случайную функцию $F(t, x, u)$ ограничений, условия 4) теоремы 1 и вытекающей из теоремы 1 ограниченности величин $M \sup\limits_{\tau \leqslant t \leqslant T} | x^*_\Delta(t) |^2$ и $M \sup\limits_{\tau \leqslant t \leqslant T} | \bar{x}(t) |^2$ некоторой постоянной.

Рассмотрим теперь второй случай. Предположим, что

$$\Phi(u^*) - \Phi_\Delta(\overset{*}{u}_\Delta) < 0.$$

Управление u^* в смысле оптимальности для конечно-разностной задачи не лучше, чем управление $\overset{*}{u}_\Delta$, поэтому

$$\Phi(u^*) - \Phi_\Delta(u^*) \leqslant \Phi(u^*) - \Phi_\Delta(\overset{*}{u}_\Delta) < 0.$$

Применяя условия этой теоремы и используя теорему 1, можно убедиться с помощью неоднократно примененных выше приемов, что и в этом случае имеет место соотношение (4.19). Отсюда следует справедливость этого соотношения в общем случае.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Если управление $u = u(t)$ программное, то утверждения этой теоремы имеют место и в том случае, когда условия теоремы 1 заменены условиями теоремы 1'.

З а м е ч а н и е 2. Условие 2) теоремы 1 и аналогичное условие для случайной функции $F(t, x, u)$ в теореме 2 можно заменить требованиями, состоящими в том, что существуют такие k, k_1, k_2, при которых с вероятностью 1 выполняются соотношения

$$|u(t, x)|^2 \leqslant k(1 + |x|^2);$$

$$|A(t, x, u)|^2 + \sum_{j=1}^{l} |B_j(t, x, u)|^2 \leqslant k_1(1 + |x|^2 + |u|^2);$$

$$|F(t, x, u)|^2 \leqslant k_2 \qquad (1 + |x|^2 + |u|^2).$$

Теоремы, приведенные в этом параграфе, являются обоснованием замены задач оптимального управления типа (4.1) — (4.3) их конечно-разностными аналогами (4.4) — (4.6). Они дают условия, при которых решение непрерывной задачи (4.1) — (4.3) может быть аппроксимировано сколь угодно точно по функционалу решением дискретной задачи (4.4) — (4.6). Поэтому в дальнейшем будут рассматриваться только дискретные задачи оптимального управления.

Численные методы решения этих задач, которые можно получить, исходя из общих результатов теории стохастического программирования, позволяют рассчитывать на ЭВМ отдельные варианты решений и находить оптимальные варианты.

§ 2. НЕОБХОДИМЫЕ ПРИЗНАКИ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Рассматриваемые в этом параграфе необходимые условия оптимальности не только позволяют судить о том, является ли оптимальным данное управление, но и могут быть использованы для развития численных методов поиска оптимальных управлений, в частности для обоснования методов гл. 3.

Рассмотрим стохастическую задачу управления с дискретным временем, но для того чтобы подчеркнуть связь с предыдущим, запишем ее в форме конечно-разностного аналога некоторой непрерывной задачи типа (4.1) — (4.3).

Итак, пусть $\Delta = \Delta(t_0, t_1, \ldots, t_N)$ — заданное разбиение отрезка $[\tau, T]$. Определим последовательность случайных векторов $x_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n)$, $(k = \overline{0, N-1})$, положив

$$x_{k+1} + x_k + A(t_k, x_k, u_k(x_k))\,\Delta t_k + \sum_{j=1}^{l} B_j(t_k, x_k, u_k(x_k))\,\Delta W_j^k, \quad x_0 = x(\tau), \tag{4.21}$$

где

$$u_k(x_k) = u(t_k\, x_k) \in \mathrm{U}, \quad (k = \overline{0,\, N-1}). \tag{4.22}$$

Требуется среди управлений $u\ (t,\ x) \in \mathrm{U}$ нейти такое, которое минимизирует математическое ожидание

$$\Phi(u) = M \sum_{k=0}^{N-1} F(t_k,\, x_k,\, u_k(x_k))\, \Delta t_k. \tag{4.23}$$

Введем следующие обозначения. Пусть $|A|^2$ — сумма квадратов всех элементов матрицы A, $A_z(z)$ — матрица, у которой на пересечении μ-й строки и ν-го столбца находится элемент, равный $\frac{\partial}{\partial z_\nu} A_\mu(z)$.

Займемся сначала условиями существования для целевого функционала $\Phi(u)$ производной по направлению и найдем формулу для вычисления этой производной.

Пусть $u_k(x)$, $v_k(x)$, $(k = \overline{0,\ N-1})$ — некоторые управления. С помощью вещественного параметра α образуем новое управление $u_k^\alpha(x)$, $(k = \overline{0,\ N-1})$, положив

$$u_k^\alpha(x) = u_k(x) + \alpha v_k(x).$$

Меняя значения параметра α в промежутке $[0,\ \alpha_0]$, где α_0 — некоторое положительное число, получим семейство управлений. Каждому значению параметра α будет соответствовать определенное решение x_k^α системы (4.21) при управлении $u_k^\alpha(x)$ и определенное значение целевого функционала $\Phi(u^\alpha)$.

Прежде чем исследовать вопрос о приращении функционала, которое соответствует рассматриваемому приращению управляющей функции, докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2. Пусть выполняются условия:

1) случайные функции $v_k(x) = v(t_k,\ x)$ измеримы по совокупности переменных, а при фиксированных x измеримы относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}_{t_k}$ (σ-алгебры $\mathfrak{B}_{t_k}$, $(k = \overline{0,\ N})$ определены как и в предыдущем параграфе), с вероятностью, равной 1, и непрерывны; величины $M\,|v_k(x)|^2$ ограничены некоторой постоянной $(k = \overline{0,\ N-1})$;

2) элементы матриц $u_{xk}(x) = u_x(t_k,\ x)$ существуют, с вероятностью, равной 1, непрерывны и ограничены некоторой постоянной $(k = \overline{0,\ N-1})$;

3) элементы матриц $A_u(t_k,\ x,\ u)$ и $B_{ju}(t_k,\ x,\ u)$, $(j = \overline{1,\ l})$ существуют, с вероятностью, равной 1, непрерывны по u и ограничены некоторой постоянной $(k = \overline{0,\ N-1})$;

4) элементы матриц $A_x(t_k,\ x,\ u)$ и $B_{jx}(t_k,\ x,\ u)$, $(j = \overline{1,\ l})$ существуют, с вероятностью, равной 1, непрерывны по совокупности переменных x и u и ограничены некоторой постоянной $(k = \overline{0, N-1})$;

5) множество U выпуклое.

Тогда

$$\lim_{\alpha\to 0} x_k^\alpha = x_k, \quad (k=\overline{0,\ N-1})$$

в смысле сходимости по вероятности, x_k^α в точке $\alpha = 0$ имеет производную по α, равную h_k, где случайные величины h_k, $(k = \overline{0, N-1})$ определяются следующим образом:

$$h_{k+1} = h_k + \left[A_x(t_k, x_k, u_k(x_k))\,\Delta t_k + \sum_{j=1}^{l} B_{jx}(t_k, x_k, u_k(x_k))\,\Delta W_j^k\right] h_k +$$
$$+ \left[A_u(t_k, x_k, u_k(x_k))\,\Delta t_k + \sum_{j=1}^{l} B_{ju}(t_k, x_k, u_k(x_k))\,\Delta W_j^k\right] [u_{xk}(x_k)\,h_k +$$
$$+ v_k(x_k)], \quad h_0 = 0, \quad (k=\overline{1,\ N-1}), \tag{4.24}$$

причем величины $M\frac{1}{\alpha^2}|x_k^\alpha - x_k|^2$ ограничены некоторой постоянной. Производная определяется предельным переходом в смысле сходимости по вероятности, т. е.

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}(x_k^\alpha - x_k) = h_k, \quad (k=\overline{0,\ N-1}). \tag{4.25}$$

Доказательство. Положим

$$h_k^\alpha = \frac{1}{\alpha}(x_k^\alpha - x_k), \quad (k=\overline{0,\ N-1}).$$

Тогда

$$h_k^\alpha = \sum_{i=0}^{k-1}\left\{\frac{1}{\alpha}[A(t_i, x_i^\alpha, u_i^\alpha(x_i^\alpha)) - A(t_i, x_i, u_i(x_i))]\,\Delta_i +\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{\alpha}[B_j(t_i, x_i^\alpha, u_i^\alpha(x_i^\alpha)) - B_j(t_i, x_i, (u_i(x_i)))]\,\Delta W_j^i\right\},$$
$$(k=\overline{0,\ N-1}),$$

и, применяя формулу Лагранжа, имеем

$$h_k^\alpha = \sum_{i=0}^{k-1}\left\{\left[A_x^\theta(t_i, x_i^\alpha, u_i^\alpha(x_i^\alpha))\,\Delta_i + \sum_{j=1}^{l} B_{jx}^{\theta_j}(t_i, x_i^\alpha, u_i^\alpha(x_i^\alpha))\,\Delta W_j^i\right] h_i^\alpha +\right.$$
$$+\left[A_u^{\theta'}(t_i, x_i, u_i^\alpha(x_i^\alpha))\,\Delta_i + \sum_{j=1}^{l} B_{ju}^{\theta_j'}(t_i, x_i, u_i^\alpha(x_i^\alpha))\,\Delta W_j^i\right]\times$$
$$\left.\times\,[u_{xi}^{\theta''}(x_i^\alpha)\,h_i^\alpha + v_i(x_i^\alpha)]\right\}, \quad (k=\overline{0,\ N-1}), \tag{4.26}$$

где $A_x^\theta(t_k, x_k^\alpha, u_k^\alpha(x_k^\alpha))$ — матрица, у которой на пересечении μ-й строки и ν-го столбца находится элемент, равный $\frac{\partial}{\partial x_\nu}A_\mu(t_k,$ $\theta_{(\mu)}x_k^\alpha + (1-\theta_{(\mu)})\,x_k, u_k^\alpha(x_k^\alpha))$; $\theta_{(\mu)}$ — случайные величины, для которых с вероятностью 1 $0 < \theta_{(\mu)} < 1$; аналогично определяются остальные матрицы с индексом θ.

В силу ограниченности $M \| v_k(x) |^2$ из неравенства Чебышева следует

$$P\{\alpha \,|\, v_k(x) \,| > C\} \underset{\alpha \to 0}{\to} 0,$$

так что, если при $\alpha \to 0$ x_k^α стремится к x в смысле сходимости по вероятности, то

$$\lim_{\alpha \to 0} \alpha v_k(x_k^\alpha) = 0 \text{ и } \lim_{\alpha \to 0} u_k^\alpha(x_k^\alpha) = u_k(x), \quad (k = \overline{0, N-1})$$

в смысле сходимости по вероятности, так как случайные функции $v_k(x)$ и $u_k(x)$, $(k = \overline{0, N-1})$ по условию непрерывны.

Используя условия леммы и переходя к пределу в соотношениях, определяющих x_k^α, имеем

$$\lim_{\alpha \to 0} x_k^\alpha = x_k, \qquad (k = \overline{0, N-1})$$

в смысле сходимости по вероятности; затем, переходя к пределу в соотношениях (4.26), получим (4.24). Из условий леммы и соотношений (4.26) следует ограниченность величин $M \,|\, h_k^\alpha \,|^2$, $(k = \overline{0, N-1})$. Лемма доказана.

Найдем теперь выражение для производной функционала цели $\Phi(u)$ для задачи (4.21) — (4.23) по некоторому фиксированному направлению и рассмотрим условия, при которых она существует. Обозначим производную функционала $\Phi(u)$ в точке u по направлению v через $\delta_v \Phi(u)$:

$$\delta_v \Phi(u) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{\Phi(u + \alpha v) - \Phi(u)}{\alpha}.$$

Теорема 3. Пусть множество U выпуклое, случайные функции $A(t_k, x, u)$, $B_j(t_k, x, u)$, $(j = \overline{1, l})$, $u_k(x)$ и $v_k(x)$, $(k = \overline{0, N-1})$ удовлетворяют условиям леммы 2, а случайные функции $F(t_k, x, u)$, $(k = \overline{0, N-1})$ удовлетворяют следующим требованиям:

1) с вероятностью 1 существуют непрерывные по совокупности переменных x и u частные производные $\frac{\partial}{\partial x_\nu} F(t_k, x, u)$, $(\nu = \overline{1, n})$, ограниченные некоторой постоянной;

2) с вероятностью, равной 1, существуют непрерывные по u частные производные $\frac{\partial}{\partial u_\nu} F(t_k, x, u)$, $(\nu = \overline{1, q})$, ограниченные некоторой постоянной.

Тогда в точке $u_k(x)$, $(k = \overline{0, N-1})$ функционал $\Phi(u)$ имеет производную по направлению $v_k(x)$ $(k = \overline{0, N-1})$, равную

$$\delta_v \Phi(u) = M \sum_{k=0}^{N-1} [(F_x(t_k, x_k, u_k(x_k)), h_k) + (F_u(t_k, x_k, u_k(x_k)) u_{xk}(x_k), h_k) + \\ + (F_u(t_k, x_k, u_k(x_k)), v_k(x_k))] \Delta_k. \qquad (4.27)$$

Доказательство. Применяя к выражению

$$\frac{1}{\alpha}[\Phi(u+\alpha v)-\Phi(u)]=\frac{1}{\alpha}M\sum_{k=0}^{N-1}[F(t_k,x_k^\alpha,u_k^\alpha(x_k^\alpha))-$$

$$-F(t_k,x_k,u_k(x_k))]\Delta_k$$

формулу Лагранжа, имеем

$$\frac{1}{\alpha}[\Phi(u+\alpha v)-\Phi(u)]+M\sum_{k=0}^{N-1}[(\overset{\theta_1^0}{F_x}(t_k,x_k^\alpha,u_k^\alpha(x_k^\alpha)),h_k^\alpha)+$$

$$+(\overset{\theta_2^0}{F_u}(t_k,x_k,u_k^\alpha(x_k^\alpha))\overset{\theta_3^0}{u_{xk}}(x_k^\alpha),h_k^\alpha)+(\overset{\theta_4^0}{F_4}(t_k,x_k,u_k^\alpha(x_k^\alpha)),v_k(x_k^\alpha)),\quad(4.28)$$

Из леммы 2 и условий теоремы следует, что при $\alpha\to 0$

$$x_k^\alpha\to x_k;\quad h_k^\alpha\to h_k;\quad v_k(x_k^\alpha)\to v_k(x_k);\quad \overset{\theta_3^0}{u_{xk}}(x_k^\alpha)\to u_{xk}(x_k);$$

$$\overset{\theta_1^0}{F_x}(t_k,x_k,u_k^\alpha(x_k^\alpha))\to F_k(t_k,x_k,u_k(x_k));$$

$$\overset{\theta_2^0}{F_u}(t_k,x_k,u_k^\alpha(x_k^\alpha))\to F_u(t_k,x_k,u_k(x_k)),$$

$$(k=\overline{0,\ N-1})$$

в смысле сходимости по вероятности, причем величины $M|h_k^\alpha|^2$ и $M|v_k(x_k^\alpha)|^2$ ограничены равномерно относительно $\alpha\in[0,\ \alpha_0]$, $(k=\overline{0,\ N-1})$, так что, переходя к пределу при $\alpha\to 0$ в соотношении (4.28), получаем (4.27).

Теорема доказана.

Теперь несколько преобразуем выражение для производной по направлению функционала Φ (u), для чего определим случайные сопряженные переменные λ_k (стохастические множители Лагранжа), положив

$$\lambda_k=\lambda_{k+1}+[A_x^{\mathrm{T}}(t_k,x_k,u_k(x_k))\Delta_k+\sum_{j=1}B_{jx}^{\mathrm{T}}(t_k,x_k,u_k(x_k))\Delta W_j^k+$$

$$+A_u^{\mathrm{T}}(t_k,x_k,u_k(x_k))u_{xk}(x_k)\Delta_k+\sum_{j=1}^{l}B_{ju}^{\mathrm{T}}(t_k,x_k,u_k(x_k))u_{xk}(x_k)\Delta W_j^k]\lambda_{k+1}-$$

$$-F_x(t_k,x_k,u_k(x_k))\Delta_k-F_u(t_k,x_k,u_k(x_k))u_{xk}(x_k)\Delta_k,\qquad(4.29)$$

$$(k=\overline{N-1,\ 1}),\qquad \lambda_N=0.$$

Заметим, что система соотношений (4.24) может быть записана в следующем виде:

$$h_{k+1}=h_k+\left[A_x(t_k,x_k,u_k(x_k))\Delta_k+\sum_{j=1}^{l}B_{jx}(t_k,x_k,u_k(x_k))\Delta W_j^k\right]h_k+$$

$$+\left[A_u(t_k, x_k, u_k(x_k))\Delta_k + \sum_{j=1}^{l} B_{ju}(t_k, x_k, u_k(x_k))\Delta W_j^k\right] u_{xk}(x_k) h_k +$$

$$+\left[A_{u'}(t_k, x_k, u_k(x_k))\Delta_k + \sum_{j=1}^{l} B_{ju}(t_k, x_k, u_k(x_k))\Delta W_j^k\right] v_k(x_k)$$

$$(k = \overline{0, N-1}), \quad h_0 = 0.$$

Используя эту систему и систему (4.29), можно проверить справедливость соотношения

$$\delta_v \Phi(u) = M \sum_{l=0}^{N-1} [(F_{x'}(t_k, x_k, u_k(x_k)), h_k) +$$

$$+ (F_u(t_k, x_k, u_k(x_k)) u_{xk}(x_k), h_k) + (F_u(t_k, x_k, u_k(x_k)), v_k(x_k))] \Delta_k +$$

$$+ M \sum_{k=1}^{N-1} \left(\lambda_k, \left\{h_k - h_{k-1} - \left[A_x(t_{k-1}, x_{k-1}, u_{k-1}(x_{k-1}))\Delta_{k-1} + \right.\right.\right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{l} B_{jx}(t_{k-1}, x_{k-1}, u_{k-1}(x_{k-1}))\Delta W_j^{k-1}\right] h_{k-1} -$$

$$- \left[A_u(t_{k-1}, x_{k-1}, u_{k-1}(x_{k-1}))\Delta_{k-1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{l} B_{ju}(t_{k-1}, x_{k-1}, u_{k-1}(x_{k-1}))\Delta W_j^{k-1}\right] u_{x,k-1}(x_{k-1}) h_{k-1} -$$

$$- \left[A_u(t_{k-1}, x_{k-1}, u_{k-1}(x_{k-1}))\Delta_{k-1} + \right.$$

$$\left.\left.\left. + \sum_{j=1} B_{ju}(t_{k-1}, x_{k-1}, u_{k-1}(x_{k-1}))\Delta W_j^{k-1}\right] v_{k-1}(x_{k-1})\right\}\right) + M(\lambda_0, h_0) =$$

$$= M \sum_{k=0}^{N-1} \left(F_u(t_k, x_k, u_k(x_k))\Delta_k - \left[A_u^{\mathrm{T}}(t_k, x_k, u_k(x_k))\Delta_k + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{j=1}^{l} B_{ju}^{\mathrm{T}}(t_k, x_k, u_k(x_k))\Delta W_j^k\right] \lambda_{k+1}, v_k(x)\right).$$

Таким образом, в силу теоремы 3 имеет место следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть выполняются условия теоремы 3, λ_k — множители Лагранжа, определяемые сопряженной системой рекуррентных соотношений (4.29). Тогда производная для функционала $\Phi(u)$ по направлению v существует и может быть записана следующим образом:

$$\delta_v \Phi(u) = M \sum_{k=0}^{N-1} \left(F_u(t_k, x_k, u_k(x_k))\Delta_k - \right.$$

$$\left. - \left[A_u^{\mathrm{T}}(t_k, x_k, u_k(x_k))\Delta_k + \sum_{j=1}^{l} B_{ju}^{\mathrm{T}}(t_k, x_k\, u_k(x_k))\Delta W_j^k\right] \lambda_{k+1}, v_k(x_k)\right). \tag{4.30}$$

Получена основная формула для обоснования предложенного в гл. 3 метода решения рассматриваемых дискретных задач управления путем проектирования стохастических квазиградиентов. Покажем, что из этой формулы легко можно получить необходимые признаки экстремума функционала $\Phi(u)$ в форме, близкой к форме линеаризованного принципа максимума.

Пусть для случайной функции $u(t, x)$, определенной для $\tau \leqslant t \leqslant T$, $|x| < \infty$, $M|u(t, x)|^2$ существует и конечно, так что $u(t, x)$ есть гильбертова случайная функция. Это означает, что множество случайных величин $u(t_k, x_k)$ образует гильбертово пространство. Рассмотрим случайные функции $u_k(x) = u(t_k, x) \in \mathrm{U}$, $(k = \overline{0, N-1})$, измеримые по совокупности переменных, при фиксированном x измеримые относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}_{t_k}$. Будем считать, что они принадлежат классу $\mathfrak{N}_2(\mathrm{U})$, если они имеют с равной 1 вероятностью непрерывные ограниченные производные $u_x(t_k, x)$, $(k = \overline{0, N-})$ и если, кроме того, $M|u(t_k, x)|^2$, $(k = \overline{0, N-1})$ ограничены.

Пусть случайные функции $u_k(x)$ и $v_k(x)$, $(k = \overline{0, N-1})$ принадлежат классу $\mathfrak{N}_2(\mathrm{U})$. Будем говорить, что управление $v_k(x)$ образует **допустимое направление** для управления $u_k(x)$ по множеству $\mathfrak{N}_2(\mathrm{U})$, если существует такое число $\alpha_0 > 0$, зависящее от $u_k(x)$ и $v_k(x)$, при котором для $\alpha \in (0, \alpha_0)$ управляющая функция $v_k^{\alpha}(x) = u_k(x) + \alpha v_k(x)$ принадлежит множеству $\mathfrak{N}_2(\mathrm{U})$ с вероятностью 1, $(k = \overline{0, N-1})$. Очевидно, множество допустимых направлений для данного управления $u_k(x)$ образует некоторый конус, который обозначим через $K_u(\mathfrak{N}_2(\mathrm{U}))$.

Лемма 3. Пусть функционал $\Phi(u)$ принимает при некотором управлении $\overset{*}{u}_k(x) \in \mathfrak{N}_2(\mathrm{U})$ минимум и дифференцируем по всем направлениям $v_k(x) \in \mathfrak{N}_2(\mathrm{U})$, т. е. для функционала $\Phi(u)$ в точке $\overset{*}{u}_k(x)$ существуют производные по всем направлениям из $\mathfrak{N}_2(\mathrm{U})$.

Тогда выполняется соотношение

$$\min_{v \in K_{u^*}(\mathfrak{N}_2(\mathrm{U}))} \delta_v \Phi(u^*) = 0,$$

где минимум берется по всем управлениям, принадлежащим конусу $K_{u^*}(\mathfrak{N}_2(\mathrm{U}))$.

Доказательство. Пусть $v_k(x) \in \mathfrak{N}_2(\mathrm{U})$. Поскольку по условию функционал $\Phi(u)$ принимает минимум при управлении $\overset{*}{u}_k(x)$, а управление $\overset{*}{u}_k(x) + \alpha v_k(x)$ в смысле оптимальности не лучше, чем управление $\overset{*}{u}_k(x)$, то $\delta_v\Phi(u^*) \geqslant 0$, и, в частности, так как $u_k(x) \in \mathfrak{N}_2(\mathrm{U})$, то, очевидно, $0 \in K_{u^*}(\mathfrak{N}_2(\mathrm{U}))$ и $\delta_0\Phi(u^*) \geqslant 0$. Но, с другой стороны, $\delta_0\Phi(u^*) = 0$. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть целевой функционал $\Phi(u)$ при некотором управлении $\overset{*}{u}_k(x) \in \mathfrak{N}_2(\mathrm{U})$, $(k = \overline{0, N-1})$ принимает минимум, а условия теоремы 1 имеют место для всех управлений $v_k(x) \in \mathfrak{N}_2(\mathrm{U})$, $(k =$

$= \overline{0, N-1}$). Тогда имеет место соотношение

$$\min_{v \in \overline{K}_{u^*}(\mathfrak{N}_2(\mathrm{U}))} M\Bigg(F_u(t_k, \overset{*}{x}_k, \overset{*}{u}_k(\overset{*}{x}_k))\,\Delta_k -$$

$$-\left[A_u^{\mathrm{T}}(t_k, \overset{*}{x}_k, \overset{*}{u}_k(\overset{*}{x}_k))\,\Delta_k + \sum_{j=1}^{l} B_{ju}^{\mathrm{T}}(t_k, \overset{*}{x}_k, \overset{*}{u}_k(\overset{*}{x}_k))\,\Delta W_j^k\right]\overset{*}{\lambda}_{k+1},$$

$$v_k \times (\overset{*}{x}_k)\Bigg) = 0, \qquad (k = \overline{0, N-1}),$$

где $\overline{K}_{u^*}(\mathfrak{N}_2(\mathrm{U}))$ — замыкание конуса $K_{u^*}(\mathfrak{N}_2(\mathrm{U}))$ в смысле метрики в гильбертовом пространстве, а минимум берется по всем управлениям из $\overline{K}_{u^*}(\mathfrak{N}_2(\mathrm{U}))$.

Доказательство. Если $v_k(x)$, $(k = \overline{0, N-1})$ — некоторое управление из класса $\mathfrak{N}_2(\mathrm{U})$, то в силу теоремы 4 функционал $\Phi(u)$ в точке $\overset{*}{u}_k(x)$, $(k = \overline{0, N-1})$ дифференцируем по направлению $v_k(x)$, $(k = \overline{0, N-1})$. Поскольку условия теоремы выполняются равномерно относительно $v_k(x) \in \mathfrak{N}_2(\mathrm{U})$, $(k = \overline{0, N-1})$, то функционал $\Phi(u)$ в точке $\overset{*}{u}_k(x)$, $(k = \overline{0, N-1})$ имеет производную по всем направлениям из класса $\mathfrak{N}_2(\mathrm{U})$. Учитывая выражение для производной по функционалу и лемму 3, можем записать, что

$$\min_{v \in K_{u^*}(\mathfrak{N}_2(\mathrm{U}))} M \sum_{k=0}^{N-1}\Bigg(F_n(t_k, \overset{*}{x}_k, \overset{*}{u}_k(\overset{*}{x}_k))\,\Delta_k -$$

$$-\left[A_u^{\mathrm{T}}(t_k, \overset{*}{x}_k, \overset{*}{u}_k(\overset{*}{x}_k))\,\Delta_k + \sum_{j=1}^{l} B_{ju}^{\mathrm{T}}(t_k, \overset{*}{x}_k, \overset{*}{u}_k(\overset{*}{x}_k))\,\Delta W_j^k\right] \times$$

$$\times\, \overset{*}{\lambda}_{k+1}, v_k(\overset{*}{x}_k)\Bigg) = 0.$$

Поскольку математическое ожидание в левой части непрерывно относительно $v_k(x)$, то из этого соотношения следует утверждение леммы.

Теорема 5. Пусть функционал цели $\Phi(u)$ при некотором управлении $\overset{*}{u}_k(x) \in \mathfrak{N}_2(\mathrm{U})$, $(k = \overline{0, N-1})$ принимает минимум и условия теоремы 1 имеют место для всех управляющих функций $v_k(x) \in \mathfrak{N}_2(\mathrm{U})$, $(k = \overline{0, N-1})$. Тогда

$$\min_{v \in \mathrm{U}} M\Bigg(F_u(t_k, \overset{*}{x}_k, \overset{*}{u}_k(\overset{*}{x}_k))\,\Delta_k -$$

$$-\left[A_u^{\mathrm{T}}(t_k, \overset{*}{x}_k, u_k(\overset{*}{x}_k))\,\Delta_k + \sum_{j=1}^{l} B_{ju}^{\mathrm{T}}(t_k, \overset{*}{x}_k, \overset{*}{u}_k(\overset{*}{x}_k))\,\Delta W_j^k\right] \times$$

$$\times\, \overset{*}{\lambda}_{k+1}, v_k(\overset{*}{x}_k) - \overset{*}{u}_k(\overset{*}{x}_k)\Bigg) = 0, \qquad (k = \overline{0, N-1}). \qquad (4.31)$$

Доказательство. Обозначим

$$G(v_k) = M\Big(F_u(t_k,\ \overset{*}{x}_k,\ \overset{*}{u}_k(\overset{*}{x}_k))\,\Delta_k -$$
$$-\Big[A_u^{\mathrm{T}}(t_k,\ \overset{*}{x}_k,\ \overset{*}{x}_k(\overset{*}{x}_k))\,\Delta_k + \sum_{j=1}^{l} B_{ju}^{\mathrm{T}}(t_k,\ \overset{*}{x}_k,\ \overset{*}{u}_k(\overset{*}{x}_k))\,\Delta W_j^k\Big] \times$$
$$\times\,\overset{*}{\lambda}_{k+1},\ v_k(\overset{*}{x}_k)\Big), \qquad (k = \overline{0,\ N-1}).$$

Из условия выпуклости множества U вытекает, что конус $K_{u^*}(\mathfrak{R}_2(\mathrm{U}))$ совпадает с минимальным конусом, содержащим множество векторов $\mathrm{U} - u^*$. Тогда, поскольку конус $K_{u^*}(\mathfrak{R}_2(\mathrm{U}))$, как следует из вышесказанного, содержит множество $\mathrm{U} - u^*$, можем записать следующее соотношение:

$$\min_{v \in K_{u^*}(\mathfrak{R}_2(\mathrm{U}))} G(v_k) \leqslant \min_{v \in \mathrm{U} - u^*} G(v_k) = \min_{v \in \mathrm{U}} G(v_k - \overset{*}{u}_k), \quad (k = \overline{0,\ N-1}). \tag{4.32}$$

Так как $\overset{*}{u}_k(x) \in \mathfrak{R}_2(\mathrm{U})$ и, очевидно, $G(0) = 0$, то

$$\min_{v \in \mathrm{U}} G(v_k - \overset{*}{u}_k) \leqslant 0, \qquad (k = \overline{0,\ N-1}). \tag{4.33}$$

Ввиду оптимальности управления $\overset{*}{u}_k(x)$, $(k = \overline{0,\ N-1})$ из леммы 4 вытекает, что $\min\limits_{v \in \overline{K}_{u^*}(\mathfrak{R}_2(\mathrm{U}))} G(v_k) = 0$, $(k = \overline{0,\ N-1})$.

Очевидно,

$$\min_{v \in \overline{K}_{u^*}(\mathfrak{R}_2(\mathrm{U}))} G(v_k) \leqslant \min_{v \in K_{u^*}(\mathfrak{R}_2(\mathrm{U}))} G(v_k),$$

так что $\min\limits_{v \in \overline{K}_{u^*}(\mathfrak{R}_2(\mathrm{U}))} G(v_k) \geqslant 0$, и, следовательно, принимая во внимание соотношение (4.32), имеем

$$\min_{v \in \mathrm{U}} G(v_k - \overset{*}{u}_k) \geqslant 0, \qquad (k = \overline{0,\ N-1}).$$

Из последней оценки, соотношения (4.33) и построения функции $G(v_k)$ вытекает утверждение (4.31).

Теорема доказана.

Отметим, что полученные условия оптимальности могут служить естественным критерием при проверке оптимальности «подозреваемой» на экстремум управляющей функции, если только существует возможность решения возникающих в той или иной форме задач минимизации, а также при проверке принадлежности данного управления соответствующему множеству, и позволяют обосновать применение стохастических квазиградиентных методов гл. 3.

ГЛАВА 5

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ СО СТОХАСТИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ ДАРБУ

Эта глава посвящена исследованию задач оптимального управления системами с распределенными параметрами, поведение которых описывается стохастическими уравнениями гиперболического типа при заданных значениях на характеристиках этих уравнений, т. е. стохастическими уравнениями Дарбу.

В § 1 строится вспомогательный аппарат стохастических интегралов по винеровской мере на плоскости, позволяющих затем ввести стохастические уравнения Дарбу. Исследуются условия существования и единственности решений этих уравнений. В § 2 вводятся задачи управления со стохастическими уравнениями Дарбу, затем делается переход к конечно-разностной схеме и рассматриваются вопросы, аналогичные тем, которые изучались в предыдущей главе для задач оптимального управления со стохастическими дифференциальными уравнениями (4.1) — (4.3).

§ 1. СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДАРБУ

Обозначим $D = [0, X] \times [0, Y]$, $z = (x, y) \in D$.

Поток σ-алгебр $\mathfrak{A}_z = \mathfrak{A}_{xy}$ есть семейство σ-алгебр $\mathfrak{A}_z \subset \mathfrak{A}$, определенных на основном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, причем $\mathfrak{A}_z \subset \mathfrak{A}$, если $z \leqslant z'$. Пусть $W(x, y)$ — винеровская мера прямоугольника $[0, x) \times [0, y) \subset D$, подчиненная потоку σ-алгебр $\{\mathfrak{A}_z, z \in D\}$, т. е. $W(x, y)$ в каждой точке $(x, y) \in D$ измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}_z$. Кроме того, винеровская мера прямоугольника $[x, x + h_1) \times [y, y + h_2) \subset D$, которую можно представить следующим образом:

$$W(x + h_1, y + h_2) - W(x + h_1, y) - W(x, y + h_2) + W(x, y),$$

в каждой точке $(x, y) \in D$ не зависит от каждого из событий σ-алгебр $\mathfrak{A}_{xY}$ и $\mathfrak{A}_{Xy}$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_2(D)$ совокупность случайных функций $f(x, y)$, определенных в области D и подчиненных потоку σ-алгебр $\{\mathfrak{A}_z, z \in D\}$, если с вероятностью, равной 1,

$$\iint_D |f(x, y)|^2 dxdy < \infty.$$

Если, кроме того,

$$\iint_D M|f(x, y)|^2 dxdy < \infty,$$

то будем говорить, что случайная функция $f(x, y)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}(D)$.

Стохастический интеграл по винеровской мере будет построен для случайных функций из класса $\mathfrak{M}_2(D)$. Сначала определим его для кусочно-постоянных функций. Пусть $f(x, y)$ — некоторая кусочно-постоянная функция из $\mathfrak{M}_2(D)$, т. е. $f(x, y) = f(x_i, y_k)$ при $x_i \leqslant x < x_{i+1}$, $y_k \leqslant y < y_{k+1}$, $(i = \overline{0, p-1}$; $k = \overline{0, q-1})$, где точки $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_p = X$, $0 < y_0 < y_1 < \ldots < y_q = Y$ образуют некоторое разбиение Δ области D:

$$\Delta = \Delta(x_0, x_1, \ldots, x_p; y_0, y_1, \ldots, y_q).$$

Интеграл по винеровской мере для таких функций определяется следующим образом:

$$\iint_D f(x, y)\, dW(x, y) = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{q-1} f(x_i, y_k)\, \Delta W(x_i, y_k),$$

где $\Delta W(x_i, y_k) = W(x_{i+1}, y_{k+1}) - W(x_{i+1}, y_k) - W(x_i, y_{k+1}) + W(x_i, y_k)$ — винеровская мера прямоугольника $[x_i, x_{i+1})$ $[y_k, y_{k+1})$.

Свойства этого интеграла следующие.

1. Пусть $f(x, y) \in \mathfrak{M}(D)$. Тогда

$$M \iint_D f(x, y)\, dW(x, y) = 0; \tag{5.1}$$

$$M \left| \iint_D f(x, y)\, dW(x, y) \right|^2 = \iint_D M|f(x, y)|^2 dxdy. \tag{5.2}$$

2. Пусть $f(x, y) \in \mathfrak{M}_2(D)$, $C > 0$ и $N > 0$. Тогда

$$P\left\{\left| \iint_D f(x, y)\, dW(x, y) \right| > C\right\} \leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\iint_D |f(x, y)|^2 dxdy > N\right\} + \frac{N}{C^2}. \tag{5.3}$$

Свойства (5.1) и (5.2) вытекают из построения интеграла. Для доказательства свойства 2 построим вспомогательную функцию $\varphi_N(x, y)$: для $(x, y) \in [x_i, x_{i+1}) \times [y_k, y_{k+1})$, $(i = \overline{0, p-1}$; $k = \overline{0, q-1})$ определим ее следующим образом:

$$\varphi_N(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ если } \sum\limits_{\mu=0}^{i} \sum\limits_{\nu=0}^{k} |f(x_\mu, y_\nu)|^2 \Delta_{\mu\nu} > N, \\ f(x, y) \text{ — в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $\Delta_{\mu\nu} = (x_{\mu+1} - x_\mu)(y_{\nu+1} - y_\nu)$. Очевидно, что

$$P\left\{\left|\iint_D f(x, y)\,dW(x, y)\right| > C\right\} \leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\left|\iint_D \varphi_N(x, y)\,dW(x, y)\right| > C\right\} +$$

$$+ P\left\{\iint_D f(x, y)\,dW(x, y) \neq \iint_D \varphi_N(x, y)\,dW(x, y)\right\},$$

и из неравенства Чебышева и свойства 1 следует справедливость свойства (5.3).

Определим теперь стохастический интеграл по винеровской мере для произвольной функции $f(x, y) \in \mathfrak{M}_2(D)$. Пусть $f_n(x, y)$ — некоторая последовательность кусочно-постоянных функций из $\mathfrak{M}_2(D)$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \iint_D |f(x, y) - f_n(x, y)|^2\,dxdy = 0$$

в смысле сходимости по вероятности. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{m,n\to\infty} P\left\{\iint_D |f_m(x, y) - f_n(x, y)|^2\,dxdy > \varepsilon\right\} = 0.$$

В силу свойства 2 для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$

$$P\left\{\left|\iint_D f_m(x, y)\,dW(x, y) - \iint_D f_n(x, y)\,dW(x, y)\right| > \varepsilon\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \delta + P\left\{\iint_D |f_m(x, y) - f_n(x, y)|^2\,dxdy > \varepsilon^2\delta\right\}$$

и ввиду произвольности δ последовательность интегралов $\iint_D f_n(x, y)\,dW(x, y)$ сходится по вероятности к некоторому пределу, не зависящему от выбора последовательности случайных кусочно-постоянных функций $f_n(x, y)$. Обозначим этот предел $\iint_D f(x,y) \times \times dW(x,y)$ и будем его называть стохастическим интегралом по винеровской мере для данной случайной функции $f(x, y) \in \mathfrak{M}_2(D)$.

Так как для любой случайной функции $f(x, y) \in \mathfrak{M}(D)$ существует последовательность кусочно-постоянных функций $f_n(x, y) \in \mathfrak{M}(D)$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \iint_D M\,|f(x, y) - f_n(x, y)|^2\,dxdy = 0$, то справедливость свойства 1 для общего случая следу т из того, что оно выполняется для кусочно-постоянных функций, и из возможности совершить предельный переход. Аналогично для доказательства свойства 2 достаточно воспользоваться его справедливостью для кусочно-постоянных функций, а затем перейти к пределу.

Пусть A — некоторое борелевское множество из области D, $\chi_A(x, y)$ — его характеристическая функция, $f(x, y)$ — случайная функция из класса $\mathfrak{M}_2(D)$. Тогда $\chi_A(x, y) f(x, y) \in \mathfrak{M}_2(D)$ и, следовательно, существует стохастический интеграл $\iint\limits_D \chi_A(x, y) f(x, y) \times$ $\times\, dW(x, y)$, обозначим его через $\iint\limits_A f(x, y)\, dW(x, y)$. При $A =$ $= [x, x') \times [y, y') \subset D$ интеграл, $\iint\limits_{[x,x')\times[y,y')} f(s, t)\, dW(s, t)$ обозначим через $\int\limits_x^{x'}\int\limits_y^{y'} f(s, t)\, dW(s, t)$, а через $I(x, y)$ обозначим интеграл $\int\limits_0^x\int\limits_0^y f(s, t)\, dW(s, t)$.

Из построения стохастического интеграла вытекает:

3. Если случайная функция $f(x, y) \in \mathfrak{M}(D)$, то

$$M\left(\int\limits_x^{x'}\int\limits_y^{y'} f(s, t)\, dW(s, t)/\sigma_{xy}\right) = 0;$$

$$M\left(\left|\int\limits_x^{x'}\int\limits_y^{y'} f(s, t)\, dW(s, t)\right|^2/\sigma_{xy}\right) =$$

$$= \int\limits_x^{x'}\int\limits_y^{y'} M\{|f(s, t)|^2/\sigma_{xy}\}\, ds dt, \tag{5.4}$$

где $\sigma_{xy} = \sigma\{\sigma_{x\cdot}, \sigma_{\cdot y}\}$, $\sigma_{x\cdot} = \sigma\{\mathfrak{A}_{xy}, y \geqslant 0\}$, $\sigma_{\cdot y} = \sigma\{\mathfrak{A}_{xy}, x \geqslant 0\}$.

Определение. Случайная функция $\mu(x, y)$, $(x, y) \in R_+^2$, $R_+^2 =$ $= \{(x, y) \geqslant 0\}$ называется разностным мартингалом [7] относительно потока $\{\mathfrak{A}_{xy}, (x, y) \in R_+^2\}$, если

а) $M\mu(x, y) \neq \infty$, $\forall (x, y) \in R_+^2$;

б) $\mu(x, y)$ подчинена потоку $\{\mathfrak{A}_{xy}, (x, y) \in R_+^2\}$;

в) $M\{\square_{x'y'}\mu(x, y)/\sigma_{xy}\} = 0$, $\forall (x', y') \geqslant (x, y) \geqslant 0$,

где $\square_{x'y'}\mu(x, y) = \mu(x', y') - \mu(x', y) - \mu(x, y') + \mu(x, y)$;

г) семейства $\{\mu(x, 0), \sigma_{x\cdot}, x \geqslant 0\}$ и $\{\mu(0, y), \sigma_{\cdot y}, y \geqslant 0\}$ являются мартингалами.

Тогда, как легко следует из построения, $I(x, y)$ является разностным мартингалом [в частности, требование в) следует из справедливости соотношения (5.4)].

Для стохастического интеграла выполняются также следующие важные свойства:

4. Пусть $f(x, y) \in \mathfrak{M}_2(D)$. Тогда стохастический интеграл $I(x, y)$ как функция верхнего предела с вероятностью, равной 1, непрерывен.

5. Если случайная функция $f(x, y) \in \mathfrak{M}(D)$, то

$$M \sup_{(x,y)\in D} \left| \int_0^x \int_0^y f(s, t)\, dW(s, t) \right|^2 \leqslant 16 \iint_D M\, |f(x, y)|^2\, dxdy.$$

Справедливость свойства 4 следует из результатов работ [8] и [47], а свойства 5 — из работы [17].

Построенные стохастические интегралы позволяют ввести стохастический аналог уравнения Дарбу. Будем рассматривать следующее стохастическое уравнение Дарбу:

$$\xi(x, y) = \varphi(x, y) + \int_0^x \int_0^y a(s, t, \xi(s, t))\, dsdt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l} \int_0^x \int_0^y b_j(s, t, \xi(s, t))\, dW_j(s, t), \tag{5.5}$$

где $W_j(x, y)$, $(j = \overline{1, l})$ — независимые стохастические винеровские меры прямоугольника $[0, x) \times [0, y) \subset D$; $\varphi(x, y) = \{\varphi_1(x, y), \ldots \ldots, \varphi_n(x, y)\}$; $a(x, y, z) = \{a_1(x, y, z), \ldots, a_n(x, y, z)\}$; $b_j(x, y, z) = \{b_j^{(1)}(x, y, z), \ldots, b_j^{(n)}(x, y, z)\}$ — случайные заданные функции, определенные при $(x, y) \in D$, $|z| < \infty$, измеримые по совокупности своих переменных (включая и переменную ω из вероятностного пространства) и подчиненные потоку σ-алгебр $\{\mathfrak{F}_{xy}, (x, y) \in D\}$, определенному на основном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, причем для всех $(x, y) \in D$ винеровские меры прямоугольника $[x, x + h_1) \times [y, y + h_2) \subset D$, т. е. $W_j(x + h_1, y + h_2) - W_j(x + h_1, y) - W_j(x, y + h_2) + W_j(x, y)$, $(j = \overline{1, l})$, в совокупности не зависят для фиксированной точки $(x, y) \in D$ от каждого из событий σ-алгебр $\mathfrak{F}_{xY}$ и $\mathfrak{F}_{Xy}$. Случайная функция $\xi(x, y)$, подчиненная потоку $\{\mathfrak{F}_{xy}, (x, y) \in D\}$, называется решением уравнения (5.5), если для нее существуют входящие в правую часть этого уравнения интегралы, а само уравнение выполняется с вероятностью, равной 1, всюду в области D.

Стохастическое уравнение (5.5) можно рассматривать как стохастическое уравнение гиперболического типа в частных производных

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = a(x, y, \xi) + \sum_{j=1}^{l} b_j(x, y, \xi) \frac{\partial^2 W_j(x, y)}{\partial x \partial y}$$

при заданных значениях на его характеристиках

$$\xi(0, y) = \varphi(0, y),$$

$$\xi(x, 0) = \varphi(x, 0),$$

где $\frac{\partial^2 W_j(x, y)}{\partial x \partial y}$ — независимые «белые шумы» на плоскости, а решение уравнения понимается в указанном выше смысле. С другой стороны, его можно считать аналогом на плоскости стохастических дифференциальных уравнений, рассмотренных в предыдущей главе, так что полученные ниже результаты можно рассматривать как обобщение соответствующих положений для стохастических дифференциальных уравнений.

Некоторые частные случаи стохастических уравнений в частных производных типа (5.5) изучались в работах [31, 39, 46], а уравнения (5.5) — в статьях [40—43]. В статье [11] рассмотрено следующее стохастическое уравнение в частных производных для неслучайных достаточно гладких коэффициентов:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = a(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial y} + c(x, y, \xi) + d(x, y, \xi) \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x \partial y},$$

которое благодаря условию дифференцируемости, наложенному на функции $a(x, y)$ и $b(x, y)$, может быть записано в интегральной форме.

Перейдем теперь к исследованию условий существования и единственности решения стохастического уравнения Дарбу (5.5). Без ограничения общности, с целью сокращения записей, всюду в дальнейшем будем полагать $X = Y = 1$, т. е. $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Для простоты записей предположим, что $l = 1$, т. е. рассмотрим случай одномерной винеровской меры.

Теорема 1. Пусть выполняются условия

1) $M \sup\limits_{(x,y) \in D} |\varphi(x, y)|^2 < \infty$;

2) существует такое K, при котором для всех подчиненных потоку $\{\mathfrak{F}_{xy}, (x, y) \in D\}$ случайных функций $\zeta(x, y)$, $\zeta_1(x, y)$ и $\zeta_2(x, y)$ выполняются соотношения

$$M|a(x, y, \zeta(x, y))|^2 + M|b(x, y, \zeta(x, y))|^2 \leqslant K(1 + M|\zeta(x, y)|^2); \tag{5.6}$$

$$M|a(x, y, \zeta_1(x, y)) - a(x, y, \zeta_2(x, y))|^2 + M|b(x, y, \zeta_1(x, y)) - b(x, y, \zeta_2(x, y))|^2 \leqslant KM|\zeta_1(x, y) - \zeta_2(x, y)|^2. \tag{5.7}$$

Тогда стохастическое уравнение

$$\xi(x, y) = \varphi(x, y) + \int_0^x \int_0^y a(s, t, \xi(s, t))\, ds dt + \int_0^x \int_0^y b(s, t, \xi(s, t))\, dW(s, t) \tag{5.8}$$

имеет единственное с точностью до стохастической эквивалентности решение $\xi(x, y)$, причем

$$M \sup_{(x,y)\in D} |\xi(x, y)|^2 < \infty. \tag{5.9}$$

Если случайная функция $\varphi(x, y)$ с вероятностью 1 непрерывна, то для всякого решения уравнения (5.8) существует стохастически эквивалентное ему непрерывное с вероятностью 1 решение, и если $\xi_1(x, y)$ и $\xi_2(x, y)$ — два таких решения, то

$$P\{\sup_{(x,y)\in D} |\xi_1(x, y) - \xi_2(x, y)| = 0\} = 1, \tag{5.10}$$

причем условия 2) теоремы достаточно наложить на класс непрерывных с вероятностью 1 случайных функций, подчиненных потоку σ-алгебр $\{\mathfrak{F}_{xy}, (x, y) \in D\}$.

Доказательство. Докажем сначала единственность решения. Пусть выполняются условия теоремы, а $\xi_1(x, y)$ и $\xi_2(x, y)$ — некоторые два решения уравнения (5.8)

$$\xi_i(x, y) = \varphi(x, y) + \int_0^x \int_0^y a(s, t, \xi_i(s, t))\, ds dt +$$

$$+ \int_0^x \int_0^y b(s, t, \xi_i(s, t))\, dW(s, t), \qquad (i = 1, 2),$$

удовлетворяющие условию (5.9); соотношение (5.9) и условие (5.6) обеспечивают существование входящих в эти уравнения инт гралов. Очевидно, что

$$M|\xi_1(x, y) - \xi_2(x, y)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2M\left|\int_0^x \int_0^y [a(s, t, \xi_1(s, t)) - a(s, t, \xi_2(s, t))]\, ds dt\right|^2 +$$

$$+ 2M \left|\int_0^x \int_0^y [b(s, t, \xi_1(s, t)) - b(s, t, \xi_2(s, t))]\, dW(s, t)\right|^2,$$

и поскольку из условия (5.7) вытекает существование такой константы $K > 0$, при которой

$$M|a(x, y, \xi_1(x, y)) - a(x, y, \xi_2(x, y))|^2 +$$

$$+ M|b(x, y, \xi_1(x, y)) - b(x, y, \xi_2(x, y))|^2 \leqslant$$

$$\leqslant KM|\xi_1(x, y) - \xi_2(x, y)|^2,$$

то, следовательно, выполняется следующая оценка:

$$M|\xi_1(x, y) - \xi_2(x, y)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2K \int_0^x \int_0^y M|\xi_1(s, t) - \xi_2(s, t)|^2\, ds dt.$$

Итерируя это неравенство n раз, имеем

$$M|\xi_1(x, y)-\xi_2(x, y)|^2 \leqslant \frac{2^n K^n}{(n-1)!\,(n-1)!}\int_0^x\int_0^y M|\xi_1(s, t)-$$

$$-\xi_2(s, t)|^2(x-s)^{n-1}(y-t)^{n-1}\,dsdt$$

при всех $(x, y)\in D$. Переходя к пределу, получим, что в каждой точке $(x, y)\in D$ выполняется неравенство

$$M|\xi_1(x, y)-\xi_2(x, y)|^2=0,$$

так что

$$P\{\xi_1(x_1\ y)=\xi_2(x, y)\}=1,$$

т. е. решения $\xi_1(x, y)$ и $\xi_2(x, y)$ стохастически эквивалентны.

Итак, любые два решения уравнения (5.8) с вероятностью 1 совпадают в каждой точке $(x, y)\in D$. Следовательно, с вероятностью 1 они совпадают на любом счетном множестве N из области D, а, значит, и во всех точках непрерывности функций $\xi_1(x, y)$ и $\xi_2(x, y)$. Поэтому если $\xi_1(x, y)$ и $\xi_2(x, y)$ — два непрерывных с вероятностью 1 решения, а счетное множество N всюду плотно в области D, то

$$P\{\sup_{(x,y)\in D}|\xi_1(x, y)-\xi_2(x, y)|=0\}=$$

$$=P\{\sup_{(x,y)\in N}|\xi_1(x, y)-\xi_2(x, y)|=0\}=1,$$

т. е. имеет место соотношение (5.10).

Перейдем теперь к доказательству существования решения, удовлетворяющему условию (5.9). Определим последовательность случайных функций $\eta_n(x, y)$ следующими рекуррентными соотношениями:

$$\eta_0(x, y)=\varphi(x, y),$$

$$\eta_n(x, y)=\eta_0(x, y)+\int_0^x\int_0^y a(s, t, \eta_{n-1}(s, t))\,dsdt+$$

$$+\int_0^x\int_0^y b(s, t, \eta_{n-1}(s, t))\,dW(s, t). \tag{5.11}$$

Из условия 1) теоремы, соотношения (5.6), теоремы Фубини и из построения стохастического интеграла по винеровской мере вытекает существование с вероятностью 1 интегралов, входящих в правую часть соотношения (5.11). Используя условия 1) и (5.6), последовательно применяя оценку

$$M|\eta_n(x, y)|^2\leqslant 3M|\eta_0(x, y)|^2+3K\int_0^x\int_0^y M|\eta_{n-1}(s, t)|^2\,dsdt,$$

получим

$$M|\eta_n(x, y)|^2 \leqslant 3[M|\eta_0(x, y)|^2 + Kxy]\, e^{3K(x+y)} \leqslant$$
$$\leqslant 3[M \sup_{(x,y)\in D} |\varphi(x, y)|^2 + K]\, e^{6K}, \tag{5.12}$$

аналогично

$$M \sup_{(x,y)\in D} |\eta_n(x, y)|^2 \leqslant 48e^{96K}[K + M \sup_{(x,y)\in D} |\varphi(x, y)|^2]. \tag{5.12'}$$

Убедимся в фундаментальности последовательности случайных функций $\eta_n(x, y)$. Рассмотрим разность

$$\eta_{n+m}(x, y) - \eta_n(x, y) = \int_0^x\int_0^y [a(s, t, \eta_{n+m-1}(x, y)) -$$
$$- a(s, t, \eta_{n-1}(s, t))]\, dsdt + \int_0^x\int_0^y [b(s, t, \eta_{n+m-1}(s, t)) -$$
$$- b(s, t, \eta_{n-1}(s, t))]\, dW(s, t).$$

Из соотношения (5.7) следует, что

$$M|a(x, y, \eta_{n+m}(x, y)) - a(x, y, \eta_n(x, y))|^2 +$$
$$+ M|b(x, y, \eta_{n+m}(x, y)) - b(x, y, \eta_n(x, y))|^2 \leqslant$$
$$\leqslant KM|\eta_{n+m}(x, y) - \eta_n(x, y)|^2,$$

поэтому

$$M|\eta_{n+m}(x, y) - \eta_n(x, y)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2K\int_0^x\int_0^y M|\eta_{n+m-1}(s, t) - \eta_{n-1}(s, t)|^2\, dsdt.$$

Из этого неравенства легко получить следующую оценку:

$$M|\eta_{n+m}(x, y) - \eta_n(x, y)|^2 \leqslant (2K)^n \int_0^x\int_0^y \frac{(x-s)^{n-1}(y-t)^{n-1}}{(n-1)!\,(n-1)!} \times$$
$$\times M|\eta_m(s, t) - \eta_0(s, t)|^2\, dsdt,$$

и так как

$$M|\eta_m(x, y) - \eta_0(x, y)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2M\left|\int_0^x\int_0^y a(s, t, \eta_{m-1}(s, t))\, dsdt\right|^2 +$$
$$+ 2M\left|\int_0^x\int_0^y b(s, t, \eta_{m-1}(s, t))\, dW(s, t)\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2K\int_0^x\int_0^y (1 + M|\eta_{m-1}(s, t)|^2)\, dsdt,$$

а из соотношения (5.12) следует, что

$$M|\eta_n(x, y)-\eta_0(x, y)|^2 \leqslant 6Ke^{6K}[K+M\sup_{(x,y)\in D}|\varphi(x, y)|^2],$$

то и величины $M|\eta_{n+m}(x, y)-\eta_n(x, y)|^2$ ограничены.

Учитывая полученные выше оценки, можно легко убедиться в справедливости соотношения

$$M\sup_{(x,y)\in D}|\eta_{n+m}(x, y)-\eta_n(x, y)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(32L)^n}{(n-1)!\,(n-1)!}\iint_D M|\eta_m(x, y)-\eta_0(x, y)|^2\,dxdy.$$

Переходя в нем к пределу, найдем, что последовательность $\eta_n(x, y)$ сходится в смысле среднего квадратического к некоторому пределу $\eta(x, y)$; кроме того, в силу соотношения (5.11) и неравенства Чебышева

$$P\left\{\sup_{(x,y)\in D}|\eta_{n+1}(x, y)-\eta_n(x, y)|>\frac{1}{n^2}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant 32K\frac{(32L)^n n^4}{(n-1)!\,(n-1)!}[1+M\sup_{(x,y)\in D}|\varphi(x, y)|^2],$$

откуда следует сходимость с равной 1 вероятностью равномерно относительно x и y ряда

$$\eta_0(x, y)+\sum_{n=0}^{\infty}[\eta_{n+1}(x, y)-\eta_n(x, y)],$$

сумма которого с вероятностью 1 является равномерным пределом последовательности $\eta_n(x, y)$, так что $\eta(x, y)$ как равномерный предел последовательности $\eta_n(x, y)$ является непрерывной с вероятностью 1 случайной функцией, если только $\varphi(x, y)$ непрерывна с вероятностью 1.

Введем случайную функцию $\xi(x, y)$, положив

$$\xi(x, y)=\varphi(x, y)+\int_0^x\int_0^y a(s, t, \eta(s, t))\,dsdt+$$
$$+\int_0^x\int_0^y b(s, t, \eta(s, t))\,dW(s, t).$$

Так как, в силу неравенства (5.12′)

$$M\sup_{(x,y)\in D}|\eta(x, y)|^2<\infty, \tag{5.13}$$

то из условия (5.6) и теоремы Лебега — Фату следует существование с вероятностью 1 интегралов, определяющих случайную функцию $\xi(x, y)$. Покажем, что $\xi(x, y)$ является пределом в смысле среднего квадратического последовательности случайных функций $\eta_n(x, y)$. Очевидно, что

$$M|\eta_n(x, y)-\xi(x, y)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2 \iint_D M [\,|a(x, y, \eta_{n-1}(x, y)) -$$

$$- a(x, y, \eta(x, y))|^2 + |b(x, y, \eta_{n-1}(x, y)) -$$

$$- b(x, y, \eta(x, y))|^2]\, dxdy \leqslant$$

$$\leqslant 2K \iint_D M\,|\eta_{n-1}(x, y) - \eta(x, y)|^2\, dxdy,$$

но так как

$$\lim_{n\to\infty} M\,|\eta_n(x, y) - \eta(x, y)|^2 = 0,$$

то, учитывая соотношения (5.12) и (5.13), имеем

$$\lim_{n\to\infty} M\,|\eta_n(x, y) - \xi(x, y)|^2 = 0,$$

и, следовательно, $\xi(x, y)$ является пределом в смысле среднего квадратического последовательности $\eta_n(x, y)$. Из соотношения (5.13) следует (5.9). Теорема доказана.

В случае многомерной винеровской меры теорема существования и единственности решения стохастического уравнения Дарбу (5.5) формулируется следующим образом:

Теорема 1′. Пусть выполняются условия:

1) $M \sup\limits_{(x,y)\in D} |\varphi(x, y)|^2 < \infty$,

2) существует такое K, при котором для всех случайных функций $\zeta(x, y)$, $\zeta_1(x, y)$ и $\zeta_2(x, y)$, подчиненных потоку $\{\mathfrak{F}_{xy},\ (x, y) \in D\}$, имеют место следующие соотношения:

$$M\,|a(x, y, \zeta(x, y))|^2 + \sum_{j=1}^{l} M\,|b_j(x, y, \zeta(x, y))|^2 \leqslant$$

$$\leqslant K(1 + M\,|\zeta(x, y)|^2),$$

$$M\,|a(x, y, \zeta_1(x, y)) - a(x, y, \zeta_2(x, y))|^2 +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l} M\,|b_j(x, y, \zeta_1(x, y)) - b_j(x, y, \zeta_2(x, y))|^2 \leqslant$$

$$\leqslant KM\,|\zeta_1(x, y) - \zeta_2(x, y)|^2.$$

Тогда уравнение (5.5) имеет единственное с точностью до стохастической эквивалентности решение $\xi(x, y)$, причем

$$M \sup_{(x,y)\in D} |\xi(x, y)|^2 < \infty$$

Если случайная функция $\varphi(x, y)$ с вероятностью 1 непрерывна, то для всякого решения уравнений (5.5) существует стохастически эквивалентное ему непрерывное решение, а если $\zeta_1(x, y)$ и $\zeta_2(x, y)$ — два некоторых непрерывных решения уравнения (5.5), то

$$P\{\sup_{(x,y)\in D} |\xi_1(x, y) - \xi_2(x, y)| = 0\} = 1.$$

Доказательство этой теоремы в принципе не отличается от доказательства теоремы 1.

Для неслучайных коэффициентов условия существования и единственности решений стохастических уравнений Дарбу типа (5.5) совпадают с соответствующими условиями существования и единственности решений обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений (см., например, работы [9, 10]), достаточно положить $z = \zeta(x, y)$, $z_1 = \zeta_1(x, y)$ и $z_2 = \zeta_2(x, y)$.

Чтобы заменить «глобальное» условие Липшица локальным и тем самым несколько ослабить условия существования и единственности решения стохастического уравнения Дарбу, нам понадобится следующее утверждение о локальной зависимости решения стохастического уравнения Дарбу (5.5) от коэффициентов $a(x, y, z)$ и $b_j(x, y, z)$, $(j = \overline{1, l})$ как функций z:

Лемма 1. Пусть коэффициенты $a_1(x, y, z)$, $a_2(x, y, z)$, $b_j^{(1)}(x, y, z)$, $b_j^{(2)}(x, y, z)$, $(j = \overline{1, l})$, $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ стохастических уравнений

$$\xi_i(x, y) = \varphi_i(x, y) + \int_0^x \int_0^y a_i(s, t, \xi_i(s, t))\, ds dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l} \int_0^x \int_0^y b_j^{(i)}(s, t, \xi_i(s, t))\, dW_j(s, t), \qquad (i = 1, 2)$$

удовлетворяют условиям теоремы 1′, причем случайные функции $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ с вероятностью 1 непрерывны и существует такое N, при котором $a_1(x, y, z) = a_2(x, y, z)$, $b_j^1(x, y, z) = b_j^2(x, y, z)$, $(j = \overline{1, l})$ для $|z| < N$.

Если $(\tilde{x}, \tilde{y})$ — такая точка из области D, при которой для $0 \leqslant x \leqslant \tilde{x}$, $0 \leqslant y \leqslant \tilde{y}$ имеет место $\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y)$ и $\sup\limits_{(x,y)\in[0,\tilde{x}]\times[0,\tilde{y}]} |\xi_i(x, y)| \leqslant N$, $i = 1, 2$, то во всех точках непрерывности $\xi_1(x, y) = \xi_2(x, y)$ с вероятностью 1 при $0 \leqslant x \leqslant \tilde{x}$, $0 \leqslant y \leqslant \tilde{y}$.

Доказательство. Обозначим через $\chi(x, y)$ характеристическую функцию прямоугольника $[0, \tilde{x}] \times [0, \tilde{y}]$:

$$\chi(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x, y) \in [0, \tilde{x}] \times [0, \tilde{y}], \\ 0 & \text{— в остальных случаях,} \end{cases}$$

так что если $\chi(x, y) = 1$, то при $s \leqslant x$, $t \leqslant y$

$$\varphi_1(s, t) = \varphi_2(s, t), \ \chi(s, t) = 1,$$

$$a_1(s, t, \xi_1(s, t)) = a_2(s, t, \xi_2(s, t)),$$

$$b_j^{(1)}(s, t, \xi_1(s, t)) = b_j^{(2)}(s, t, \xi_2(s, t)), \qquad (j = \overline{1, l}).$$

Следовательно,

$$\chi(x, y)\,|\xi_1(x, y) - \xi_2(x, y)|^2 =$$

$$= \chi(x, y)\Bigg|\int_0^x\int_0^y [a_2(s, t, \xi_1(s, t)) - a_2(s, t, \xi_2(s, t))]\,dsdt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l}\int_0^x\int_0^y [b_j^{(2)}(s, t, \xi_1(s, t)) - b_j^{(2)}(s, t, \xi_2(s, t))]\,dW_j(s, t)\,\Bigg|^2.$$

Беря от обеих частей этого соотношения математическое ожидание, применяя неравенство Коши и условие Липшица, получим

$$M\chi(x, y)\,|\xi_1(x, y) - \xi_2(x, y)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant C\int_0^x\int_0^y M\,|\xi_1(s, t) - \xi_2(s, t)|^2\,\chi(s, t)\,dsdt, \qquad C = (l+1)K.$$

После n итераций имеем

$$M\chi(x, y)\,|\xi_1(x, y) - \xi_2(x, y)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C^n}{(n-1)!\,(n-1)!}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{n-1}(y-s)^{n-1}\,M\chi(s, t)\,|\xi_1(s, t) -$$

$$- \xi_2(s, t)|^2\,dsdt,$$

откуда

$$M\chi(x, y)\,|\xi_1(x, y) - \xi_2(x, y)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C^n}{(n-1)!\,(n-1)!}\iint_D M\chi(s, t)\,|\xi_1(s, t) - \xi_2(s, t)|^2\,dsdt.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, имеем, что в каждой точке $(x, y) \in$ $\in D$ выполняется равенство

$$M\chi(x, y)\,|\xi_1(x, y) - \xi_2(x, y)|^2 = 0.$$

Из этого соотношения и из построения функции $\chi(x, y)$ вытекает справедливость леммы.

Теорема 2. Пусть имеют место условия:

1) случайная функция $\varphi(x, y)$ с вероятностью 1 непрерывна и $M \sup\limits_{(x,y)\in D} |\varphi(x, y)|^2 < \infty$;

2) существует такое K, при котором для всех непрерывных с вероятностью 1 случайных функций $\zeta(x, y)$, подчиненных потоку $\{\mathfrak{F}_{xy}, (x, y) \in D\}$, справедливо неравенство

$$M\,|a(x, y, \zeta(x, y))|^2 + \sum_{j=1}^{l} M\,|b_j(x, y, \zeta(x, y))|^2 \leqslant$$

$$\leqslant K(1 + M\,|\zeta(x, y)|^2);$$

3) для любого $R > 0$ существует такое L_R, при котором для всех непрерывных с вероятностью 1 случайных функций $\zeta_1(x, y)$ и $\zeta_2(x,$

y), подчиненных потоку $\{\mathfrak{F}_{xy},\ (x,\ y)\in D\}$, выполняется соотношение

$$M\,|\,a(x,\ y,\ \zeta_1(x,\ y))-a(x,\ y,\ \zeta_2(x,\ y))\,|^2+$$
$$+\sum_{j=1}^{l} M\,|\,b_j(x,\ y,\ \zeta_1(x,\ y))-b_j(x,\ y,\ \zeta_2(x,\ y))\,|^2\leqslant$$
$$\leqslant L_R M\,|\,\zeta_1(x,\ y)-\zeta_2(x,\ y)\,|^2, \tag{5.14}$$

если $|\,\zeta_1(x,\ y)\,|$ и $|\,\zeta_2(x,\ y)\,|\leqslant R$.

Тогда уравнение (5.5) имеет единственное с точностью до стохастической эквивалентности решение $\xi\,(x,\ y)$, непрерывное с вероятностью 1.

Доказательство. Докажем сначала существование решения. Пусть выполняются условия теоремы. Положим

$$g_N(z)=\begin{cases} 1, & \text{если } |\,z\,|\leqslant N,\\ N+1-|\,z\,|, & \text{если } N<|\,z\,|\leqslant N+1,\\ 0, & \text{если } |\,z\,|>N+1,\end{cases}$$

и обозначим:

$$\varphi_N(x,\ y)=g_N(\varphi(x,\ y))\,\varphi(x,\ y);$$
$$a_N(x,\ y,\ z)=g_N(z)\,a(x,\ y,\ z),$$
$$b_j^{(N)}(x,\ y,\ z)=g_N(z)\,b_j(x,\ y,\ z),\qquad (j=\overline{1,\ l}).$$

Пусть $\xi_N\,(x,\ y)$ — решение уравнения

$$\xi_N(x,\ y)=\varphi_N(x,\ y)+\int_0^x\int_0^y a_N(s,\ t,\ \xi_N(s,\ t))\,ds\,dt+$$
$$+\sum_{j=1}^{l}\int_0^x\int_0^y b_j^{(N)}(s,\ t,\ \xi_N(s,\ t))\,dW_j(s,\ t),$$

тогда из леммы 1 вытекает, что при $N'>N$ с вероятностью 1 $\xi_{N'}\,(x,\ y)=\xi_N\,(x,\ y)$ во всех точках непрерывности решений $\xi_{N'}\,(x,\ y)$ и $\xi_N\,(x,\ y)$, если только

$$\sup_{(x,y)\in D}|\,\xi_N(x,\ y)\,|\ \text{ и }\ \sup_{(x,y)\in D}|\,\xi_{N'}(x,\ y)\,|\leqslant N,$$

поэтому

$$P\{\sup_{(x,y)\in D}|\,\xi_{N'}(x,\ y)-\xi_N(x,\ y)\,|>0\}\leqslant$$
$$\leqslant P\{\sup_{(x,y)\in D}|\,\xi_{N'}(x,y)\,|\geqslant N\}+$$
$$+P\{\sup_{(x,y)\in D}|\,\xi_N(x,\ y)\,|\geqslant N\}.$$

Аналогично тому, как это проделано для обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений [34, с. 62], можно показать с помощью теоремы 1', что существует возрастающая последовательность N_k, для которой

$$P\{\sup_{(x,y)\in D}|\xi_N(x, y)|>N_k\}\leqslant\frac{1}{k^2}$$

при $N>N_k$, следовательно,

$$P\{\sup_{(x,y)\in D}|\xi_{N_k}(x, y)-\xi_{N_{k+1}}(x, y)|>0\}\leqslant\frac{2}{k^2}.$$

В силу леммы Бореля—Кантелли из последовательности событий $\{\sup_{(x,y)\in D}|\xi_{N_k}(x, y)-\xi_{N_{k+1}}(x, y)|>0\}$ происходит с вероятностью 1 только конечное число событий, поэтому, начиная с некоторого номера $\tilde{N}$, все $\xi_{N_k}(x, y)$ равны между собой. Следовательно, последовательность $\xi_{N_k}(x, y)$ с вероятностью, равной 1, сходится к некоторому пределу $\xi(x, y)$. Ввиду равномерной сходимости случайная функция $\xi(x, y)$ непрерывна с вероятностью 1. Так как $|\xi_{N_k}(x, y)|\leqslant N_k+1$, то

$$M\sup_{(x,y)\in D}|(x, y)|^2<\infty$$

и, следовательно, можно ввести случайную функцию $\zeta(x, y)$, положив

$$\zeta(x, y)=\varphi(x, y)+\int_0^x\int_0^y a(s, t, \xi(s, t))\,ds\,dt+$$

$$+\sum_{j=1}^{l}\int_0^x\int_0^y b_j(s, t, \xi(s, t))\,dW_j(s, t),$$

поскольку входящие в правую часть этого соотношения интегралы существуют с вероятностью 1. Используя условия теоремы, неравенство Коши и соответствующие свойства интегралов, имеем

$$M|\xi_{N_k}(x, y)-\xi(x, y)|^2\leqslant$$

$$\leqslant(2+l)\{\sup_{(x,y)\in D}M|\varphi_{N_k}(x, y)-\varphi(x, y)|^2+$$

$$+\iint_D M[|a_{N_k}(s, t, \xi_{N_k}(s, t))-a(s, t, \xi(s, t))|^2+$$

$$+\sum_{j=1}^{l}|b_j^{(N_k)}(s, t, \xi_{N_k}(s, t))-b_j(s, t, \xi(s, t))|^2]\,ds\,dt.$$

Пусть $N_k>\tilde{N}$, тогда $\xi_{N_k}(x, y)=\xi(x, y)$, и так как

$$a(x, y, \xi(x, y))-a_{N_k}(x, y, \xi_{N_k}(x, y))=$$

$$=(1-g_{N_k}(\xi(x, y)))\,a(x, y, \xi(x, y)),$$

$$b_j(x, y, \xi(x, y))-b_j^{(N_k)}(x, y, \xi_{N_k}(x, y))=$$

$$= (1 - g_{N_k}(\xi(x, y)))\, b_j(x, y, \xi(x, y)), \qquad (j = \overline{1, l}),$$

$$\varphi(x, y) - \varphi_{N_k}(x, y) = (1 - g_{N_k}\, \varphi(x, y)))\, \varphi(x, y),$$

то при любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$

$$P\{|a(x, y, \xi(x, y))|(1 - g_{N_k}(\xi(x, y)) > \varepsilon\} \leqslant$$

$$\leqslant P\{1 - g_{N_k}(\xi(x, y)) > \delta\} + P\left\{|a(x, y, \xi(x, y))| > \frac{\varepsilon}{\delta}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant P\{\sup_{(x,y)\in D} |\xi_{N_k}(x, y)| > N_k\} + \frac{\delta^2}{\varepsilon^2} M \sup_{(x,y)\in D} |\xi(x, y)|^2$$

и, следовательно, выбирая δ сколь угодно малым, имеем

$$\lim_{N_k\to\infty} a_{N_k}(x, y, \xi(x, y)) = a(x, y, \xi(x, y))$$

в смысле сходимости по вероятности, но так как

$$M|a_{N_k}(x, y, \xi(x, y))|^2 \leqslant M|a(x, y, \xi(x, y))|^2 \leqslant$$

$$\leqslant K(1 + M \sup_{(x,y)\in D} |\xi(x, y)|^2) < \infty,$$

то

$$\lim_{N_k\to\infty} M|a_{N_k}(x, y, \xi(x, y)) - a(x, y, \xi(x, y))|^2 = 0$$

и аналогично

$$\lim_{N_k\to\infty} M|b_j^{(N_k)}(x, y, \xi(x, y)) - b_j(x, y, \xi(x, y))|^2 = 0,$$

$$(j = \overline{1, l}).$$

Кроме того, как можно легко убедиться, случайная функция $\varphi(x, y)$ является пределом в смысле среднего квадратического последовательности $\varphi_{N_k}(x, y)$, поэтому

$$\lim_{N_k\to\infty} M|\xi_{N_k}(x, y) - \zeta(x, y)|^2 = 0,$$

и, следовательно, среднеквадратический предел $\xi(x, y)$ последовательности $\xi_{N_k}(x, y)$ есть решение уравнения (5.5).

Докажем теперь единственность решения. Предположим, что $\xi_1(x, y)$ и $\xi_2(x, y)$ — некоторые два непрерывных решения уравнения (5.5). Введем случайную функцию $X(x, y)$, положив

$$X(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ если } \sup\limits_{(s,t)\in[0,x]\times[0,y]} |\xi_1(s, t)| < N \\ \quad \text{и } \sup\limits_{(s,t)\in[0,x]\times[0,y]} |\xi_2(s, t)| < N, \\ 0 \text{ — в противоположном случае.} \end{cases}$$

Используя построение $X(x, y)$, неравенство Коши и условие Липшица (5.14), имеем

$$M|\xi_1(x, y) - \xi_2(x, y)|^2 X(x, y) \leqslant$$
$$\leqslant (l+1)\left\{M\left|\int_0^x\int_0^y X(s, t)[a(s, t, \xi_1(s, t)) -\right.\right.$$
$$- a(s, t, \xi_2(s, t))]\,dsdt|^2 +$$
$$+ \sum_{i=1}^{l} M\left|\int_0^x\int_0^y X(s, t)[b_i(s, t, \xi_1(s, t)) -\right.$$
$$\left.\left.- b_i(s, t, \xi_2(s, t))]\,dW_i(s, t)\right|^2\right\} \leqslant$$
$$\leqslant (l+1) L_N \iint_D MX(s, t)|\xi_1(s, t) - \xi_2(s, t)|^2 dsdt.$$

После n итераций можем записать, что

$$MX(x, y)|\xi_1(x, y) - \xi_2(x, y)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{((l+1)L_N)^n}{(n-1)!\,(n-1)!}\iint_D MX(x, y)|\xi_1(x, y) - \xi_2(x, y)|^2 dxdy,$$

следовательно,

$$MX(x, y)|\xi_1(x, y) - \xi_2(x, y)|^2 = 0,$$

откуда

$$P\{\xi_1(x, y) \neq \xi_2(x, y)\} \leqslant P\{\sup_{(x,y)\in D}|\xi_1(x, y)| > N\} +$$
$$+ P\{\sup_{(x,y)\in D}|\xi_2(x, y)| > N\},$$

и поскольку $\xi_1(x, y)$ и $\xi_2(x, y)$ с вероятностью 1 ограничены, то, переходя к пределу при $N \to \infty$, имеем

$$P\{\xi_1(x, y) = \xi_2(x, y)\} = 1$$

для каждой точки (x, y) из области D.

Теорема доказана.

Для неслучайных коэффициентов в этом случае условия существования и единственности решения стохастического уравнения Дарбу (5.5) также аналогичны соответствующим условиям существования и единственности решения обыкновенного стохастического дифференциального уравнения, достаточно лишь положить

$$z = \zeta(x, y), \quad z_1 = \zeta_1(x, y), \quad z_2 = \zeta_2(x, y).$$

Замечание. Если случайная функция $\varphi(x, y)$ с вероятностью 1 не имеет разрывов второго рода, то и решение уравнения (5.5) не имеет с вероятностью 1 разрывов второго рода (ввиду непрерывности определяющих его стохастических интегралов), и два стохастически эквивалентных решения, не имеющих с вероятностью 1 разрывов второго рода, совпадают с вероятностью 1 во всех точках непрерывности этих решений, потому что они совпадают на счетном множестве с равной единице вероятностью.

Перейдем к конечно-разностной аппроксимации стохастического уравнения (5.5). Пусть $\Delta = \Delta(x_0\, x_1, \ldots, x_p;\; y_0, y_1, \ldots, y_q)$ — некоторое разбиение области D $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_p = 1$; $0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_q = 1$. Рассмотрим конечно-разностную аппроксимацию $\xi^\Delta(x, y)$ решения уравнения (5.5), соответствующую этому разбиению. Это есть решение следующей системы рекуррентных соотношений:

$$\xi^\Delta(x, 0) = \varphi(x, 0),\ \xi^\Delta(0, y) = \varphi(0, y),\ (x, y) \in D;$$

$$\begin{aligned}\xi^\Delta(x, y) - \xi^\Delta(x, y_k) - \xi^\Delta(x_i, y) + \xi^\Delta(x_i, y_k) = \varphi(x, y) - \varphi(x, y_k) - \\ - \varphi(x_i, y) + \varphi(x_i, y_k) + a(x_i, y_k, \xi^\Delta_{ik})(x - x_i)(y - y_k) + \\ + \sum_{j=1}^{l} b_j(x_i, y_k, \xi^\Delta_{ik})[W_j(x, y) - W_j(x, y_k) - W_j(x_i, y) + \\ + W_j(x_i, y_k)]\end{aligned} \tag{5.15}$$

при $(x, y) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$ $(i = \overline{0, p-1};\ k = \overline{0, q-1})$, где $\xi^\Delta_{ik} = \xi^\Delta(x_i, y_k)$.

Решение этой системы $\xi^\Delta(x, y)$ может быть записано в следующей форме:

$$\xi^\Delta(x, y) = \varphi(x, y) + \sum_{\mu}^{(x)} \sum_{\nu}^{(y)} \Big[a(x_\mu, y_\nu, \xi^\Delta_{\mu\nu})\Delta_{\mu\nu} + \sum_{j=1}^{l} b_j(x_\mu, y_\nu, \xi^\Delta_{\mu\nu})\Delta W_j^{\mu\nu}\Big]$$

при $\Delta_{\mu\nu} = (x_{\mu+1} - x_\mu)(y_{\nu+1} - y_\nu)$, $\Delta W_j^{\mu\nu} = W_j(x_{\mu+1}, y_{\nu+1}) - W_j \times (x_\mu, y_{\nu+1}) - W_j(x_{\mu+1}, y_\nu) + W_j(x_\mu, y_\nu)$, $(j = \overline{1, l})$, где символы $\sum\limits_{\mu}^{(x)}$, $\sum\limits_{\nu}^{(y)}$ означают суммирование по всем индексам μ и ν, для которых $x_\mu < x$, $y_\nu < y$, причем в последних слагаемых $x_{(\cdot)+1} = x$, $y_{(\cdot)+1} = y$, так что эти слагаемые равны соответственно

$$\begin{aligned}a(x_{(\cdot)}, y_\nu, \xi^\Delta_{(\cdot)\nu})(x - x_{(\cdot)})(y_{\nu+1} - y_\nu) + \\ + \sum_{j=1}^{l} b_j(x_{(\cdot)}, y_\nu, \xi^\Delta_{(\cdot)\nu})[W_j(x, y_{\nu+1}) - W_j(x, y_\nu) - \\ - W_j(x_{(\cdot)}, y_{\nu+1}) + W_j(y_{(\cdot)}, y_\nu)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(x_\mu, y_{(\cdot)}, \xi^\Delta_{\mu(\cdot)})(x_{\mu+1} - x_\mu)(y - y_{(\cdot)}) + \\ + \sum_{j=1}^{l} b_j(x_\mu, y_{(\cdot)}, \xi^\Delta_{\mu(\cdot)})[W_j(x_{\mu+1}, y) - \\ - W_j(x_{\mu+1}, y_{(\cdot)}) - W_j(x_\mu, y) + W_j(x_\mu, y_{(\cdot)})].\end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия:

1) случайная функция $\varphi(x, y)$ с вероятностью 1 непрерывна и

$$M \sup_{(x,y)\in D} |\varphi(x, y)|^2 < \infty; \tag{5.16}$$

2) существует такое K, при котором с равной 1 вероятностью

$$|a(x, y, z)|^2 + \sum_{j=1}^{l} |b_j(x, y, z)|^2 \leqslant K(1 + |z|^2); \tag{5.17}$$

3) для всякого R существует такое L_R, при котором с вероятностью 1

$$|a(x, y, z) - a(x, y, z')|^2 + \\ + \sum_{j=1}^{l} |b_j(x, y, z) - b_j(x, y, z')|^2 \leqslant L_R |z - z'|^2 \tag{5.18}$$

при $|z| \leqslant R$, $|z'| \leqslant R$;

4) случайные функции $a(x, y, z)$ и $b_j(x, y, z)$, $(j = \overline{1, l})$ стохастически непрерывны по совокупности переменных x и y, за исключением, быть может, конечного числа точек, где они могут иметь с вероятностью 1 разрывы первого рода.

Тогда величины $M \sup_{(x,y)\in D} |\xi(x, y)|^2$ и $M \sup_{(x,y)\in D} |\xi^\Delta(x, y)|^2$ ограничены и

$$\lim_{|\Delta|\to 0} M \sup_{(x,y)\in D} |\xi(x, y) - \xi^\Delta(x, y)|^2 = 0,$$

где $\xi(x, y)$ — непрерывное с вероятностью 1, определенное с точностью до стохастической эквивалентности решение уравнения (5.5); $|\Delta|^2 = \max_{i,k} [(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2]$.

Доказательство. Пусть $\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y)$ — неотрицательные функции, определенные в области D, функция $\beta(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных и H — некоторая положительная постоянная. Если имеют место неравенства

$$\alpha(x_i, 0) \leqslant H, \ \alpha(0, y_k) \leqslant H, \ (i = \overline{0, p}; \ k = \overline{0, q});$$

$$\alpha(x_i, y_k) \leqslant \sum_{\mu=0}^{i-1} \sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha(x_\mu, y_\nu) \beta(x_\mu, y_\nu) \Delta_{\mu\nu} + H,$$

$$(i = \overline{1, p}; \quad k = \overline{1, q}),$$

то методом математической индукции можно показать, что существует такая γ_Δ, для которой $\alpha(x_i, y_k) \leqslant H\gamma_\Delta$ $(i = \overline{1, p}; \ k = \overline{1, q})$, причем $\lim_{|\Delta|\to 0} \gamma_\Delta = \exp\left\{\iint_D \beta(x, y)\, dxdy\right\}$. Поэтому из соотношений (5.16) и (5.17) и общих свойств стохастических интегралов следует существование такого R, при котором

$$M \sup_{(x,y)\in D} |\xi^\Delta(x, y)|^2 \leqslant R. \tag{5.19}$$

Пусть $\Delta_1 = \Delta_1 (x_0', x_1', \ldots, x_{p_1}'; y_0', y_1', \ldots, y_{q_1}')$ и $\Delta_2 = \Delta_2 \times \times (x_0'', x_1'', \ldots, x_{p_2}''; y_0'', y_1'', \ldots, y_{q_2}'')$ два некоторых разбиения области D, обозначим их объединение через $\Delta = \Delta (x_0, x_1, \ldots, x_p; y_0, y_1, \ldots, y_q)$; $\xi^{\Delta_1} (x, y)$, $\xi^{\Delta_2} (x, y)$ и $\xi^{\Delta} (x, y)$ — соответствующие этим разбиениям решения системы (5.15). Рассмотрим

$$M \sup_{(x,y)\in D} |\xi^{\Delta_1} (x, y) - \xi^{\Delta} (x, y)|^2.$$

Для оценки этой величины нам понадобятся случайные функции $\varphi_N (x, y)$, $a_N (x, y, z)$ и $b_j^{(N)} (x, y, z)$, $(j = \overline{1, l})$, которые были введены при доказательстве теоремы 2, и решения $\xi_N^{\Delta} (x, y)$, $\xi_N^{\Delta_1} (x, y)$ системы (5.15) с коэффициентами, соответствующими разбиениям Δ и Δ_1. Согласно приведенным выше соображениям, существует такое число R, при котором $M \sup_{x,y)\in D} |\xi_N^{\Delta} (x, y)|^2 \leqslant R$ равномерно относительно N и Δ, поэтому, с учетом неравенств Чебышева,

$$P \{\sup_{(x,y)\in D} |\xi_N^{\Delta_1} (x, y) - \xi_N^{\Delta} (x, y)| > 0\} \leqslant P \{\sup_{(x,y)\in D} |\xi_N^{\Delta_1} (x, y)| \geqslant \mathrm{N}\} +$$

$$+ P \{\sup_{(x,y)\in D} |\xi_N^{\Delta} (x, y)| \geqslant \mathrm{N}\} \leqslant \frac{2R}{\mathrm{N}^2},$$

и так как в силу леммы Бореля—Кантелли из последовательности событий $\{\sup_{(x,y)\in D} |\xi_{N+1}^{\Delta} (x, y) - \xi_N^{\Delta} (x, y)| > 0\}$ с вероятностью 1 происходит конечное число, то с некоторого номера все $\xi_N^{\Delta} (x, y)$ равны и последовательность $\xi_N^{\Delta} (x, y)$ имеет с вероятностью 1 равномерный относительно x, y и Δ предел $\xi^{\Delta} (x, y)$

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{(x,y)\in D} |\xi_N^{\Delta} (x, y) - \xi^{\Delta} (x, y)| = 0,$$

который непрерывен с равной 1 вероятностью и является решением системы рекуррентных соотношений (5.15).

Очевидно, что

$$M \sup_{(x,y)\in D} |\xi^{\Delta} (x, y) - \xi^{\Delta_1} (x, y)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 3M \sup_{(x,y)\in D} |\xi^{\Delta} (x, y) - \xi_N^{\Delta} (x, y)|^2 +$$

$$+ 3M \sup_{(x,y)\in D} |\xi_N^{\Delta} (x, y) - \xi_N^{\Delta_1} (x, y)|^2 +$$

$$+ 3M \sup_{(x,y)\in D} |\xi_N^{\Delta_1} (x, y) - \xi^{\Delta_1} (x, y)|^2.$$

Из построения

$$\xi_N^{\Delta} (x, y) - \xi_N^{\Delta_1} (x, y) =$$

$$= \sum_{\mu}^{(x)} \sum_{\nu}^{(y)} \sum_{x_\mu' \leqslant x_l < x_{\mu+1}'} \sum_{y_\nu' \leqslant y_k < y_{\nu+1}'} \Big\{ [a_N(x_l, y_k, \xi_N^\Delta(x_l, y_k)) -$$

$$- a_N(x_\mu', y_\nu, \xi_N^{\Delta_1}(x_\mu', y_\nu'))] \Delta_{ik} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l} [b_j^{(N)}(x_l, y_k, \xi_N^\Delta(x_l, y_k)) - b^{(N)}(x_l, y_k, \xi_N^{\Delta_1}(x_\mu', y_\nu'))] \Delta W_j^{ik} \Big\},$$

и, следовательно,

$$M \sup_{(x,y)\in D} | \xi_N^\Delta(x, y) - \xi_N^{\Delta_1}(x, y) |^2 \leqslant$$

$$\leqslant (1 + l) \sum_{\mu=0}^{p_1-1} \sum_{\nu=0}^{q_1-1} \sum_{x_\mu' \leqslant x_l < x_{\mu+1}'} \sum_{y_\nu' \leqslant y_k < y_{\nu+1}'} [M | a_N(x_l, y_k, \xi_N^\Delta(x_l, y_k)) -$$

$$- a_N(x_\mu', y_\nu, \xi_N^{\Delta_1}(x_\mu', y_\nu')) |^2 +$$

$$+ 16 \sum_{j=1}^{l} M | b_j^{(N)}(x_l, y_k, \xi_N^\Delta(x_l, y_k)) - b_j^{(N)}(x_\mu', y_\nu', \xi_N^{\Delta_1}(x_\mu', y_\nu')) |^2 \Delta_{ik}.$$

Оценивая слагаемые в правой части таким же путем, как это проделано было при доказательстве теоремы 1 гл. 4, получим следующие оценки:

$$M \sup_{(x,y)\in D} | \xi_N^\Delta(x, y) - \xi_N^{\Delta_1}(x, y) |^2 \leqslant$$

$$\leqslant 51 (l + 1) L_N \sum_{\mu=0}^{p_1-1} \sum_{\nu=0}^{q_1-1} M | \xi_N^\Delta(x_\mu', y_\nu') -$$

$$- \xi_N^{\Delta_1}(x_\mu', y_\nu') |^2 \Delta_{1\mu\nu} + 51 (l + 1) L_N \varepsilon(\Delta_1) + 43\varepsilon_1(\Delta_1),$$

где

$$\sum_{\mu=0}^{p_1-1} \sum_{\nu=0}^{q_1-1} \sum_{x_\mu' \leqslant x_l < x_{\mu+1}'} \sum_{y_\nu' \leqslant y_k < y_{\nu+1}'} M | \xi_N^\Delta\ x_l, y_k) - \xi_N^\Delta(x_\mu', y_\nu') |^2 \Delta_{lk} = \varepsilon(\Delta_1),$$

$$\sum_{\mu=0}^{p_1-1} \sum_{\nu=0}^{q_1-1} \sum_{x_\mu' \leqslant x_l < x_{\mu+1}'} \sum_{y_\nu' \leqslant y_k < y_{\nu+1}'} M | a_N(x_l, y_k, \xi_N^{\Delta_1}(x_\mu', y_\nu')) -$$

$$- a_N(x_\mu', y_\nu', \xi_N^{\Delta_1}(x_\mu', y_\nu')) |^2 \Delta_{lk} = \varepsilon_1(\Delta_1),$$

причем

$$\lim_{|\Delta_1|\to 0} \varepsilon(\Delta_1) = 0, \quad \lim_{|\Delta_1|\to 0} \varepsilon_1(\Delta_1) = 0.$$

Точно так же

$$M | \xi_N^\Delta(x_\mu', y_\nu') - \xi_N^{\Delta_1}(x_\mu', y_\nu') |^2 \leqslant$$

$$\leqslant 6 (l + 1) L_N \sum_{s=0}^{\mu-1} \sum_{t=0}^{\nu-1} M | \xi_N^\Delta(x_s, y_t) -$$

$$- \xi_N^{\Delta_1}(x_s', y_t') |^2 \Delta_{1st} + 6 (l + 1) L_N \varepsilon(\Delta_1) + 6\varepsilon_1(\Delta_1).$$

Отсюда, принимая во внимание приведенное утверждение для неотрицательных функций $\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y)$ (см. начало доказательства), имеем

$$M\,|\xi_N^{\Delta}(x_\mu, y_\nu) - \xi_{N'}^{\Delta_1}(x'_\mu, y'_\nu)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant [6(l+1)L_N\varepsilon(\Delta_1) + 6\varepsilon_1(\Delta_1)]\,\gamma_{\Delta_1}(N),$$

где $\lim\limits_{|\Delta_1|\to 0} \gamma_{\Delta_1}(N) = e^{6(l+1)L_N}$.

Следовательно,

$$M \sup_{(x,y)\in D} |\xi^{\Delta}(x, y) - \xi^{\Delta_1}(x, y)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 153(l+1)L_N\{[6(l+1)L_N\varepsilon(\Delta_1) + 6\varepsilon_1(\Delta_1)]\,\gamma_{\Delta_1}(N) + \varepsilon(\Delta_1)\} +$$
$$+ 144\varepsilon_1(\Delta_1) + \delta(N),$$

где

$$\delta(N) = 3M \sup_{(x,y)\in D} |\xi^{\Delta}(x, y) - \xi_N^{\Delta}(x, y)|^2 +$$
$$+ 3M \sup_{(x,y)\in D} |\xi_{N'}^{\Delta_1}(x, y) - \xi^{\Delta_1}(x, y)|^2,$$

и так как ввиду равномерной сходимости с равной 1 вероятностью последовательности $\xi_N^{\Delta}(x, y)$ к $\xi^{\Delta}(x, y)$

$$\lim_{N\to\infty} \delta(N) = 0,$$

то

$$\lim_{|\Delta_1|\to 0} M \sup_{(x,y)\in D} |\xi^{\Delta}(x, y) - \xi^{\Delta_1}(x, y)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{N\to\infty} \lim_{|\Delta_1|\to 0} \{153(l+1)L_N[[6(l+1)L_N\varepsilon(\Delta_1) +$$
$$+ 6\varepsilon_1(\Delta_1)]\,\gamma_{\Delta_1}(N) + \varepsilon(\Delta_1)] + 144\varepsilon_1(\delta_1) + \delta(N)\} = 0.$$

Аналогично

$$\lim_{|\Delta_2|\to 0} M \sup_{(x,y)\in D} |\xi^{\Delta}(x, y) - \xi^{\Delta_2}(x, y)|^2 = 0,$$

следовательно,

$$\lim_{|\Delta_1|,|\Delta_2|\to 0} M \sup_{(x,y)\in D} |\xi^{\Delta_1}(x, y) - \xi^{\Delta_2}(x, y)|^2 = 0,$$

т. е. для $\xi^{\Delta}(x, y)$ имеет место равномерная сходимость относительно $(x, y) \in D$ в смысле среднего квадратического к некоторому пределу, который обозначим $\xi(x, y)$. Из соотношения (5.19) следует, что

$$M \sup_{(x,y)\in D} |\xi(x, y)|^2 < \infty.$$

Пусть

$$\eta(x, y) = \varphi(x, y) + \int_0^x \int_0^y a(s, t, \xi(s, t))\, ds dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l} \int_0^x \int_0^y b_j(s, t, \xi(s, t))\, dW_j(s, t),$$

тогда

$$M \sup_{(x,y)\in D} |\eta(x, y) - \xi^{\Delta}(x, y)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant (1 + l) \sum_{\mu=0}^{p-1} \sum_{\nu=0}^{q-1} \int_{x_\mu}^{x_{\mu+1}} \int_{y_\nu}^{y_{\nu+1}} [M\, |a(s, t, \xi(s, t)) -$$

$$- a(x_\mu, y_\nu, \xi^{\Delta}(x_\mu, y_\nu))|^2 + 16 \sum_{j=1}^{l} M\, |b_j(s, t, \xi(s, t)) -$$

$$- b_j(x_\mu, y_\nu, \xi^{\Delta}(x_\mu, y_\nu))|^2]\, ds dt,$$

и с помощью приемов, применявшихся в ходе аналогичного доказательства для теоремы 1 § 1 гл. 4, получим, что

$$\lim_{|\Delta|\to 0} M \sup_{(x,y)\in D} |\eta(x, y) - \xi^{\Delta}(x, y)|^2 = 0.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Условие 3) этой теоремы можно заменить требованием непрерывности с вероятностью 1 случайных функций $a(x, y, z)$ и $b_j(x, y, z)$, $(j = \overline{1, l})$ по переменной z и условием, что для любого R найдется такая L_R, что для всех случайных функций $\zeta(x, y)$ и $\zeta'(x, y)$ подчиненных потоку $\{\mathfrak{F}_{xy}, (x, y) \in D\}$,

$$M\, |a(x, y, \zeta(x, y)) - a(x, y, \zeta'(x, y))|^2 +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l} M\, |b_j(x, y, \zeta(x, y)) - b_j(x, y, \zeta'(x, y))|^2 \leqslant$$

$$\leqslant L_R M\, |\zeta(x, y) - \zeta'(x, y)|^2,$$

если $|\zeta(x, y)| \leqslant R$ и $|\zeta'(x, y)| \leqslant R$, что легко проверяется по ходу доказательства теоремы.

Таким образом, решение стохастического уравнения Дарбу (5.5) может быть сведено к решению его конечно-разностного аналога (5.15), что позволяет моделировать на ЭВМ поведение систем, изменение состояний которых может быть описано стохастическими уравнениями Дарбу.

§ 2. ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СО СТОХАСТИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ ДАРБУ И МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Пусть имеем систему, закон изменения состояний которой может быть записан с помощью стохастического уравнения Дарбу

$$\xi(x, y) = \varphi(x, y) + \int_0^x \int_0^y A(s, t, \xi(s, t), u)\, ds dt +$$
$$+ \sum_{j=1}^{l} \int_0^x \int_0^y B_j(s, t, \xi(s, t), u)\, dW_j(s, t), \tag{5.20}$$

где $u = \{u_1, \ldots, u_m\}$ — параметры управления системой. В общем случае $u = u(x, y, z)$ — это случайные функции, зависящие от пространственных координат системы x, y и от состояния системы $z = \xi(x, y)$, определенные при $(x, y) \in D$, $|z| < \infty$ и подчиненные (чтобы уравнение (5.20) имело смысл) потоку σ-алгебр $\{\mathfrak{F}_{x,y}, (x, y) \in D\}$.

Задача управления такими системами состоит в выборе среди управлений, принимающих значения из некоторого множества U

$$u(x, y, z) \in \mathrm{U}, \tag{5.21}$$

такого управления $u^* = u^*(x, y, z)$, называемого оптимальным, при котором целевой функционал

$$\Phi(u) = M \iint_D F(x, y, \xi(x, y), u)\, dxdy \tag{5.22}$$

принимает наименьшее значение; здесь $F(x, y, z, u)$ — заданная случайная функция, определенная при $(x, y) \in D$, $|z| < \infty$, $u \in \mathrm{U}$, измеримая по совокупности всех своих переменных.

Если управляющие воздействия от состояния системы не зависят, т. е. $u = u(x, y)$, имеем задачу программного управления, если же $u = u(z)$ — задачу синтеза управлений.

Пусть $\Delta = \Delta(x_0, x_1, \ldots, x_p, y_0, y_1, \ldots, y_q)$ — некоторые разбиения области D. Тогда конечно-разностная аппроксимация $\xi^\Delta(x, y)$ решения стохастического уравнения (5.20), соответствующая этому разбиению, определяется следующей системой:

$$\xi^\Delta(x, 0) = \varphi(x, 0),\ \xi(0, y) = \varphi(0, y),\ (x, y) \in D;$$
$$\xi^\Delta(x, y) - \xi^\Delta(x, y_k) - \xi^\Delta(x_i, y) + \xi^\Delta(x_i, y_k) =$$
$$= \varphi(x, y) - \varphi(x, y_k) - \varphi(x_i, y) + \varphi(x_i, y_k) +$$
$$+ A(x_i, y_k, \xi_{ik}^\Delta, u_{ik}(\xi_{ik}^\Delta))(x - x_i)(y - y_k) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{l} B_j(x_i, y_k, \xi_{ik}^\Delta, u_{ik}(\xi_{ik}^\Delta))[W_j(x, y) - W_j(x, y_k) -$$
$$- W_j(x_i, y) + W_j(x_i, y_k)] \tag{5.23}$$

при $(x, y) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$, $(i = \overline{0, p-1};\ k = \overline{0, q-1})$, где $\xi_{ik}^{\Delta} = \xi^{\Delta}(x_i, y_k)$, $u_{ik}(z) = u(x_i, y_k, z)$.

Решение этой системы $\xi^{\Delta}(x, y)$ может быть представлено в следующей форме:

$$\xi^{\Delta}(x, y) = \varphi(x, y) + \sum_{\mu}^{(x)} \sum_{\nu}^{(y)} \Bigg[A(x_\mu, y_\nu, \xi_{\mu\nu}^{\Delta}, u_{\mu\nu}(\xi_{\mu\nu}^{\Delta}))\, \Delta_{\mu\nu} + \sum_{j=1}^{l} B_j(x_\mu, y_\nu, \xi_{\mu\nu}^{\Delta}, u_{\mu\nu}(\xi_{\mu\nu}^{\Delta}))\, \Delta W_j^{\mu\nu} \Bigg],$$

где

$$\Delta W_j^{\mu\nu} = W_j(x_{\mu+1}, y_{\nu+1}) - W_j(x_\mu, y_{\nu+1}) - W_j(x_{\mu+1}, y_\nu) + W_j(x_\mu, y_\nu);$$

$$\Delta_{\mu\nu} = (x_{\mu+1} - x_\mu)(y_{\nu+1} - y_\nu).$$

Дискретный аналог задачи управления (5.20) — (5.22) состоит в нахождении среди управлений

$$u_{ik}(z) \in \mathrm{U}, \qquad (i = \overline{0, p-1};\ k = \overline{0, q-1}) \tag{5.24}$$

такого управления $\overset{*}{u}_{ik}(z)$, называемого оптимальным для этой дискретной задачи, которое минимизирует функционал цели $\Phi_{\Delta}(u)$

$$\Phi_{\Delta}(u) = M \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{k=0}^{q-1} F(x_i, y_k, \xi_{ik}^{\Delta}, u_{ik}(\xi_{ik}^{\Delta}))\, \Delta_{ik}. \tag{5.25}$$

Теорема 4. Пусть выполняются условия:

1) случайная функция $\varphi(x, y)$ с вероятностью 1 непрерывна и

$$M \sup_{(x,y)\in D} |\varphi(x, y)|^2 < \infty;$$

2) существует такое K, для которого с вероятностью, равной 1,

$$|A(x, y, z, u)|^2 + \sum_{j=1}^{l} |B_j(x, y, z, u)|^2 \leqslant K(1 + |z|^2);$$

3) для всякого R существует такое L_R, при котором с вероятностью 1

$$|A(x, y, z, u) - A(x, y, z', u')|^2 + \sum_{j=1}^{l} |B_j(x, y, z, u) - B_j(x, y, z', u')|^2 \leqslant L_R[\,|z - z'|^2 + |u - u'|^2]$$

при $|z| \leqslant R$, $|z'| \leqslant R$;

4) для всякого R существует такое L_R, при котором с вероятностью 1

$$|u(x, y, z) - u(x, y, z')|^2 \leqslant L_R |z - z'|^2$$

при $|z| \leqslant R$, $|z'| \leqslant R$ для любого управления $u(x, y, z) \in \mathrm{U}$;

5) случайные функции $A(x, y, z, u)$, $B_j(x, y, z, u)$, $(j = \overline{1, l})$

и управляющие функции $u(x, y, z) \in U$ стохастически непрерывны по совокупности переменных x и y, за исключением, быть может, конечного числа точек, где эти функции с вероятностью 1 могут иметь разрывы первого рода;

6) случайная функция $F(x, y, z, u)$ с вероятностью 1 непрерывна по совокупности переменных x, y, z и u, и существует такое k, при котором с вероятностью 1 имеет место соотношение

$$|F(x, y, z, u)| \leqslant k(1 + |z|^2);$$

7) множество U замкнутое.

Тогда величины $M \sup\limits_{(x,y)\in D} |\xi^\Delta(x, y)|^2$, $M \sup\limits_{(x,y)\in D} |\xi(x, y)|^2$ ограничены; кроме того,

$$\lim_{|\Delta|\to 0} M \sup_{(x,y)\in D} |\xi^\Delta(x, y) - \xi(x, y)|^2 = 0,$$

где $\xi(x, y)$ — непрерывное по совокупности переменных x и y с вероятностью 1, определенное с точностью до стохастической эквивалентности решение уравнения (5.20) при каждом управлении $u(x, y, z) \in U$; $\xi^\Delta(x, y)$ — решение системы (5.23) при том же управлении; если $u^*(x, y, z)$ — оптимальное управление задачи (5.20) — (5.22), а $u^*_\Delta(x_i, y_k, z)$, $(i = \overline{0, p-1};\ k = \overline{0, q-1})$ — оптимальное управление дискретной задачи (5.23) — (5.25), то

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \Phi_\Delta(u^*_\Delta) = \Phi(u^*).$$

Эта теорема позволяет обосновать переход от задачи управления (5.20) — (5.22) к ее конечно-разностному аналогу в форме (5.23) — (5.25). Первая часть ее утверждения следует из теоремы 3 § 1, а вторая аналогична теореме 2 и § 1 гл. 4 и доказывается точно так же.

§ 3. НЕОБХОДИМЫЕ ПРИЗНАКИ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Для всех приведенных ниже утверждений доказательства опущены, поскольку они идентичны доказательствам соответствующих утверждений для обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений, приведенных в предыдущей главе.

Теорема 5. Пусть выполняются условия:

1) множество U выпуклое и замкнутое;

2) случайные функции $v_{ik}(z) = v(x_i, y_k, z)$ подчинены потоку $\{\mathfrak{F}_{x_i y_k}, (x_i, y_k) \in D\}$, с вероятностью 1 непрерывны и значения $M|v_{ik}(z)|^2$ ограничены некоторой постоянной;

3) элементы матриц $u_{zik}(z) = u_z(x_i, y_k, z)$ $(i = \overline{0, p-1};\ k = \overline{0, q-1})$ существуют, с вероятностью 1 непрерывны (по z) и ограничены некоторой постоянной;

4) элементы матриц $A_z(x_i, y_k, z, u)$ и $B_{jz}(x_i, y_k, z, u)$, $(j = \overline{1, l})$ существуют, с вероятностью 1 непрерывны по совокупности переменных z и u и ограничены некоторой постоянной;

5) элементы матриц $A_u(x_i, y_k, z, u)$ и $B_{ju}(x_i, y_k, z, u)$, $(j=\overline{1, l})$ существуют, с вероятностью 1 непрерывны по u и ограничены некоторой постоянной;

6) с вероятностью 1 существуют непрерывные по u частные производные $\frac{\partial}{\partial u_\nu} F(x_i, y_k, z, u)$, $(i=\overline{0, p-1}; k=\overline{0, q-1})$, ограниченные некоторой постоянной $(\nu=\overline{1, m})$;

7) с вероятностью 1 существуют непрерывные по совокупности переменных z и u частные производные $\frac{\partial}{\partial z_\nu} F(x_i, y_k, z, u)$, $(i=\overline{0, p-1}; k=\overline{0, q-1})$, ограниченные некоторой постоянной $(\nu=\overline{1, n})$.

Тогда в точке $u_{ik}(z)$, $(i=\overline{0, p-1}; k=\overline{0, q-1})$ целевой функционал $\Phi_\Delta(u)$ имеет производную $\delta_v \Phi_\Delta(u)$ по направлению $v_{ik}(z)$, $(i=\overline{0, p-1}; k=\overline{0, q-1})$, равную

$$\delta_v \Phi_\Delta(u) = M \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{k=0}^{q-1} (F_u(x_i, y_k, \xi_{ik}^\Delta, u_{ik}\xi_{ik}^\Delta))\Delta_{ik} -$$

$$-\Bigg[A_u^{\mathrm{T}}(x_i, y_k, \xi_{ik}^\Delta, u_{ik}(\xi_{ik}^\Delta))\Delta_{ik} +$$

$$+\sum_{j=1}^{l} B_{ju}^{\mathrm{T}}(x_i, y_k, \xi_{ik}^\Delta, u_{ik}(\xi_{ik}^\Delta))\Delta W_j^{ik}\Bigg]\lambda_{i+1k+1}, v_{ik}(\xi_{ik}^\Delta)),$$

где множители Лагранжа λ_{ik} определяются следующей системой рекуррентных соотношений:

$$\lambda_{pq} = \lambda_{pk} = \lambda_{iq} = 0;$$

$$\lambda_{ik} - \lambda_{i+1,k} - \lambda_{i,k+1} + \lambda_{i+1,k+1} =$$

$$= \Bigg[A_z^{\mathrm{T}}(x_i, y_k, \xi_{ik}^\Delta, u_{ik}(\xi_{ik}^\Delta))\Delta_{ik} +$$

$$+\sum_{j=1}^{l} B_{jz}^{\mathrm{T}}(x_i, y_k, z_{ik}^\Delta, u_{ik}(\xi_{ik}^\Delta))\Delta W_j^{ik} +$$

$$+ A_u^{\mathrm{T}}(x_i, y_k, \xi_{ik}^\Delta, u_{ik}(\xi_{ik}^\Delta))u_{zik}(\xi_{ik}^\Delta)\Delta_{ik} +$$

$$+\sum_{j=1}^{l} B_{ju}^{\mathrm{T}}(x_i, y_k, \xi_{ik}^\Delta, u_{ik}(\xi_{ik}^\Delta))u_{zik}(\xi_{ik}^\Delta)\Delta W_j^{ik}\Bigg]\lambda_{i+1k+1} -$$

$$- F_z(x_i, y_k, \xi_{ik}^\Delta, u_{ik}(\xi_{ik}^\Delta))\Delta_{ik} -$$

$$- F_u(x_i, y_k, \xi_{ik}^\Delta, u_{ik}(\xi_{ik}^\Delta))u_{zik}(\xi_{ik}^\Delta)\Delta_{ik},$$

$$(i=\overline{p-1, 1};\ k=\overline{q-1, 1}).$$

Для программного управления можно предполагать, что случайная функция $\varphi(x, y)$ зависит от управления $\varphi(x, y) = \varphi(x, y, u)$. В этом случае теорема 5 может быть сформулирована следующим образом:

Теорема 5′. Пусть выполняются условия теоремы 5 и, кроме того, с вероятностью 1 элементы матриц $\varphi_u(x_i, y_k, u)$, $(i = \overline{0, p-1}$; $k = \overline{0, q-1})$ существуют, непрерывны и ограничены некоторой постоянной.

Тогда существует производная функционала $\Phi_\Delta(u)$ равная

$$\delta_v \Phi_\Delta(u) = M \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{q-1} \Bigg(\Bigg[F_u(x_i, y_k, \xi_{ik}^\Delta, u(x_i, y_k)) -$$

$$- \frac{1}{\Delta_{ik}} (\lambda_{ik} - \lambda_{i-1,k} - \lambda_{i,k-1} + \lambda_{i-1,k-1}, \varphi_u(x_i, y_k, u(x_i, y_k)) \Bigg) \Bigg] \Delta_{ik} -$$

$$- \Bigg[A_u^{\mathrm{T}}(x_i, y_k, \xi_{ik}^\Delta, u(x_i, y_k)) \Delta_{ik} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l} B_{ju}^{\mathrm{T}}(x_i, y_k, \xi_{ik}^\Delta, u(x_i, y_k)) \Delta W_j^{ik} \Bigg] \lambda_{i+1,k+1}, v(x_i, y_k)),$$

где λ_{ik} — множители Лагранжа, которые определяются с помощью следующей системы соотношений:

$$\lambda_{pk} = \lambda_{iq} = \lambda_{pq} = 0,$$

$$\lambda_{ik} - \lambda_{i+1,k} - \lambda_{i,k+1} + \lambda_{i+1,k+1} =$$

$$= \Bigg[A_z^{\mathrm{T}}(x_i, y_k, \xi_{ik}^\Delta, u(x_i, y_k)) \Delta_{ik} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l} B_{jz}^{\mathrm{T}}(x_i, y_k, \xi_{ik}^\Delta, u(x_i, y_k)) \Delta W_j^{ik} \Bigg] \lambda_{i+1,k+1} -$$

$$- F_z(x_i, y_k, \xi_{ik}^\Delta, u(x_i, y_k)) \Delta_{ik}, \qquad (i = \overline{p-1, 0};\ k = \overline{q-1, 0}).$$

Будем считать, что случайные функции $u_{ik}(z) = u(x_i, y_k, z)$, $(i = \overline{0, p-1}$; $k = \overline{0, q-1})$ принадлежат классу $\mathfrak{M}_2(\mathrm{U})$, если они подчинены потоку σ-алгебр $\{\mathfrak{F}_{x_i y_k}, (x_i, y_k) \in D\}$, с вероятностью 1 имеют непрерывные ограниченные некоторой постоянной производные $u_z(x_i, y_k, z)$ и если значения $M|u(x_i, y_k, z)|^2$, $(i = \overline{0, p-1}$; $k = \overline{0, q-1})$ ограничены некоторой постоянной.

Теорема 6. Пусть условия теоремы 5 имеют место для всех управлений $v_{ik}(z) \in \mathfrak{M}_2(\mathrm{U})$, $(i = \overline{0, p-1}$; $k = \overline{0, q-1})$, а целевой функционал $\Phi_\Delta(u)$ при некотором управлении $\overset{*}{u}_{ik}(z) \in \mathfrak{M}_2(\mathrm{U})$, $(i = \overline{0, p-1}$; $k = \overline{0, q-1})$ принимает минимум. Тогда

$$\min_{v \in \mathrm{U}} M(F_u(x_i, y_k, \xi_{ik}^{\Delta *}, \overset{*}{u}_{ik}(\xi_{ik}^{\Delta *})) \Delta_{ik} -$$

$$- \Bigg[A_u^{\mathrm{T}}(x_i, y_k, \xi_{ik}^\Delta, \overset{*}{u}_{ik}(\xi_{ik}^{\Delta *})) \Delta_{ik} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l} B_{ju}^{\mathrm{T}} (x_i, \ y_k, \ \xi_{ik}^{\Delta *}, \ \overset{*}{u}_{ik} (\xi_{ik}^{\Delta *})) \Delta W_j^{ik} \Big] \times$$

$$\times \lambda_{i+1,k+1}^{*}, \ v_{ik} (\xi_{ik}^{\Delta *}) - \overset{*}{u}_{ik} (\xi_{ik}^{\Delta *})) = 0,$$

$$(i = \overline{0, \ p-1}; \ k = \overline{0, \ q-1}).$$

И аналогично для программного управления в случае, когда $\varphi (x, \ y) = \varphi \ (x, \ y, \ u)$, имеет место следующее утверждение.

Теорема 6'. Пусть условия теоремы 5 имеют место для всех управлений $v (x_i, \ y_k) \in \mathrm{U}$, $(i = \overline{0, \ p-1}; \ k = \overline{0, \ q-1})$, а функционал цели $\Phi_{\Delta} (u)$ при некотором управлении $u^* (x_i, \ y_k) \in \mathrm{U}$, $(i = \overline{0, \ p-1}; \ k = \overline{0, \ q-1})$ принимает минимум. Тогда

$$\min_{v \in \mathrm{U}} M \Bigg(\Big[F_u (x_i, \ y_k, \ \xi_{ik}^{\Delta *}, \ u^* (x_i, \ y_k)) -$$

$$- \frac{1}{\Delta_{ik}} (\overset{*}{\lambda}_{ik} - \overset{*}{\lambda}_{i-1,k} - \overset{*}{\lambda}_{i,k-1} + \overset{*}{\lambda}_{i-1,k-1}, \ \varphi_u (x_i, \ y_k, u^* (x_i, \ y_k))) \Big] \Delta_{ik} -$$

$$- \Big[A_u^{\mathrm{T}} (x_i, \ y_k, \ \xi_{ik}^{\Delta *}, \ u^* (x_i, \ y_k)) \Delta_{ik} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l} B_{ju}^{\mathrm{T}} (x_i, \ y_k, \ \xi_{ik}^{\Delta *}, \ u^* (x_i, \ y_k)) \Delta W_j^{ik} \Big] \overset{*}{\lambda}_{i+1,k+1}, \ v (x_i, \ y_k) -$$

$$- u^* (x_i, \ y_k) \Bigg) = 0, \qquad (i = \overline{0, \ p-1}; \ k = \overline{0, \ q-1}).$$

§ 4. ПРИМЕРЫ

Приведем теперь пример задачи оптимального управления со стохастическим уравнением Дарбу для процесса сорбции газа, проходящего при наличии случайных воздействий типа «белых шумов» на плоскости.

Рассмотрим процесс поглощения (сорбции) газа. Пусть трубка, ось которой выберем в качестве координатной оси x, заполнена поглощающим веществом (сорбентом). Через вход трубки, который будем считать началом координатной оси x, в трубку пропускается газовоздушная смесь. Обозначим через $u (x, \ t)$ концентрацию газа, находящегося в момент времени t, $t \in [0, \ T]$, в порах сорбента в слое x. Тогда, в случае малой концентрации (изотерма Генри), концентрация $u (x, \ t)$ удовлетворяет следующему уравнению (см. [37]):

$$u_{xt} + \frac{\beta}{\nu} u_t + \beta \gamma u_x = 0, \qquad (5.26)$$

где β — кинетический коэффициент ν — скорость газа; $\frac{1}{\gamma}$ — коэффициент Генри.

Рассмотрим для этого уравнения задачу Гурса, считая заданными начальные условия

$$u(x,\ 0) = e^{-\frac{\beta}{\nu}} u_0,\quad u(0,\ t) = u_0(t),\quad u_0(0) = u_0, \tag{5.27}$$

где $u_0(t)$ — концентрация газа на входе в момент времени t.

Пусть $x = L$ — координата выхода. Задача управления для процесса (5.26) — (5.27) заключается, например, в выборе такого режима концентрации газа на входе $u_0(t) = u_0^*(t)$, при котором концентрация газа $u^*(x,\ t)$ менее всего отличается от заданного режима $\tilde{u}(x,\ t)$, т. е. нужно найти такую управляющую функцию $u_0^*(t)$, $t \in [0,\ T]$, при которой функционал цели

$$\Phi(u_0(t)) = \int_0^L \int_0^T \tilde{u}(x,\ t) - u(x,\ t)|^{\lambda}\, dxdt,\quad (\lambda \geqslant 1)$$

достигает своего наименьшего возможного значения.

Путем замены

$$u(x,\ t) = e^{-\frac{\beta}{\nu}x - \beta\gamma t}\, v(x,\ t)$$

уравнение (5.26) приводится к следующему виду:

$$v(x,\ t) = \varphi(x,\ t,\ u_0(t)) + \int_0^x \int_0^t a(s,\ y,\ v(s,\ y))\, dsdy,$$

где

$$\varphi(x,\ t,\ u) = e^{\beta\nu t} u,\quad a(s,\ y,\ z) = \beta^2 \frac{\gamma}{\nu} z.$$

Наличие неравномерностей при распределении сорбента в трубке и потока газа с течением времени, их неоднородность и другие факторы приводят к необходимости рассматривать уравнение со случайными коэффициентами и дополнительными слагаемыми, отражающими различные отклонения процесса, которые можно охарактеризовать с помощью «белых шумов». Таким образом, приходим к стохастическому уравнению Дарбу в общей форме

$$v(x,\ t) = \varphi(x,\ t,\ u_0(t)) + \int_0^x \int_0^t a(s,\ y,\ v(s,\ y))\, dsdy +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l} \int_0^x \int_0^t b_j(s,\ y,\ v(s,\ y))\, dW_j(s,\ y), \tag{5.28}$$

где коэффициенты $b_j(x,\ t,\ z,\ u)$, $(j = \overline{1,\ l})$ характеризуют степень влияния случайных воздействий как внутри системы, так и вне ее (например, казанные выше неравномерности и неоднородности газа и сорбента, изменения условий работы установки, присутствие элементов случайности в физических характеристиках процесса и т. п.).

Задача управления для процесса при наличии таких случайных воздействий будет состоять в выборе такого режима концентрации газа на входе $u_0(t) = u_0^*(t)$, $t \in [0, T]$, при котором целевой функционал

$$\Phi(u_0(t)) = M\int_0^L\int_0^T |\tilde{u}(x, t) - u(x, t)^\lambda|\, dxdt, \tag{5.29}$$

где $\lambda \geqslant 1$, $\tilde{u}(x, t)$ — заданная функция, принимает минимальное значение.

Если $A(x, t)$ — количество газа, поглощенного единицей сорбента, то для функции $A(x, t)$ имеют место следующие соотношения [37]:

$$A_{xt} + \frac{\beta}{\nu}A_t + \beta\gamma A_x = 0,\ A(x, 0) = A(0, 0) = 0,$$

$$A(0, t) = \frac{1}{\gamma}[u_0(t) - u_0e^{-\beta\gamma t}], \tag{5.30}$$

и для процесса сорбции можно рассматривать также задачу управления со следующим критерием оптимальности режима концентрации газа на входе: нужно найти такую концентрацию газа на входе $u_0(t) = u_0^*(t)$, $t \in [0, T]$, которая минимизирует функционал

$$\Phi(u_0(t)) = \int_0^L\int_0^T |\tilde{A}(x, t) - A(x, t)|^\lambda\, dxdt,$$

где $\lambda \geqslant 1$, $\tilde{A}(x, t)$ — заданная функция. Подобно тому, как это было проделано при постановке задачи управления (5.28) — (5.29), можно ввести стохастическое уравнение Дарбу, обобщающее уравнение (5.30), а также соответствующий целевой функционал, а затем рассматривать задачу оптимального управления.

С аналогичными задачами Гурса приходится иметь дело при изучении процесса сушки воздушным потоком, к таким же задачам приводит процесс прогревания потоком воды и т. д. Применение методов оптимального управления такими процессами дало бы возможность путем выбора оптимальных режимов работы соответствующих установок повысить их экономичность без ввода дополнительных мощностей.

Стохастические интегралы по винеровской мере рассмотрены в работах [8, 31, 47, 49], стохастические уравнения Дарбу — в работах [11, 31, 40, 41, 46].

Задачам управления со стохастическими уравнениями Дарбу с переходом к конечно-разностным аналогам этих задач и связанным с этим переходом вопросам сходимости и поиска решений посвящены работы [39, 42, 43].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. М., «Наука», 1967. 223 с.
2. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М., «Наука», 1965. 474 с.
3. *Будак Б. М., Беркович Е. М., Соловьев Е. Н.* О разностных аппроксимациях в задачах оптимального управления.— Вестн. Моск. ун-та, 1968, № 2.
4. *Верченко П. И., Нурминский Е. А.* О сходимости метода поиска седловых точек.— Кибернетика, 1977, № 3, с. 112—116.
5. *Гайворонский А. А.* Об одном методе решения экстремальных задач с ограничениями.— Исслед. операций, 1977, № 3, с. 48—53.
6. *Гирсанов И. Ф.* Минимаксные задачи в теории диффузионных процессов.— ДАН СССР, 1961, **136**, № 4, с. 761—764.
7. *Гихман И. И.* Разностные мартингалы двух аргументов.— В кн.: Труды школы-семинара по теории случайных процессов. Т. 1. Друскининкай, 1974, с. 33—69.
8. *Гихман Я. И., Пясецкая Т. Е.* Два типа стохастических интегралов по мартингальным мерам на плоскости.— ДАН УССР. Сер. А, 1975, № 11.
9. *Гихман И. И., Скороход А. Т.* Стохастические дифференциальные уравнения. К., «Наук. думка», 1968. 356 с.
10. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. Т. 3. М., «Наука» 1975. 496 с.
11. *Гихман И. И.* Общая задача Гурса, содержащая интегралы по двухпараметрическому винеровскому полю.— В кн.: Поведение систем в случайных средах. Донецк, 1975, с. 15—21.
12. *Годунов С. К., Рябенький В. С.* Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, 1962. 264 с.
13. *Гуленко В. П.* О некоторых численных методах решения задач оптимального управления. Автореф. канд. дис. К., 1968. 20 с.
14. *Гуленко В. П.* Обоснование метода «стробирования» пространства состояний, применяемого для решения задач оптимального управления.— Теория оптим. решений, 1970, № 1, с. 3—10.
15. *Гуленко В. П.* Дискретный принцип почти максимума и его использование для решения задач оптимального управления.— Теория оптим. решений, 1972, с. 26—33.
16. *Гуленко Т. П., Ермольев Ю. М.* О конечно-разностном методе в задачах управления системами с распределенными параметрами.— Кибернетика, 1970, № 5, с. 81—83.
17. *Дороговцев А. Я., Кнопов П. С.* Оценка двумерного сигнала по наблюдению с аддитивным случайным шумом.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1977, вып. 17, с. 61—79.
18. *Ермольев Ю. М.* Конечно-разностный метод в задачах оптимального управления.— Тез. сообщ. междунар. конгр. математиков. М., 1966, с. 709—721.
19. *Ермольев Ю. М.* Об оптимальном управлении случайными процессами.— Кибернетика, 1970, № 2, с. 18—29.
20. *Ермольев Ю. М.* Методы стохастического программирования. М., «Наука», 1976. 285 с.

21. *Ермольев Ю. М., Гуленко В. П.* О численных методах решения задач оптимального управления.— Кибернетика, 1966, № 1, с. 120—121.
22. *Ермольев Ю. М., Гуленко В. П.* Конечно-разностный метод в задачах оптимального управления.— Кибернетика, 1967, № 3, с. 1—20.
23. *Ермольев Ю. М., Мельник И. М.* Экстремальные задачи на графах. К., «Наук. думка», 1969. 342 с.
24. *Зойтендейк.* Методы возможных направлений. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
25. *Красовский Н. П.* Теория управления движением. М., «Наука», 1968. 476 с.
26. *Кушнер Г. Дж.* Стохастическая устойчивость и управление. М., «Мир», 1969.
27. *Лионс Ж. Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных. М., «Мир», 1972. 414 с.
28. *Моисеев Н. Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. М., «Наука», 1971. 424 с.
29. *Охоцимский Д. Е., Энеев Т. А.* Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли.— Успехи физ. наук, 1957, **63**, № 1а, с. 36—51.
30. *Полак Э.* Численные методы оптимизации (единый подход). М., «Мир», 1974.
31. *Пономаренко Л. Л.* Стохастические интегралы по многопараметрическому броуновскому движению и связанные с ними стохастические уравнения.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1972, вып. 7, с. 100—109.
32. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В.* Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1967. 384 с.
33. *Пропой А. Я.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М., «Наука», 1973. 256 с.
34. *Скороход А. В.* Исследования по теории случайных процессов. К., Изд-во Киев. ун-та, 1961. 216 с.
35. *Стратонович Р. Л.* Принцип максимума и статистические задачи оптимального управления.— В кн.: Оптимальные системы автоматического управления. М., 1967, с. 80—102.
36. *Табак Д., Куо Б.* Оптимальное управление и математическое программирование. М., «Наука», 1975. 280 с.
37. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966. 724 с.
38. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., «Наука», 1969. 368 с.
39. *Царенко Т. И.* Задача оптимального управления стохастическими уравнениями Дарбу и метод конечных разностей.— В кн.: Математические методы исследования и оптимизации систем. К., 1971, с. 28—50.
40. *Царенко Т. Ю.* Теорема существования и единственности решений стохастического уравнения Дарбу.— Теория оптим. решений, 1972, с. 131—136.
41. *Царенко Т. И.* Существование и единственность решений стохастического уравнения Дарбу.— Теория оптим. решений, 1973, с. 17—30.
42. *Царенко Т. И.* Необходимые условия оптимальности решения дискретной задачи управления со стохастическим уравнением Дарбу.— В кн.: Оптимизация стохастических систем. К., 1976, с. 59—65.
43. *Царенко Т. И.* О решении дискретной стохастической задачи Гурса для программного управления.— В кн.: Методы исследования операций и теории надежности в анализе систем. К., 1976, с. 80—84.
44. *Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В.* Вариационные задачи механики и управления. М., «Наука», 1973. 238 с.
45. *Шатровский Л. И.* Об одном численном методе решения задачи оптимального управления.— Вычисл. математика и мат. физика, 1962, № 3, с. 74—87.
46. *Cairoli R.* Sur une équation différentielle stochastique.— C. r. Acad. sci. A, 1972, **274**. N 24, p. 1739—1742.
47. *Gairoli R., Walsh I.* B. Stochastic integrals in the plane.— Acta math., 1975, 134, N 1-2, p. 111—183.
48. *Fleming W. H.* The Cauchy problem for degenerate parabolic equations.— J. Math. and Mech., 1964, **13**, N 6, p. 987—1008.
49. *Zimmerman G.* Some simple function properties of the twoparameter gaussian process.— Ann. Math. Statist, 1972, **43**, N 4, p. 1235—1246.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЮРИЙ МИХАЙЛОВИЧ ЕРМОЛЬЕВ
ВЛАДИМИР ПЕТРОВИЧ ГУЛЕНКО
ТАТЬЯНА ИВАНОВНА ЦАРЕНКО

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Печатается по постановлению ученого совета Института кибернетики АН УССР

Редактор *Л. Л. Райтбурд*
Оформление художника *В. Г. Самсонова*
Художественный редактор *И. П. Антонюк*
Технический редактор *И. А. Ратнер*
Корректоры *Е. Н. Межерицкая, Л. М. Тищенко*

Информ. бланк № 1934.

Сдано в набор 29.12.77. Подп. в печ. 13.07.78. БФ 09273. Формат 60×90/16. Бумага типогр. № 1. Лит. гарн. Выс. печ. Усл. печ. л. 10,25. Уч.-изд. л. 9,5. Тираж 2000 экз. Заказ 8—137. Цена 1 руб. 40 коп.

Изготовлено Нестеровской городской типографией Львовского облполиграфиздата (г. Нестеров, ул. Горького, 8) с матриц Головного предприятия республиканского объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР (г. Киев, Довженко, 3), зак. 3581.

1 руб. 40 коп.

«НАУКОВА ДУМКА»